17. PODSTAWY SYMBOLIZACJI

W przeciwieństwie do logiki zdań, w której symbolizacja jest przedsięwzięciem raczej prostym, w logice kwantyfikatorów symbolizacja wymaga sporej wiedzy logicznej. Niekiedy aby dokonać symbolizacji w logice kwantyfikatorów trzeba się opierać na umiejętności dowodzenia. Zaczynamy jednak od podstaw, a mianowicie od pewnych podstawowych „chwytów". Pierwszym takim „chwytem" jest zrozumienie zależności między zanegowanymi zdaniami skwantyfikowanymi a skwantyfikowanymi negacjami. Drugim „chwytem" jest poznanie tzw. zdań kategorycznych, które stanowią trzon dla większości symbolizacji. Trzecim „chwytem" wreszcie jest zrozumienie negacji zdań kategorycznych.

17.1. Zdania skwantyfikowane i negacja

Okazuje się, że zaznaczone strzałkami pary zdań są sobie logicznie równoważne. Można zatem z powodzeniem używać ich do symbolizacji odpowiednich zdań:

$\sim\forall x\ Px$	$\sim\exists x\ Px$
Nieprawda, że dla każdego *x*, *x* jest pewne	Nieprawda, że istnieje takie *x*, że *x* jest pewne
Nie wszystko jest pewne	Nic nie jest pewne
$\forall x \sim Px$	$\exists x \sim Px$
Dla każdego *x*, *x* nie jest pewne	Istnieje takie *x*, że *x* nie jest pewne
Wszystko jest niepewne	Coś jest niepewne

Ćwiczenie 17.I.

Dokonaj symbolizacji każdego z następujących zdań w oparciu o podaną legendę. W pierwszej kolumnie staraj się podać jak najwierniejszą symbolizację, tj. jak najbardziej zbliżoną do struktury zdania w języku polskim. W drugiej kolumnie podaj zdanie logicznie równoważne zdaniu wpisanemu w kolumnie pierwszej.

Dziedzina: ludzie   *Gx: x* jest godny zaufania   *Ux – x jest uczciwy*

(a)	Nikt nie jest godzien zaufania.		
(b)	Nie wszyscy są godni zaufania.		
(c)	Wszyscy są niegodni zaufania.		
(d)	Ktoś jest niegodny zaufania		
(e)	Ktoś nie jest uczciwy		
(f)	Nikt nie jest uczciwy		
(g)	Wszyscy są nieuczciwi		
(h)	Nie ma nikogo, kto byłby uczciwy.		
(i)	Nie wszyscy są uczciwi		

Samouczek logiki zdań i kwantyfikatorów (wersja 2008)

Uwagi proszę kierować na adres:
Katarzyna.Paprzycka@swps.edu.pl

17.2. Zdania kategoryczne

W logice klasycznej (sylogistycznej), której twórcą jest Arystoteles, a którą z powodzeniem rozwijali logicy średniowieczni, wyróżniano cztery typy zdań:

(A)	Wszystkie *A* są *B*	(E)	Żadne *A* nie są *B*
(I)	Pewne *A* są *B*	(O)	Pewne *A* nie są *B*

Zdania typu (A) i (I) rozumiane były jako coś twierdzące – ich nazwy biorą się z kolejnych samogłosek w łacińskim wyrazie *affirmo*; zdania typu (E) i (O) rozumiane były jako coś negujące – ich nazwy biorą się z kolejnych samogłosek w łacińskim wyrazie *nego*.

Okazuje się, że choć osiągnięcia w szczególności logiki kwantyfikatorów znacznie przekroczyły osiągnięcia logiki klasycznej, to dostrzeżenie tych czterech typów zdań kategorycznych stanowiło rzeczywiste odkrycie bardzo podstawowych struktur składających się na nasze umysły. W szczególności umiejętność parafrazy zdań kategorycznych w języku logiki kwantyfikatorów stanowi ważną składową umiejętności dokonywania symbolizacji zdań języka naturalnego.

17.2.1. Zdanie typu I: Pewne A są B

Oto przykład zdań typu I:

(1) Pewni mężczyźni są przystojni.

Zdanie to można sparafrazować w następujący sposób:

{1} Istnieje takie *x*, że *x* jest **m**ężczyzną i *x* jest przysto**j**ny.

czyli

[1] $\exists x\ (Mx \bullet Jx)$

Dziedzina: ludzie
Mx: *x* jest mężczyzną
Jx: *x* jest przystojny

17.2.2. Zdanie typu O: Pewne A nie są B

W bardzo podobny sposób dokonuje się symbolizacji zdań typu O, np.:

(2) Pewni mężczyźni nie są przystojni.

Zdanie to można sparafrazować w następujący sposób:

{2} Istnieje takie *x*, że *x* jest **m**ężczyzną i nieprawda, że *x* jest przysto**j**ny.

czyli (korzystając z powyższej legendy):

[2] $\exists x\ (Mx \bullet {\sim}Jx)$

17.2.3. Zdanie typu A: Wszystkie A są B

Podczas gdy symbolizacja zdań typu I i typu O nie przysparza żadnych trudności, tak przy symbolizacji zdań typu A, trzeba uważać. Oto przykład zdania typu A:

(3) Wszystkie kobiety są piękne.

Naturalną pokusą jest próba oddania zdania (3) jako zdania:

~~$\forall x\ (Kx \bullet Px)$~~

Dziedzina: ludzie
Kx: *x* jest kobietą
Px: *x* jest piękny

Chwila refleksji pokazuje, że jest to błędna rekonstrukcja zdania (3). Odczytajmy je:

Dla każdego *x, x* jest kobietą i *x* jest piękny

czyli:

Wszyscy są pięknymi kobietami

a to przecież nie to samo, co zdanie (3). Zdanie (3) możemy sparafrazować w następujący sposób:

{3} Dla każdego *x,* jeżeli *x* jest **k**obietą, to *x* jest **p**iękny.

czyli:

[3] $\forall x\ (Kx \rightarrow Px)$

W ten sposób, tj. jako generalizacja pewnej implikacji, symbolizowane będzie każde zdanie typu A.

