23. PODSTAWY SYMBOLIZACJI W LOGICE RELACJI

Logika relacji jest pewnym poszerzeniem logiki predykatów. Również w logice relacji musimy opanować pewne podstawowe „chwyty", które pozwolą nam dokonywać symbolizacji. Pierwszym z tych „chwytów" jest zrozumienie wagi kolejności zapisywanych kwantyfikatorów. Drugim „chwytem" jest umiejętność dokonywania symbolizacji zdań kategorycznych w logice relacji. Trzecim wreszcie – zrozumienie zachowania negacji. Pierwsza umiejętność jest swoista dla logiki relacji, dwie pozostałe stanowią poszerzenie tego, co już opanowaliście.

23.1. Logika relacji jako poszerzona logika predykatów

Pamiętacie przykład intuicyjnie prawidłowego rozumowania, które w logice zdań okazywało się nieprawidłowe: Wszyscy ludzie są śmiertelni; Sokrates jest człowiekiem; zatem Sokrates jest śmiertelny. Wiemy już teraz, że logika zdań – choć jest teorią logiczną z wielu względów imponującą – to jest teorią po prostu zbyt »zgrubną«, aby móc ująć takie rozumowania jako rozumowania prawidłowe. Radzi sobie z nimi logika predykatów, gdyż pozwala zrozumieć logiczny sens funktora 'wszyscy'. Istnieją jednakże intuicyjnie prawidłowe rozumowania, które wymuszają poszerzenie również logiki predykatów. Oto jeden z przykładów:

(A_1) Wszystkie wielkie koty lubią wszystkie antylopy.
Wszystkie lwy są wielkimi kotami.
Wszystkie antylopy gnu są antylopami.
____
Zatem: Wszystkie lwy lubią wszystkie antylopy gnu.

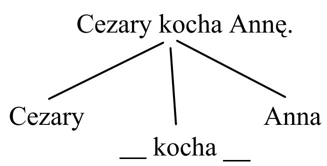
Pozostawiam Wam dokonanie symbolizacji i przekonanie się, że istotnie będzie to wnioskowanie logicznie prawidłowe w logice predykatów. Wiąże się to ponownie z tym, że logika predykatów nie rozpoznaje w szczególności złożonej struktury przesłanki pierwszej oraz wniosku. Aby tę strukturę oddać wprowadzić aparaturę pozwalającą na oddanie nie tylko własności indywiduów, lecz również związków między indywiduami. Tego dokonuje logika relacji.

23.1.1. Zdania indywiduowe

Rozważmy następujące trzy zdania:

(1) Cezary kocha Annę.
(2) Cezary kocha Danutę.
(3) Bogdan kocha Danutę.

Z punktu widzenia logiki predykatów zdania (1) różni się od zdań (2)–(3) tym, że w zdaniu pierwszym występuje funkcja zdaniowa '*x* kocha Annę', a zdania (2)–(3) mają wspólną funkcję zdaniową '*x* kocha Danutę'. Logika predykatów pozwala nam bowiem „uzmiennić" tylko jedną nazwę z zdaniu. Logika relacji odrzuca to ograniczenie, dopuszczając funkcje zdaniowe o wielu zmiennych. W ten sposób zdania (1)–(3) możemy zinterpretować jako zdania oparte o tę samą relacyjną funkcję zdaniową:



Relacyjne funkcje zdaniowe mają zawsze więcej niż dwie luki. Aby odróżnić te różne luki od siebie oznacza się je tzw. zmiennymi indywiduowymi (oznaczanymi *x, y, z,* ewentualnie tymi zmiennymi z dodanymi indeksami), np.:

Samouczek logiki zdań i kwantyfikatorów (wersja 2007)

Uwagi proszę kierować na adres:
Katarzyna.Paprzycka@swps.edu.pl

x kocha *y*
x leży pomiędzy *y* i *z*
x_1 jest zazdrosny o y_1 bardziej niż x_2 jest zazdrosny o y_2

Zdania utworzone po zastąpieniu zmiennych nazwami w relacyjnych funkcjach zdaniowych są prostymi zdaniami zdającymi sprawę z zachodzenia pewnych relacji pomiędzy indywiduami.