17.2.4. Zdanie typu E: Żadne A nie są B

Zdania typu E symbolizuje się w analogii do zdań typu A. Rozważmy następujący przykład zdania typu E:

(4) Żaden mężczyzna nie jest piękny.

Parafrazujemy:

{4} Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest **m**ężczyzną, to nieprawda, że *x* jest **p**iękny.

czyli:

[4] $\forall x\ (Mx \rightarrow {\sim}Px)$

17.2.5. Podsumowanie

Oto zestawienie czterech typów zdań kategorycznych:

(A)	Wszystkie A są B $\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$	(E)	Żadne A nie są B $\forall x\ (Ax \rightarrow {\sim}Bx)$
(I)	Pewne A są B $\exists x\ (Ax \bullet Bx)$	(O)	Pewne A nie są B $\exists x\ (Ax \bullet {\sim}Bx)$

Dlaczego zdania typu I nie są symbolizowane jako $(\exists x)\ (Ax \rightarrow Bx)$

Nie sposób nie zauważyć asymetrii w symbolizowaniu zdań kategorycznych typu A oraz typu I, które wydają się mieć podobną postać w języku naturalnym. Jest zupełnie jasne dlaczego nie można symbolizować zdania typu A (np. „Wszystkie algi są brunatne") w sposób analogiczny do tego, w jaki symbolizuje się zdania typu I, a więc jako „$\forall x\ (Ax \bullet Bx)$" – a to dlatego, że ostatni zapis odczytać musimy: „Wszystko jest brunatnymi algami", co jest zupełnie niezgodne ze znaczeniem zdania wyjściowego. Dlaczego jednak nie mielibyśmy przedstawić zdania „Pewne astry są białe" jako „$\exists x\ (Ax \rightarrow Bx)$"? Przeciw tej sugestii przemawia fakt, że implikacje zdania typu „Pewne A są B" są bliższe implikacjom zdania postaci „$\exists x\ (Ax \bullet Bx)$" niż implikacjom zdania postaci „$\exists x\ (Ax \rightarrow Bx)$".

Okazuje się, że zdanie postaci „$\exists x\ (Ax \bullet Bx)$" jest logicznie równoważne zdaniu postaci „${\sim}\forall x\ (Ax \rightarrow {\sim}Bx)$" (por. §17.5), co jest zgodne z naszymi intuicjami, gdyż istotnie intuicyjnie wyczuwamy, że zdanie „Nieprawda, że żaden aster nie jest biały" jest równoważne zdaniu „Pewne astry są białe".

Natomiast zdanie postaci „$\exists x\ (Ax \rightarrow Bx)$" jest logicznie równoważne zdaniu postaci „${\sim}\forall x\ (Ax \bullet {\sim}Bx)$". Gdyby więc zdanie „Pewne astry są białe" miało być oddane jako „$\exists x\ (Ax \rightarrow Bx)$", to musiałoby być równoważne zdaniu „Nieprawda, że wszystko jest niebiałym astrem". Jednak z tego prawdziwe jest zdanie „Nieprawda, że wszystko jest niebiałym astrem" wcale nie wynika, że pewne astry są białe. Podobnie przecież prawdziwe jest zdanie „Nieprawda, że wszystko jest niebłękitną antylopą", lecz nie wynika stąd, że pewne antylopy są błękitne.

Ćwiczenie 17.II.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: ludzie	Kx – x jest <u>k</u>obietą	Mx – x jest <u>m</u>ężczyzną
	Tx – x jest ma<u>t</u>ką	Ox – x jest <u>o</u>jcem

(a) Pewien mężczyzna jest ojcem.

(b) Niektórzy mężczyźni nie są ojcami.

(c) Niektóre kobiety są matkami.

(d) Niektóre kobiety nie są matkami.

(e) Wszystkie kobiety są matkami.

(f) Żaden mężczyzna nie jest matką.

(g) Wszyscy ojcowie są mężczyznami.

(h) Żadna kobieta nie jest mężczyzną.

(i) Żaden mężczyzna nie jest kobietą.

Ćwiczenie 17.III.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań konstruując odpowiednią legendę, przyjmując jednak za dziedzinę zbiór obywateli polskich, których obowiązuje Kodeks Pracy:

(a) Każdy ma prawo do swobodnie wybranej pracy. (Kodeks Pracy, **Art. 10.** § 1)

(b) Nikomu [...] nie można zabronić wykonywania zawodu. (Kodeks Pracy, **Art. 10.** § 1)

(c) [Każdy] pracownik ma prawo do godziwego wynagrodzenia za pracę. (Kodeks Pracy, **Art. 13.**)

(d) [Każdy] Pracodawca jest obowiązany ułatwiać pracownikom podnoszenie kwalifikacji zawodowych. (Kodeks Pracy, **Art. 17.**)

17.3. Zdanie typu „Tylko A są B”

Dziedzina: ludzie
Kx: x jest kobietą
Tx: x jest matką

Zastanówmy się jak wyrazić zdanie

(1) Tylko kobiety są matkami

Ponownie musimy się oprzeć pokusie oddania tego zdania jako:

[2] $\forall x\ (Kx \rightarrow Tx)$

gdyż jest to symbolizacja innego zdania, a mianowicie:

(2) Wszystkie kobiety są matkami.

Nasza pokusa jest dokładnie tą samą pokusą, którą mieliśmy w przypadku symbolizacji spójnika ‘tylko jeśli’ w logice zdań – i w ten sam sposób musimy sobie z nią radzić. Zdanie (1) możemy oddać albo jako:

[1] $\forall x\ (Tx \rightarrow Kx)$ Dla każdego x, jeżeli x jest matką, to [znaczy, że] x jest kobietą.

lub jako zdanie równoważne ze zdaniem [1]:

[1′] $\forall x\ (\sim Kx \rightarrow \sim Tx)$ Dla każdego x, jeżeli x nie jest kobietą, to x nie jest matką.