Skonstruujmy teraz legendę symbolizacji.

Dziedzina: ludzie	*a*: Anna
b: Bogdan	*c*: Cezary
d: Danuta	*Kxy*: *x* kocha *y*

Możemy teraz zapisać zdanie (1) w języku logiki kwantyfikatorów zastępując zmienne odpowiednimi nazwami indywiduowymi:

[1] *Kca*

Zwróćmy od razu uwagę, że w wypadku relacji bardzo ważna jest kolejność zarówno nazw, jak i zmiennych indywiduowych występujących po stałej relacyjnej, w naszym wypadku po '*K*'. Kolejność ta odpowiada kolejności podmiotu i orzeczenia w zdaniu (1), np. Zdanie:

[4] *Kac*

reprezentuje zdanie:

(4) Anna kocha Cezarego.

Zdania (2) i (3) oddamy odpowiednio jako:

[2] *Kcd*
[3] *Kbd*

Zastanówmy się, jak oddamy zdanie

(5) Bogdan jest kochany przez Danutę

Najpierw zdanie to musimy sparafrazować, czyli przekształcić do standardowej formy. W tym przypadku uczynimy to bez większych trudów: „*x* jest kochany przez *y*" znaczy dokładnie tyle, co „*y* kocha *x*". Zdanie (5) jest więc równoważne zdaniu:

(5′) Danuta kocha Bogdana

a więc:

[5] *Kdb*

Ćwiczenie 23.I.

Dokonaj symbolizacji następujących zasłyszanych opinii o niektórych politykach polskich w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: ludzie	*a*: Alicja	*Wxy*: *x* jest wyższy niż *y*
	b: Beata	*Nxy*: *x* jest niższy niż *y*
	c: Czesław	
	d: Danuta	

(a) Alicja jest niższa niż Beata.

(b) Beata jest niższa niż Czesław.

(c) Danuta jest wyższa niż Czesław.

(d) Czesław jest niższy niż Danuta.

(e) Beata jest niższa niż Czesław, ale Danuta nie jest niższa niż Czesław.

(f) Alicja, Beata i Czesław są niżsi niż Danuta.

(g)	Jeżeli Alicja jest niższa niż Beata, a Beata – niż Danuta, to Alicja jest niższa niż Danuta.	
(h)	Albo Czesław jest niższy niż Danuta, albo Danuta jest niższa niż Czesław.	
(i)	Czesław nie jest ani wyższy niż Danuta, ani niższy niż Beata.	

23.1.2. Zdania skwantyfikowane: kolejność kwantyfikatorów

Rozważmy kolejno następujące zdania:

(1)	Ktoś kocha Danutę.	[1]	$\exists x\ Kxd$
(2)	Bogdan kocha kogoś.	[2]	$\exists x\ Kbx$
(3)	Ktoś kocha kogoś.	[3]	$\exists x\ \exists y\ Kxy$

Aby dokonać symbolizacji dwóch pierwszych zdań wystarczy jeden kwantyfikator, aby dokonać symbolizacji ostatniego trzeba użyć dwóch kwantyfikatorów. Ponieważ kolejność kwantyfikatorów zwykle jest istotna warto przyjrzeć się wszystkim możliwym kombinacjom kwantyfikatorów.

(i)	$\exists x\ \exists y\ Kxy$	Ktoś kocha kogoś.
(ii)	$\exists y\ \exists x\ Kxy$	Ktoś jest przez kogoś kochany.
(iii)	$\forall x\ \forall y\ Kxy$	Wszyscy kochają wszystkich.
(iv)	$\forall y\ \forall x\ Kxy$	Wszyscy są kochani przez wszystkich.
(v)	$\forall x\ \exists y\ Kxy$	Wszyscy kogoś kochają.
(vi)	$\exists y\ \forall x\ Kxy$	Ktoś jest kochany przez wszystkich.
(vii)	$\exists x\ \forall y\ Kxy$	Ktoś kocha wszystkich.
(viii)	$\forall y\ \exists x\ Kxy$	Wszyscy są kochani przez kogoś.

Pary zdań (i)–(ii) oraz (iii)–(iv) są sobie równoważne. Natomiast pozostałe zdania nie są równoważne i warto poświęcić im chwilę uwagi.

(v)	$\forall x\ \exists y\ Kxy$	Wszyscy kogoś kochają.
(vi)	$\exists y\ \forall x\ Kxy$	Ktoś jest kochany przez wszystkich.

Zdanie (v) jest prawie na pewno prawdziwe. Jeżeli przyjmiemy, że każdy kocha przynajmniej swoich rodziców lub opiekunów, to będzie prawdziwe. Warto jednak zwrócić uwagę, że w tym wypadku wszyscy mogą kochać kogoś zupełnie innego. Zdanie (vi) natomiast prawie na pewno prawdziwe nie jest – byłoby ono prawdziwe, gdyby istniała osoba, która jest kochana przez wszystkich – super-idol w rodzaju Marilyn Monroe, np. Zwróćmy też uwagę, że jeżeli istnieje ktoś, kto jest kochany przez wszystkich (vi), to prawdziwe musi być zdanie (v), tj. wszyscy kogoś kochają. Nie zachodzi jednak odwrotna relacja wynikania.

(vii)	$\exists x\ \forall y\ Kxy$	Ktoś kocha wszystkich.
(viii)	$\forall y\ \exists x\ Kxy$	Wszyscy są kochani przez kogoś.

Podobnie mają się rzeczy w przypadku pary twierdzeń (vii)–(viii). Ze zdania (viii) nie wynika zdanie (vii). Jeżeli przyjmiemy, że wszyscy są kochani przynajmniej przez rodziców lub opiekunów, to zdanie (viii) jest prawdziwe. Nie znaczy to jednak, że ktoś kocha wszystkich (taką osobą byłby Bóg np.). Ponownie jednak ze zdania (vii) wynika zdanie (viii) – jeżeli prawdą jest to, że ktoś kocha wszystkich, to prawdą jest także, że wszyscy są przez kogoś kochani.

Warto jeszcze wspomnieć o możliwości związania obu miejsc w funkcji zdaniowej tym samym kwantyfikatorem.

(ix)	$\exists x\ Kxx$	Ktoś kocha siebie samego.
(*x*)	$\forall x\ Kxx$	Wszyscy kochają siebie samych.

Ćwiczenie 23.II.

Niech dziedzina będzie skończona: {Ala, Beata, Cela, Danuta}. Relację „*x* kocha *y*" oznaczymy: '*x* ⟶ *y*'. Proszę uzupełnić diagramy następujących zdań.

Ala	Beata
Cela	Danuta

(v) Wszyscy kogoś kochają

Ala	Beata
Cela	Danuta

(vi) Ktoś jest kochany przez wszystkich

Ala	Beata
Cela	Danuta

(viii) Wszyscy są kochani przez kogoś

Ala	Beata
Cela	Danuta

(vii) Ktoś kocha wszystkich

Ala	Beata
Cela	Danuta

(i) Ktoś kocha kogoś

Ala	Beata
Cela	Danuta

(ii) Ktoś jest przez kogoś kochany.

Ala	Beata
Cela	Danuta

(iii) Wszyscy kochają wszystkich.

Ala	Beata
Cela	Danuta

(iv) Wszyscy są kochani przez wszystkich

Ćwiczenie 23.III.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: politycy	*a*: Andrzej Lepper	*Mxy*: *x* jest mądrzejszy niż *y*
	j: Jerzy Urban	*Pxy*: *x* jest popularniejszy niż *y*
	m: Jan Maria Rokita	*Zxy*: *x* zwodzi *y*

(a) Jan Maria Rokita jest popularniejszy niż Jerzy Urban.