Ćwiczenie 17.IV.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę. Odczytaj dokonaną symbolizację. Które z tych zdań jest prawdziwe, a które fałszywe?

Dziedzina: osoby	Kx – x jest **k**obietą	Mx – x jest **m**ężczyzną	Sx – x nosi **s**pódnice
	Tx – x jest ma**t**ką	Ox – x jest **o**jcem	Rx – x nosi k**r**awat

(a)	Wszyscy mężczyźni są ojcami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(b)	Tylko mężczyźni są ojcami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(c)	Wszystkie kobiety są matkami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(d)	Tylko kobiety są matkami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(e)	Wszystkie matki są kobietami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(f)	Tylko matki są kobietami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(g)	Tylko mężczyźni noszą krawaty.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(h)	Tylko kobiety noszą spódnice.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(i)	Tylko kobiety nie noszą krawatów.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(j)	Tylko mężczyźni nie noszą spódnic.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(k)	Tylko osoby noszące spódnice są kobietami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(l)	Tylko osoby noszące krawaty są mężczyznami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(m)	Tylko osoby noszące spódnice nie noszą krawatów.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(n)	Tylko osoby nie będące matkami są ojcami.		❑prawdziwe ❑fałszywe
(o)	Tylko osoby noszące nie noszące spódnic są ojcami.		❑prawdziwe ❑fałszywe

17.4. Dziedzina kwantyfikatora

W logice kwantyfikatorów bardzo ważny jest wybór dziedziny, którą przebiegają kwantyfikatory. W zależności od jej wyboru te same zdania będą mogły być symbolizowane w inny sposób, a zbyt wąski dobór dziedziny może też sprawić, że symbolizacji pewnych zdań w ogóle nie będzie można dokonać.

Przyjmijmy następującą legendę:

Dx: *x* jest lekarzem
Px: *x* jest Polakiem
Gx: *x* jest dobry

Rozważać będziemy trzy zbiory jako dziedziny: D_1 to zbiór polskich lekarzy, D_2 to zbiór lekarzy, a D_3 to zbiór wszystkiego. Przyjmijmy najpierw, że dziedziną są polscy lekarze, oraz mamy dokonać symbolizacji zdania:

(1) Wszyscy polscy lekarze są dobrzy.

Jeżeli dziedziną jest zbiór polskich lekarzy, to symbolizacja jest nadzwyczaj prosta:

$[1]_{D_1}$ $\forall x\ Gx$

Jeżeli dziedziną będzie zbiór lekarzy, to musimy stosowne zawężenie ująć w zdaniu – stosując odpowiedni podmiot:

$[1]_{D_2}$ $\forall x\ (Px \rightarrow Gx)$

I podobnej strategii użyjemy jeżeli dziedzina będzie nieograniczona:

$[1]_{D_3}$ $\forall x\ ((Px \bullet Dx) \rightarrow Gx)$

Związek między doborem dziedziny a rozbudowaniem podmiotu zdania podsumowuje pierwszy rząd następującej tabelki:

Dziedzina / Zdanie:	D_3: wszystko	D_2: lekarze	D_3: polscy lekarze
Wszyscy polscy lekarze są dobrzy	$\forall x\ ((Px \bullet Dx) \rightarrow Gx)$	$\forall x\ (Px \rightarrow Gx)$	$\forall x\ Gx$
Wszyscy lekarze są dobrzy	$\forall x\ (Dx \rightarrow Gx)$	$\forall x\ Gx$	———
Wszystko jest dobre.	$\forall x\ Gx$	———	———

Warto też zwrócić uwagę, że zbyt wąski dobór dziedziny może uniemożliwić wyrażenie zdania. Jeżeli chcemy powiedzieć:

(2) Wszyscy lekarze są dobrzy.

to musimy obrać za dziedzinę zbiór, który będzie zawierał wszystkich lekarzy (np. D_2 lub D_3 w naszym przykładzie). Jeżeli obierzemy zbiór zbyt wąski, np. D_1 – zbiór polskich lekarzy – to zdanie kształtu:

$[3]_{D_1}$ $\forall x\ Gx$

będzie symbolizacją zdania (1) – wszyscy polscy lekarze są dobrze. Będzie się tak działo dlatego, że generalizator przebiega tylko dziedzinę polskich lekarzy. Nawet wprowadzenie ograniczenia w podmiocie:

$[4]_{D_1}$ $\forall x\ (Dx \rightarrow Gx)$

nic nie zmieni. Zdanie to nadal będzie symbolizacją zdania (1) – wszyscy polscy lekarze są dobrze. Będzie się tak działo dlatego, że generalizator przebiega tylko dziedzinę polskich lekarzy. Zdanie to odczytane być musiałoby: Dla każdego *x* (gdzie *x* jest polskim lekarzem), jeżeli *x* jest lekarzem, to *x* jest dobry.

Ćwiczenie 17.V.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę – uwzględniając podaną dziedzinę. Zwróć uwagę, czy zdanie w ogóle można dokonać symbolizacji tego zdania w odniesieniu do tej dziedziny:

Ox: *x* jest osobą/człowiekiem	*Mx*: *x* jest płci męskiej	*Px: x* jest piękny
Kx: *x* jest płci żeńskiej	*Sx*: *x* jest ssakiem	*Lx: x* lubi logikę

	Dziedzina:	wszystko	ludzie	kobiety
(a)	Wszystko jest piękne.			
(b)	Wszyscy są piękni.			
(c)	Wszystkie są piękne.			
(d)	Nikt nie lubi logiki.			
(e)	Żadna kobieta nie lubi logiki			
(f)	Niektóre kobiety lubią logikę			
(g)	Istnieją amatorzy logiki.			
(h)	Tylko ludzie lubią logikę.			
(i)	Nie tylko kobiety lubią logikę.			
(j)	Pewien mężczyzna jest piękny.			