(b) Jan Maria Rokita jest najpopularniejszym politykiem.

(c) Wszyscy są bardziej popularni niż Andrzej Lepper.

(d) Ktoś jest bardziej popularny niż wszyscy.

(e) Ktoś jest mądrzejszy od kogoś.

(f) Wszyscy są od kogoś mądrzejsi.

(g) Ktoś jest mądrzejszy niż wszyscy.

(h) Ktoś kogoś zwodzi.

(i) Ktoś jest przez kogoś zwodzony.

(j) Wszyscy są przez kogoś zwodzeni.

(k) Ktoś jest zwodzony przez wszystkich.

(l) Wszyscy kogoś zwodzą.

(m) Ktoś zwodzi wszystkich.

23.1.3. Zmienne nie są nazwami

Częstym błędem popełnianym przez uczących się logiki relacji jest *implicite* przyjmowane założenie, że zmienne coś nazywają. *De facto* zmienne niczego nie nazywają. Jedynym powodem, dla którego w wyrażeniu:

(1) $\forall x\ \exists y\ Kxy$

rozróżniamy zmienną ‘x’ od zmiennej ‘y’ jest to, żeby wiedzieć przez który kwantyfikator są one wiązane. Ale jakiej litery użyjemy na oznaczenie tych zmiennych zupełnie nie ma znaczenia, pod warunkiem, że te same luki funkcji zdaniowej są wiązane tymi samymi kwantyfikatorami występującymi w tej samej kolejności. Zdanie (1) moglibyśmy zapisać w następujący sposób:

$\forall\ \ \exists\ \ K\_\_\ \ \_\_$

ważne jest tylko to, aby odpowiednie kwantyfikatory występujące na odpowiednim miejscu wiązały te same luki w funkcji zdaniowej. Nie stosujemy zapisu ze strzałkami, gdyż jest mało ekonomiczny i w wypadku złożonych zdań byłby mało czytelny. Zastępujemy go zapisem ze zmiennymi – nie wolno jednak przywiązywać się do nazw zmiennych. Wszystkie następujące zapisy są zapisami tego samego zdania, które występuje w (1):

$\forall z\ \exists y\ Kzy$
$\forall z\ \exists x\ Kzx$
$\forall y\ \exists x\ Kyx$
$\forall y\ \exists z\ Kyz$
. . . .

Ćwiczenie 23.IV.

Uzupełnij alternatywne zapisy następujących zdań:

(a)

$\exists x\ \forall y\ Kxy$

$\exists\ \ \forall\ \ K\_\_\ \ \_\_$

$\exists y\ \forall x$
$\exists z\ \forall x$
$\exists x\ \forall z$
$\exists z\ \forall y$
$\exists y\ \forall z$

(b)

$\forall y\ \forall x\ Kxy$

$\forall\ \ \forall\ \ K\_\_\ \ \_\_$

Kyx
Kxz
$\forall x\ \forall z$
$\forall z\ \forall y$
Kzy

(c)

$\exists y\ \forall x\ Kxy$

$\exists\ \ \forall\ \ K\_\_\ \ \_\_$

$\exists x\ \forall y$
$\exists z\ \forall x$
Kzx
Kzy
$\exists z\ \forall y$

23.2. Zdania kategoryczne

Zdania kategoryczne w logice relacji oddajemy podobnie, jak w logice zdań, z tą różnicą, że często musimy dookreślić, o kim mówią kwantyfikatory. Przyjmiemy następującą legendę symbolizacji:

Dziedzina: ludzie
Kx: x jest kobietą — Mx: x jest mężczyzną
Pxy: x jest przyjazny wobec y-a — Wxy: x jest wrogi wobec y-a

Przykład 1

Rozważmy najpierw zdanie:

(1) Wszystkie kobiety są przyjazne wobec pewnego mężczyzny.