17.5. Zdania kategoryczne i negacja

Każde zdanie kategoryczne, wyrażone za pomocą zdania skwantyfikowanego, można również wyrazić za pomocą równoważnej negacji pewnego zdania skwantyfikowanego. Aby stało się to jaśniejsze przeczytajcie następujące zdania – przyjmując je za zdania prawdziwe – i odpowiedzcie na towarzyszące pytania:

> Niektóre kobiety nie są cierpliwe. Czy wszystkie kobiety są cierpliwe?
> Niektóre kobiety lubią pochlebstwa. Czy prawdą jest, że żadna kobieta nie lubi pochlebstw?
> Żaden mężczyzna nie jest cierpliwy. Czy jest mężczyzna, który byłby cierpliwy?
> Wszyscy mężczyźni lubią pochlebstwa. Czy jest mężczyzna, który nie lubiłby pochlebstw?

Na wszystkie z tych pytań powinniście byli odpowiedzieć przecząco – jeżeli tak nie uczyniliście, to przeczytajcie zdania jeszcze raz.

Aby równoważności te stały się klarowniejsze, zastanówmy się kolejno nad negacjami zdań kategorycznych – wpiszcie brakujące zdanie po polsku:

	Nie wszystkie aligatory są brązowe			
~A	$\sim\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$	::	$\exists x\,(Ax \bullet \sim Bx)$	*O*
	Nieprawda, że żadna ara nie jest błękitna.			
~E	$\sim\forall x\,(Ax \rightarrow \sim Bx)$	::	$\exists x\,(Ax \bullet Bx)$	*I*
	Nie ma albatrosa, który jest brudnoszary.			
~I	$\sim\exists x\,(Ax \bullet Bx)$	::	$\forall x\,(Ax \rightarrow \sim Bx)$	*E*
	Nie ma albinosa, który nie jest biały.			
~O	$\sim\exists x\,(Ax \bullet \sim Bx)$	::	$\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$	*A*

Ćwiczenie 17.VIa.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę. Podaj dwie równoważne symbolizacje jako zdań skwantyfikowanych oraz jako negacji zdań skwantyfikowanych:

Dziedzina: zwierzęta	Bx: x biega	Fx: x ma futro	Lx: x lata
	Px: x jest ptakiem	Rx: x ma pierze	Sx: x jest ssakiem

(a) Nie wszystkie ptaki latają.

(b) Żaden ptak nie ma futra.

(c) Nie ma ptaków nie posiadających pierza.

(d) Nie jest prawdą, że żaden ptak nie biega.

(e) Tylko ptaki mają pierze.

(f) Żaden ssak nie ma pierza.

(g) Nie tylko ssaki biegają.

(h) Nie wszystkie ssaki latają.

(i) Nieprawda, że żaden ssak nie lata.

(j) Nieprawda, że nie ma ssaków nie mających futer.

Ćwiczenie 17.VIb.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę. Podaj dwie równoważne symbolizacje jako zdań skwantyfikowanych oraz jako negacji zdań skwantyfikowanych:

Dziedzina: ludzie	*Bx*: *x* bierze	*Px*: *x* jest politykiem	*Gx*: *x* gada głupstwa
	Kx: *x* kłamie	*Ox*: *x* jest oportunistą	*Sx*: *x* jest szczery

(a) Nie ma polityków, którzy nie biorą.
(b) Nie wszyscy politycy są oportunistami.
(c) Nie ma szczerych polityków.
(d) Nie jest prawdą, że żaden polityk nie kłamie.
(e) Nie każdy polityk bierze.
(f) Nie tylko politycy biorą.
(g) Nie ma polityka, który nie jest oportunistą.
(h) Nie tylko politycy gadają głupstwa.
(i) Nie ma polityka, który głupstw nie gada.
(j) Nieprawda, że nie ma polityka, który kłamie.

Ćwiczenie 17.VIc.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę. Podaj dwie równoważne symbolizacje jako zdań skwantyfikowanych oraz jako negacji zdań skwantyfikowanych:

Dziedzina: ludzie	*Sx*: *x* jest studentem	*Px*: *x* jest psychologiem	*Lx*: *x* zda logikę
		Mx: *x* jest matematykiem	*Sx*: *x* zda socjologię

(a) Nie każdy student zda logikę.
(b) Nieprawda, że żaden student nie zda logiki.
(c) Nie ma studentów, którzy nie zdadzą socjologii.
(d) Nie ma studentów, którzy zdadzą logikę.
(e) Nie tylko matematycy zdadzą logikę.
(f) Nie tylko psychologowie nie zdadzą socjologii.
(g) Nie ma matematyków, którzy nie zdadzą logiki
(h) Nie ma psychologów, którzy zdadzą socjologię.
(i) Nieprawda, że żaden psycholog nie zda socjologii.
(j) Nie wszyscy matematycy zdadzą socjologię.

17.6. Zdania kategoryczne o złożonym podmiocie i o złożonym orzeczeniu

Przyjmijmy następującą legendę:

Dziedzina: ludzie
Lx: x zda egzamin z logiki
Kx: x jest kobietą
Ox: x odpocznie po sesji
Sx: x studiuje
Zx: x jest zmęczony

Spróbujmy oddać następujące zdanie:

(2) Wszystkie studentki zdadzą egzamin z logiki.

Zadanie jest proste – zdanie to ma kształt:

{2} Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest studentką, to *x* zda egzamin z logiki.

Jedyna komplikacja polega na tym, że nie mamy w legendzie osobnego skrótu dla funkcji zdaniowej '*x* jest studentką'. W takich sytuacjach warto się zastanowić, czy taka funkcja zdaniowa nie jest złożoną funkcją zdaniową i czy nie moglibyśmy jej oddać za pomocą funkcji zdaniowych danych już w legendzie. W naszej sytuacji jest tak istotnie '*x* jest studentką' znaczy tyle, co '*x* studiuje i *x* jest kobietą'. Możemy więc rozpisać {2}:

{2} Dla każdego *x*, jeżeli *x* studiuje i *x* jest kobietą, to *x* zda egzamin z logiki.

czyli:

[2] $\forall x\ ((Sx \bullet Kx) \to Lx)$

(Warto zwrócić uwagę na konieczność wprowadzenia nawiasów!)

W ten sam sposób będziemy postępować zawsze zarówno ze złożonymi podmiotami, jak i ze złożonymi orzeczeniami zdań. Najpierw decydujemy, jaką formę zdania kategorycznego dane zdanie przybiera, czy jest to zdanie typu A, E, I czy O i odpowiednio je parafrazujemy, a potem po kolei zastanawiamy się, jak oddać złożony podmiot czy orzeczenie. Rozważmy parę przykładów.

(3) Każdy zmęczony student odpocznie po sesji.

Jest to zdanie typu A o złożonym podmiocie:

[3] $\forall x\ ((Sx \bullet Zx) \to Ox)$

Warto wyrobić sobie nawyk odczytywania zapisu symbolicznego w celu sprawdzenia, czy ujęta została treść zdania w języku naturalnym (3):

{3} Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest studentem i *x* jest zmęczony, to *x* odpocznie po sesji.

W Temacie 21 omawiać będziemy bardziej złożone symbolizacje, gdzie niejednokrotnie odczytywanie zapisanego zdania uchroni nas przed popełnianiem błędów.

Zastanówmy się jak oddalibyśmy zdanie:

(4) Każdy zmęczony student odpocznie po sesji, o ile zda egzamin z logiki.

Jest to też zdanie typu A o złożonym podmiocie – mowa jest o zmęczonych studentach – oraz o złożonym orzeczeniu – mowa jest o tym, że studenci ci „odpoczną, o ile zdadzą egzamin z logiki". Podejdźmy do symbolizacji w kolejnych krokach:

$\forall x\ ((Sx \bullet Zx) \to \qquad\qquad)$

W ten sposób oddajemy intuicję, że w zdaniu (4) mowa jest o zmęczonych studentach. Teraz musimy oddać to, co o tych studentach się mówi: '*x* odpocznie, o ile *x* zda egzamin z logiki' znaczy tyle, co: 'jeżeli *x* zda egzamin z logiki, to *x* odpocznie', a więc:

$\forall x\ ((Sx \bullet Zx) \to \boxed{Lx \to Ox}\ )$

Po ujęciu w nawiasy złożonej funkcji zdaniowej reprezentującej orzeczenie, mamy:

[4] $\forall x\ ((Sx \bullet Zx) \to (Lx \to Ox))$

{4} Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest studentem i *x* jest zmęczony, to jeśli *x* zda egzamin z logiki, to *x* odpocznie po sesji.

Ćwiczenie 17.VIIa.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: ludzie	*Dx*: *x* dba o dobro studentów	*Lx*: *x* wykłada logikę	*Px*: *x* wykłada prawo
	Sx: *x* postradał zmysły	*Wx*: *x* jest wymagający	*Zx*: *x* jest złośliwy

(a) Osoby, które postradały zmysły, wykładają logikę lub prawo.

(b) Wszyscy wymagający wykładowcy logiki postradali zmysły.

(c) Wszyscy wykładowcy logiki są wymagający i złośliwi.

(d) Żaden wymagający wykładowca prawa nie postradał zmysłów.

(e) Nie ma niezłośliwych wykładowców prawa, który dbaliby o dobro studentów.

(f) Żaden wykładowca prawa, który postradał zmysły, nie jest złośliwy.

(g) Tylko wykładowcy logiki są złośliwi i wymagający.

(h) Niektórzy wykładowcy logiki dbają o dobro studentów, mimo że są złośliwi lub wymagający.

(i) Nikt kto albo postradał zmysły albo dba o dobro studentów, nie wykłada prawa.

(j) Tylko wykładowcy logiki lub prawa dbają o dobro studentów.

Ćwiczenie 17.VIIb.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: zwierzęta	*Gx*: *x* jest grzeczny	*Ox:* *x* jest prowokowany	*Sx*: *x* jest samotnikiem
Ax: *x* jest agresywny	*Kx*: *x* jest kotem	*Px*: *x* jest psem	*Tx:* *x* jest trenowany
Dx: *x* jest dobrze ułożony	*Mx*: *x* jest mądry	*Rx*: *x* jest przyjacielski	*Wx*: *x* jest wszędobylski

(a)	Wszystkie przyjacielskie koty są grzeczne.	
(b)	Wszystkie psy są przyjacielskie o ile są dobrze ułożone.	
(c)	Żaden dobrze ułożony kot nie jest samotnikiem.	
(d)	Żaden pies, który jest samotnikiem, nie jest agresywny.	
(e)	Pewien wszędobylski, choć dobrze ułożony, pies jest mądry i przyjacielski.	
(f)	Żaden mądry kot nie jest agresywny.	
(g)	Żaden mądry kot nie jest ani wszędobylski ani grzeczny.	
(h)	Wszystkie psy, które są mądre, są grzeczne jeśli są dobrze ułożone.	
(i)	Niektóre dobrze ułożone koty są mądre jeśli są grzeczne.	
(j)	Niektóre mądre i dobrze ułożone psy są wszędobylskie.	
(k)	Nie wszystkie dobrze ułożone i grzeczne koty są samotnikami.	
(l)	Nie ma mądrych, dobrze ułożonych psów, które byłyby niegrzeczne.	
(m)	Każdy mądry lub grzeczny pies jest przyjacielski o ile ani nie jest samotnikiem ani nie jest wszędobylski.	
(n)	Wszystkie mądre psy, które nie są agresywne gdy są prowokowane, były tresowane i są dobrze ułożone.	
(o)	Żaden tresowany kot, który jest agresywny gdy jest prowokowany, nie jest dobrze ułożony.	

Ćwiczenie 17.VIIc.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: ludzie

Bx: *x* bierze łapówki
Gx: *x* gada głupstwa
Kx: *x* kłamie
Lx: *x* jest z lewicy
Ox: *x* jest oportunistą
Px: *x* jest politykiem
Sx: *x* jest szczery
Rx: *x* jest z prawicy

(a) Wszyscy szczerzy politycy są z lewicy.

(b) Tylko prawicowi politycy są szczerzy.