W zdaniu (1) występują dwa kwantyfikatory. Zaznaczmy je i od razu zaznaczmy jakie zmienne będą wiązać:

$\overset{\forall x}{\underline{\text{Wszystkie}}}$ kobiety są przyjazne wobec $\overset{\exists y}{\underline{\text{jakiegoś}}}$ mężczyzny.

Jest to zdanie kategoryczne typu A (typ zdania kategorycznego jest określony przez pierwszy kwantyfikator), możemy więc skorzystać z szablonu symbolizacji zdań kategorycznych typu A:

$\forall x$ ($Kx \to x$ jest przyjazny wobec $\overset{\exists y}{\underline{\text{jakiegoś}}}$ mężczyzny)

Pozostaje nam dokonać symbolizacji złożonej funkcji zdaniowej „x jest przyjazny wobec jakiegoś mężczyzny". Jasne jest, że funkcje zdaniowe również mogą być typu A, E, I oraz O. Funkcja zdaniowa „x jest przyjazny wobec jakiegoś mężczyzny" jest typu I – możemy ją sparafrazować tak:

istnieje taki y, że y jest mężczyzną i x jest przyjazny wobec y

czyli:

$\forall x$ ($Kx \to x$ jest przyjazna wobec $\underbrace{\text{pewnego mężczyzny}}_{\boxed{\exists y\, (My \wedge Pxy)}}$)

Ostatecznie zdanie (1) możemy wyrazić:

[1] $\forall x\, (Kx \to \exists y\, (My \bullet Pxy))$

lub – równoważnie:

[1′] $\forall x\, \exists y\, ((Kx \bullet My) \to Pxy)$

O tym, że zdania te są równoważne przekonamy się jednak dopiero, jak nauczymy się dowodzić w logice relacji.

Przykład 2

Rozważmy zdanie podobne do zdania (1), różniące się od niego kolejnością, w której występują kwantyfikatory:

(2) Istnieje pewien mężczyzna, wobec którego przyjazne są wszystkie kobiety.

W zdaniu (2) występują dwa kwantyfikatory. Zaznaczmy je i od razu zaznaczmy jakie zmienne będą wiązać:

$\overset{\exists x}{\text{Istnieje pewien}}$ mężczyzna, wobec którego przyjazne są $\overset{\forall y}{\text{wszystkie}}$ kobiety.

Jest to zdanie kategoryczne typu I:

$\exists x$ ($Mx \bullet$ $\overset{\forall y}{\text{wszystkie}}$ kobiety są przyjazne wobec x)

Pozostaje nam dokonać symbolizacji złożonej funkcji zdaniowej „wszystkie kobiety są przyjazne wobec x)", a więc:

$\forall y$
$\exists x$ (*Mx* • wszystkie kobiety są przyjazne wobec *x*)

$\boxed{\forall y\ (Ky \to Pyx)}$

Ostatecznie zdanie (2) możemy wyrazić:

[2] $\exists x\ (Mx \bullet \forall y\ (Ky \to Pyx))$

lub – równoważnie:

[2′] $\exists x\ \forall y\ (Mx \bullet (Ky \to Pyx))$

Warto zwrócić uwagę, że zdaniu [2′] *nie* jest równoważne zdanie:

$\exists x\ \forall y\ ((Mx \bullet Ky) \to Pyx)$

Przykład 3

W zdaniach (1) i (2) obydwa kwantyfikatory były zawężone – jeden przez predykat „*x* jest kobietą", a drugi przez predykat „*x* jest mężczyzną". Rozważmy teraz przypadek, w którym drugi kwantyfikator wiążący zmienną '*y*' przebiega całą dziedzinę.

(3) Wszystkie kobiety są przyjazne wobec wszystkich.