(c) Wszyscy prawicowi politycy biorą łapówki, gadają głupstwa lub kłamią.

(d) Nie ma polityka na lewicy, który by nie kłamał.

(e) Tylko lewicowi politycy nie są oportunistami.

(f) Żaden prawicowy polityk nie jest oportunistą.

(g) Pewien prawicowy polityk gadający głupstwa kłamie i bierze łapówki.

(h) Nie ma wśród oportunistów polityków prawicowych.

(i) Nie wszyscy lewicowi politycy biorą łapówki.

(j) Nie wszyscy prawicowi politycy gadają głupstwa.

(k) Tylko prawicowi politycy gadają głupstwa.

(l) Nie tylko prawicowi politycy są nieszczerymi oportunistami.

17.7. Zdanie zewnętrznie złożone ze zdań wewnętrznie złożonych

Pamiętajmy, że zdania ogólne można łączyć w zdania złożone za pomocą spójników zdaniowych (są to tzw. zdania zewnętrznie złożone por. Temat 16). W logice predykatów (choć już nie w logice relacji) bardzo dobrym wskaźnikiem tego, że mamy do czynienia ze zdaniami zewnętrznie złożonymi jest wystąpienie dwóch wyrażeń kwantyfikujących w jednym zdaniu (choć istnieją pewne wyjątki, por. Przykłady 2 i 3). Zacznijmy od prostszych przykładów.

Przykład 1

(1) Wszystkie koty są, ale żadne psy nie są, samotnikami.

Aby dokonać symbolizacji tego zdania trzeba najpierw sparafrazować je tak aby wyraźna była jego struktura logiczna – jest to koniunkcja:

Wszystkie koty są samotnikami, ale żadne psy nie są samotnikami.

Korzystając z legendy z ćwiczenia 17.VIIb zdanie to można oddać w następujący sposób:

[1] $\forall x\ (Kx \rightarrow Sx) \bullet \forall x\ (Px \rightarrow \sim Sx)$

Przykład 2

(2) Wszystkie koty, ale tylko niektóre psy są, samotnikami.

Ponownie sparafrazujmy to zdanie, tak aby wyraźnie przybrało postać koniunkcji.

(2′) Wszystkie koty są samotnikami, ale tylko niektóre psy są samotnikami.

Zastanówmy się co kryje się za stwierdzeniem ‘tylko niektóre psy’. Moglibyśmy przypuszczać, że ‘tylko’ nie pełni w tym kontekście żadnej roli logicznej (mieliśmy już z takim raczej ozdobniczym wystąpieniem ‘tylko’ do czynienia np. w zdaniu „Krzysztof jest nie *tylko* wybitnym naukowcem, ale też wspaniałą osobą”). Byłoby to jednak błędnym odczytaniem zdania, bowiem zdanie:

Wszystkie koty są samotnikami, a niektóre psy są samotnikami.

Dopuszcza jako możliwość, że wszystkie psy są samotnikami, a zdanie (1′) właśnie dzięki dodaniu ‘tylko’ tę możliwość wyklucza. Powinniśmy więc sparafrazować

(2″) Wszystkie koty są samotnikami, ale niektóre psy są samotnikami mimo że nie wszystkie psy są samotnikami.

Mamy więc:

[2] $\forall x\ (Kx \rightarrow Sx) \bullet [\exists x\ (Px \bullet Sx) \bullet \sim\forall x\ (Px \rightarrow Sx)]$

Przykład 3

Rozważmy zdanie następujące (dziedzina: liczby; *Px*: *x* jest parzysta; *Nx*: *x* jest nieparzysta; *Jx*: *x* jest podzielna przez 1):

(3) Wszystkie parzyste i nieparzyste liczby są podzielne przez liczbę 1.

Wszystko wydaje się wskazywać na to, że zdanie to należałoby oddać w następujący sposób:

[4] $\forall x\ ((Px \bullet Nx) \rightarrow Jx)$

Odczytajmy jednak tę symbolizację w języku polsko-logicznym (odczytajcie ją głośno!):

{4} Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest liczbą parzystą i *x* jest liczbą nieparzystą, to *x* jest podzielne przez 1.

Czy widzicie na czym polega problem? Oczywiście na tym, że żadna liczba nie może być zarówno parzysta, jak i nieparzysta! Zdanie [4] jest symbolizacją zupełnie innego zdania niż zdanie (3), a mianowicie:

(4) Wszystkie liczby parzyste, które są nieparzyste, są podzielne przez liczbę 1.

Aby więc oddać zdanie (3) musimy to zrobić inaczej – tak oto:

{3} Dla każdego x, jeżeli x jest liczbą parzystą *lub* x jest liczbą nieparzystą, to x jest podzielne przez 1.

[3] $\forall x\ ((Px \vee Nx) \to Jx)$

Można się zastanawiać, skąd się bierze taka dwuznaczność. Otóż akurat w tym wypadku ma one swe źródło w tym, że logicznie równoważne są następujące schematy zdaniowe ($\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ to zmienne predykatowe, pod które podstawić wolno nam dowolny predykat):

$$\forall x\ ((\mathbb{P}x \vee \mathbb{Q}x) \to \mathbb{R}x)$$

$$\forall x\ (\mathbb{P}x \to \mathbb{R}x) \bullet \forall x\ (\mathbb{Q}x \to \mathbb{R}x)$$

Przekładając to na nasz przykład, logicznie równoważne są zdania:

(3) Wszystkie parzyste i nieparzyste liczby są podzielne przez liczbę 1.

[3] $\forall x\ ((Px \vee Nx) \to Jx)$

(5) Wszystkie liczby parzyste są podzielne przez liczbę 1 i wszystkie liczby nieparzyste są podzielne przez liczbę 1.