W zdaniu (3) występują dwa kwantyfikatory. Zaznaczmy je i od razu zaznaczmy jakie zmienne będą wiązać:

$\forall x$ $\forall y$
Wszystkie kobiety są przyjazne wobec wszystkich.

Zdanie (3) możemy wyrazić np. tak:

[3] $\forall x\ (Kx \to \forall y\ Pxy)$

lub – równoważnie:

[3′] $\forall x\ \forall y\ (Kx \to Pxy)$

Przykład 4, 5, 6

Analogicznie traktować będziemy zdania typu E, I oraz O:

(4) Żadna kobieta nie jest przyjazna wobec jakiegokolwiek mężczyzny.

czyli „Wszystkie kobiety są nieprzyjazne wobec wszystkich mężczyzn", co można wyrazić za pomocą następujących równoważnych zdań:

[4] $\forall x\ (Kx \to \forall y\ (My \to {\sim}Pxy))$
[4′] $\forall x\ \forall y\ ((Kx \bullet My) \to {\sim}Pxy)$

Zdanie typu I (gdzie '*Wxy*' zastępuje '*x* jest wrogi wobec *y*'):

(5) Pewna kobieta jest wroga wobec wszystkich mężczyzn.
[5] $\exists x\ (Kx \bullet \forall y\ (My \to Wxy))$
[5′] $\exists x\ \forall y\ (Kx \bullet (My \to Wxy))$

Zdanie typu O:

(6) Pewna kobieta nie jest wroga wobec żadnego mężczyzny.
[6] $\exists x\ (Kx \bullet \forall y\ (My \to {\sim}Wxy))$
[6′] $\exists x\ (Kx \bullet {\sim}\exists y\ (My \bullet Wxy))$

Ćwiczenie 23.V.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: ludzie

Kx: *x* jest **k**obietą	*Mx*: *x* jest **m**ężczyzną	*Hxy*: *x* koc**h**a się w *y*
Tx: *x* jest ma**t**ką	*Ox*: *x* jest **o**jcem	*Wxy*: *x* **w**ychowuje *y*

(a) Wszystkie kobiety w kimś się kochają

(b) Pewien mężczyzna kocha się we wszystkich.

(c) Niektórzy mężczyźni kochają się we wszystkich kobietach.

(d) Wszystkie kobiety kochają się w jakimś mężczyźnie.

(e) Wszyscy ojcowie kogoś wychowują.

(f) Niektórzy ojcowie wychowują wszystkich.

(g) Niektóre matki wychowują niektórych ojców.

(h) Każdy mężczyzna kocha się w sobie.

(i) Każdy mężczyzna jest wychowywany przez pewną kobietę.

(j) Pewna kobieta wychowuje każdego mężczyznę.

Ćwiczenie 23.VI.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: ludzie

a: Ala	*c*: Czesia	*e*: Ewa
b: Basia	*d*: Dorota	*Pxyz* – *x* znajduje się pomiędzy *y* a *z*

(a) Ala znajduje się pomiędzy Basią a Czesią

(b) Basia znajduje się pomiędzy Dorotą a Alą.

(c) Czesia znajduje się pomiędzy Alą a Ewą.

(d) Ktoś znajduje się pomiędzy Alą a Ewą.

(e) Ala znajduje się pomiędzy Basią i kimś jeszcze.

(f) Basia znajduje się pomiędzy kimś z jednej strony i kimś z drugiej.

(g) Dorota nie znajduje się pomiędzy Alą a Ewą.

(h) Nikt nie znajduje się pomiędzy Dorotą a Basią.

(i) Nikt nie znajduje się pomiędzy Basią a Alą.

(j) Dorota znajduje się pomiędzy nikim a Basią (jest na początku szeregu).

(k) Ewa znajduje się pomiędzy Czesią a nikim (jest na końcu szeregu).

(l) Ktoś znajduje się pomiędzy kimś z jednej strony a kimś z drugiej.