[5] $\forall x\ (Px \to Jx) \bullet \forall x\ (Nx \to Jx)$

Wypowiedź (5) w języku naturalnym zostaje jednak zbita najpierw do oszczędniejszej formy (gdzie niepowtarzany jest człon ‘są podzielne przez liczbę 1’): „Wszystkie liczby parzyste i wszystkie liczby nieparzyste są podzielne przez liczbę 1”, a następnie do formy jeszcze bardziej ekonomicznej, tak ekonomicznej, że aż dwuznacznej a mianowicie „Wszystkie liczby parzyste i nieparzyste są podzielne przez liczbę 1” (gdzie niepowtarzany jest człon ‘wszystkie liczby’ zawierający kluczowy logicznie funktor, a mianowicie kwantyfikator).

Przykład ten powinien nauczyć przede wszystkim pewnej pokory wobec symbolizacji w języku logiki predykatów. Aby zobaczyć, jak bardzo możemy być zwiedzeni na manowce wystarczy porównać strukturę powierzchniową powyższego zdania (3) oraz innego – podobnego – zdania:

(3) Wszystkie parzyste i nieparzyste liczby są podzielne przez liczbę 1.

(6) Wszystkie mądre i grzeczne koty są przyjacielskie.

Otóż zdanie (6) pewnie oddalibyśmy jako zdanie o strukturze (dziedzina: koty; Gx: x jest grzeczny, Mx: x jest mądry i Px: x jest przyjacielski):

[6] $\forall x\ ((Mx \bullet Gx) \to Px)$

{6} Dla każdego kota x, jeżeli x jest mądry i x jest grzeczny, to x jest przyjacielski.

Nic w strukturze powierzchniowej tych zdań nie wydaje się przesądzać o tym, że ich struktura logiczna jest tak odmienna. Przykład ten uzmysławia jednak, że warto przy symbolizacjach w logice predykatów konieczne jest przestrzeganie następującej reguły:

Porada babuni o symbolizacjach w logice predykatów:

Zawsze głośno odczytaj dokonaną symbolizację w języku polsko-logicznym.

Przykład 4

Rozważmy podobne „zbicie”, lecz tym razem partykularyzacji:

(7) Niektóre koty i psy są agresywne.

Nauczeni doświadczeniem pewnie powstrzymamy się przed symbolizacją (7) jako (dziedzina: zwierzęta; *Kx*: *x* jest kotem; *Px*: *x* jest psem, *Ax*: *x* jest agresywne):

[8] $\exists x\ ((Kx \bullet Px) \bullet Ax)$
{8} Istnieje takie zwierzę *x*, które jest zarówno kotem jak i psem, oraz jest agresywne.
(8) Pewien kot, który jest psem, jest agresywny.

Możemy jednak próbować pokusić się o analogiczną strategię zamiany koniunkcji na alternatywę i uzyskać:

[9] $\exists x\ ((Kx \vee Px) \bullet Ax)$

Niestety ta strategia też nie da nam tego, co o chodzi. Odczytajmy:

{9} Istnieje pewne zwierzę *x*, które jest albo kotem albo psem, oraz *x* jest agresywne.
(9) Pewne zwierzę – kot bądź pies – jest agresywne.

Otóż to zdanie [9] jest za słabe. Mogłoby ono być prawdziwe nawet gdyby zdanie (7) nie było prawdziwe. Zdanie (7) będzie prawdziwe gdy istnieje przynajmniej jeden agresywny kot *oraz* przynajmniej jeden agresywny pies. Natomiast zdanie [9] wymaga tylko aby istniało przynajmniej jedno zwierzę – albo pies albo kot – które jest agresywne. Można to ująć jeszcze wyraźniej wyobrażając sobie świat, w którym żaden kot nie jest agresywny, ale przynajmniej jeden pies jest agresywny. Otóż w takim świecie zdanie (7) będzie fałszywe, natomiast zdanie (9) prawdziwe. To świadczy o tym, że [9] nie jest poprawną symbolizacją zdania (7).

Analiza ta pozwoliła nam jednak dociec tego, że aby dokonać symbolizacji (7) musimy je najpierw sparafrazować jako koniunkcję dwóch partykularyzacji:

(7′) Niektóre koty są agresywne i niektóre psy są agresywne.

W ten sposób poprawna symbolizacja tego zdania staje się prosta:

[7] $\exists x\ (Kx \bullet Ax) \bullet \exists x\ (Px \bullet Ax)$

Ćwiczenie 17.VIII.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: zwierzęta
Ax: x jest agresywny
Gx: x jest antylopą gnu
Hx: x jest hipopotamem
Ix: x jest antylopą impala
Lx: x jest lwem
Mx: *x* jest mądry
Ox: x jest odważne
Px: x jest płochliwe
Zx: x jest zebrą
Wx: x jest prowokowane

(a)	Wszystkie hipopotamy i lwy są agresywne.	
(b)	Wszystkie lwy i hipopotamy są odważne lub mądre.	
(c)	Niektóre zebry i gnu są agresywne, gdy są prowokowane.	
(d)	Wszystkie lwy i niektóre hipopotamy są mądre.	
(e)	Niektóre antylopu gnu i impala są odważne.	
(f)	Żadne lwy i hipopotamy nie są płochliwe.	
(g)	Wszystkie zebry, gnu i impala są płochliwe.	
(h)	Niektóre hipopotamy i lwy nie są agresywne.	
(i)	Niektóre zebry i gnu nie są ani agresywne ani płochliwe.	
(j)	Żadne antylopy gnu i impala nie są ani odważne ani mądre.	

17.8. Dodatkowe utrudnienia

Chwyty, których się nauczyliście pozwalają już na pewną swobodę w symbolizowaniu, lecz droga do opanowania tej sztuki jeszcze daleka. Dużą pomocą będzie opanowanie metod dowodzenia w logice predykatów, gdyż umiejętność ta pozwoli na sprawdzanie logicznej równoważności możliwych symbolizacji. Na razie zasygnalizujemy jeszcze jeden kłopotliwy przykład.

Przykład 1

Drugi trudniejszy przykład ma przede wszystkim uczulić na fakt, że symbolizacji w logice predykatów nie wolno traktować automatycznie. Dlatego następujące zdanie tak właśnie potraktujemy – stosując łopatologicznie metody dotąd sugerowane – i zobaczymy, jak łatwo mogą zwieść na manowce:

(5) Żaden psycholog nie wierzy w superego, chyba że jest psychoanalitykiem.

Można o tym przykładzie pomyśleć tak oto:

Jest to zdanie typu E, a zatem będzie miało strukturę:

$$\forall x\,(\qquad\qquad\qquad \rightarrow \sim \qquad\qquad\qquad)$$

Podmiot łatwo identyfikujemy jako psychologów.

$$\forall x\,(Px \rightarrow \sim \qquad\qquad\qquad)$$

Orzeczeniem jest ‘nie wierzy w superego, chyba że jest psychoanalitykiem’. Skoro jednak negacja jest już częścią struktury logicznej zdania typu E, więc orzeczeniem, które musimy uzupełnić jest ‘wierzy w superego, chyba że jest psychoanalitykiem’. Najprościej oddamy ‘*x* wierzy w superego, chyba że *x* jest psychoanalitykiem’ jako alternatywę:

[6] $\forall x\,(Px \rightarrow \sim \boxed{(Sx \lor Ax)}\,)$

W rezultacie otrzymamy jednak zupełnie inne zdanie niż zdanie wyjściowe:

{6} Dla każdego x, jeżeli x psychologiem, to x nie jest ani psychoanalitykiem ani nie wierzy w superego.

Innymi słowy, zdanie które oddaliśmy to zdanie:

(6) Żaden psycholog nie jest ani psychoanalitykiem ani nie wierzy w superego.

Problemem jest tu założenie wyjściowe, a mianowicie, że każde zdanie typu E ma strukturę podobną do struktury zdań typu E o prostych podmiotach i orzeczeniach. Każde zdanie typu E można przedstawić za pomocą generalizacji, gdzie negacja występuje w następniku, ale nie zawsze głównym spójnikiem następnika będzie negacja.

Rozpocznijmy jeszcze raz. Przypomnijmy sobie zdanie, którego symbolizację chcemy przedstawić, by mieć je przed oczyma:

(5) Żaden psycholog nie wierzy w superego, chyba że jest psychoanalitykiem.

Pierwsze nasze kroki były poprawne. Jest to zdanie typu E, więc powinniśmy zacząć od generalizatora, w którego zasięgu będzie implikacja. Możemy też dość łatwo zidentyfikować poprzednik tej implikacji:

$$\forall x\,(Px \rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad)$$

Możemy też oczekiwać, że negacja będzie jakoś związana z orzeczeniem, ale – na tym polegał nasz błąd – wcale nie musi być głównym spójnikiem orzeczenia i w tym wypadku właśnie nie jest. Aby sobie pomóc spróbujmy to zdanie ująć w języku polsko-logicznym:

{5} Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest psychologiem, to *x* nie wierzy w superego, chyba że *x* jest psychoanalitykiem.

Zdanie {5} oddaje już znaczenie zdania (5). Powiedzieć, że żaden psycholog nie wierzy w superego chyba że to psychoanalityk, to to samo, co powiedzieć, że jakiekolwiek psychologa weźmiemy pod uwagę, to nie będzie on wierzył w superego, chyba że akurat będzie psychoanalitykiem. To właśnie mówi zdanie {5}. Jeżeli tak, to łatwo zobaczymy, jaki powinien być następnik w naszej symbolizacji. W następniku musi się znaleźć funkcja zdaniowa '*x* nie wierzy w superego, chyba że *x* jest psychoanalitykiem', a najprościej będzie nam ją oddać za pomocą alternatywy: 'albo *x* jest psychoanalitykiem albo *x* nie wierzy w superego'. W ten sposób dochodzimy do symbolizacji naszego zdania:

[5] $\forall x\ (Px \rightarrow (Ax \vee {\sim}Sx))$

Równoważnie moglibyśmy to zdanie oddać jako:

[5′] $\forall x\ (Px \rightarrow ({\sim}Ax \rightarrow {\sim}Sx))$

pamiętając z logiki zdań, że '*p* chyba że *r*' można symbolizować równoważnie jako '$r \vee p$' i jako '${\sim}r \rightarrow p$'.

Ćwiczenie 17.IX.

Dokonaj symbolizacji następujących zdań w oparciu o podaną legendę.

Dziedzina: zwierzęta	*Kx*: *x* jest kotem	*Sx*: *x* jest samotnikiem
Ax: x jest agresywny	*Mx*: *x* jest mądry	*Tx: x* jest trenowany
Cx: x ma ciężkie przeżycia	*Ox: x* jest prowokowany	*Ux: x* jest ubezwłasnowolnione
Dx: *x* jest dobrze ułożony	*Px*: *x* jest psem	*Wx*: *x* jest wszędobylski
Gx: *x* jest grzeczny	*Rx*: *x* jest przyjacielski	

(a) Wszystkie psy, które są mądre, są grzeczne jeśli są dobrze ułożone.

(b) Wszystkie psy i koty są mądre i przyjacielskie.

(c) Wszystkie psy są mądre i przyjacielskie i wszystkie koty też są mądre i przyjacielskie.

(d) Pewne koty są samotnikami, ale żaden pies nie jest samotnikiem.

(e) Pewien wszędobylski, choć dobrze ułożony, pies jest niemądry i przyjacielski, a pewien wszędobylski i dobrze ułożony kot jest mądry i nieprzyjacielski.

(f) Nie tylko dobrze ułożone psy są grzeczne; istnieją też dobrze ułożone grzeczne koty.

(g) Żaden mądry i dobrze ułożony kot nie jest samotnikiem, chyba że miał ciężkie przeżycia.

(h) Żaden mądry pies i żaden mądry kot nie jest niegrzeczny, chyba że miał ciężkie przeżycia.

(i) Pewne dobrze ułożone koty i psy nie są ani specjalnie grzeczne ani ubezwłasnowolnione.

(j) Niektóre mądre koty i psy, które miały ciężkie przeżycia, są przyjacielskie o ile były albo dobrze ułożone albo trenowane i o ile nie zostały ubezwłasnowolnione.