16. PODSTAWOWE POJĘCIA LOGIKI KWANTYFIKATORÓW

16.1. Cele

- zrozumienie, w jakim sensie logika kwantyfikatorów jest poszerzeniem logiki zdań
- umiejętność symbolizacji prostych zdań indywiduowych i skwantyfikowanych
- umiejętność odczytywania zdań złożonych
- umiejętność określania głównego funktora

16.2. Ograniczenia logiki zdań

Obydwa z poniższych wnioskowań są prawidłowe:

(A_1) Jeżeli Sokrates jest człowiekiem, to jest śmiertelny.
Sokrates jest człowiekiem.
―――――――――――――――
Zatem: Sokrates jest śmiertelny

(A_2) Wszyscy ludzie są śmiertelni.
Sokrates jest człowiekiem.
―――――――――――――――
Zatem: Sokrates jest śmiertelny

Okazuje się jednakże, że tylko wnioskowanie (A_1) jest prawidłowe w świetle logiki zdań. Łatwo to zrozumieć, jeżeli dokona się symbolizacji obydwu wnioskowań w języku logiki zdań. Struktura wnioskowania (A_1) w języku logiki zdań jest następująca:

[A_1]
$$\begin{array}{l} C \rightarrow Ś \\ \underline{C} \\ Ś \end{array}$$

C: Sokrates jest człowiekiem
Ś: Sokrates jest śmiertelny

Widać wyraźnie, że [A_1] jest wnioskowaniem logicznie prawidłowym w logice zdań, gdyż jest po prostu przypadkiem wnioskowania za pomocą reguły →Elim w systemie SD.

Powyższa legenda nie wystarcza jednak aby poddać symbolizacji wnioskowanie (A_2); potrzebny jest dodatkowo symbol przedstawiający zdanie znajdujące się w przesłance pierwszej wnioskowania (A_2). Struktura wnioskowania (A_2) w języku logiki zdań można jedynie przedstawić w sposób następujący:

[A_2]
$$\begin{array}{l} W \\ \underline{C} \\ Ś \end{array}$$

W: Wszyscy ludzie są śmiertelni
C: Sokrates jest człowiekiem
Ś: Sokrates jest śmiertelny

wszakże zdanie „Wszyscy ludzie są śmiertelni" jest – w logice zdań – zdaniem prostym, gdyż nie jest złożone za pomocą żadnych spójników zdaniowych. Widać wyraźnie, że wnioskowanie [A2] jest rozumowaniem nieprawidłowym w logice zdań – jego struktura logiczna to:

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ r \end{array}$$

Nie wynika stąd oczywiście, że wnioskowanie (A_2) jest wnioskowaniem nieprawidłowym – wynika stąd tylko to, że logika zdań jest zbyt uboga, by móc w jej języku zrozumieć prawidłowość tego rozumowania. Aby ją zrozumieć trzeba odwołać się do logiki kwantyfikatorów. Logika ta pozwala bowiem na odkrycie złożonej struktury logicznej m.in. takich zdań jak „Wszyscy ludzie są śmiertelni".

Uwagi proszę kierować na adres:
Katarzyna.Paprzycka@swps.edu.pl

16.3. Logika kwantyfikatorów: uwagi wstępne

Logika kwantyfikatorów stanowi wzbogacenie (choć również i skomplikowanie) aparatu pojęciowego logiki zdań. Zanim ten aparat przedstawimy warto przyjrzeć się zasadniczej różnicy między tym, w jaki sposób wybrane zdania analizowane są z punktu widzenia logiki zdań, a w jaki sposób analizowane są one w języku logiki kwantyfikatorów. Rozważmy następujące cztery zdania:

(1) Cezary jest wysoki.
(2) Ala jest wysoka.
(3) Wszyscy są wysocy.
(4) Ktoś jest wysoki.

Z punktu widzenia logiki zdań zdania (1)–(4) są po prostu czterema różnymi zdaniami, których nic ze sobą nie łączy. Gdybyśmy dokonywali ich symbolizacji w logice zdań wyglądałaby ona tak:

$[1]_{lz}$	C	C: Cezary jest wysoki.
$[2]_{lz}$	A	A: Ala jest wysoka.
$[3]_{lz}$	W	W: Wszyscy są wysocy.
$[4]_{lz}$	K	K: Ktoś jest wysoki.

Intuicyjnie wyczuwamy jednak, że te zdania są do siebie w istotny sposób podobne. Orzeka się w nich *to samo*, choć o innych podmiotach, w dodatku w zdaniach (1)–(2) podmiotem są indywidualne osoby, natomiast a w zdaniach (3)–(4) – mowa jest nie o indywidualnych osobach, lecz ogólnie o wszystkich lub niektórych osobach.

Logika kwantyfikatorów pozwala nam dostrzec te podobieństwa. Dzieje się tak dlatego, że logika kwantyfikatorów daje nam głębszy wgląd w strukturę zdań prostych. Podczas gdy w logice zdań, zdania proste stanowiły nierozerwalną całość, w logice kwantyfikatorów uznaje się, że nawet zdania, w których nie występują spójniki zdaniowe, mają złożoną strukturę logiczną. Zdania (1)–(2) to proste zdania indywiduowe (tzw. zdania atomowe), a zdania (3)–(4) to proste zdania skwantyfikowane (ogólne). Rozważmy je kolejno.

16.3.1. Proste zdania indywiduowe

Zdania (1) jest tzw. zdaniem indywiduowym, tj. dotyczącym pewnego indywiduum, a mianowicie Cezarego. Zdanie to rozbija się na dwie składowe:

Cezary jest wysoki.

Cezary   _____ jest wysoki

Pierwsza z tych składowych to tzw. nazwa indywiduowa – w naszym wypadku imię pewnej konkretnej osoby. Druga z tych składowych to tzw. funkcja zdaniowa, która po wypełnieniu luki nazwą staje się zdaniem. Każda funkcja zdaniowa ma przynajmniej jedną lukę, którą zaznacza się za pomocą tzw. zmiennych indywiduowych (oznaczanych za pomocą liter *x, y, z*):

x jest wysoki

Skonstruujmy teraz legendę symbolizacji. Wyrażeniem, które zastąpi imię 'Cezary' będzie tzw. stała indywiduowa. Stałe indywiduowe przedstawiamy za pomocą małych liter z początku alfabetu. Przyjmijmy zatem, że litera '*c*' zastępuje nazwę 'Cezary'. Wyrażeniem zastępującym funkcję zdaniową '*x* jest wysoki' będzie wyrażenie złożone z tzw. predykatu (zastępującego nazwę pewnej własności – w naszym wypadku bycia wysokim), który oznaczymy za pomocą wielkiej litery '*W*', oraz ze zmiennej *x*. Wyrażenie zastępujące funkcję zdaniową '*x* jest wysoki' będzie miało postać '*Wx*'. W skrócie:

c: Cezary
Wx: *x* jest wysoki

Możemy teraz zapisać zdanie (1) w języku logiki kwantyfikatorów:

[1] *Wc*

Zapis tego zdania powstał wskutek zastąpienia zmiennej *x* w funkcji zdaniowej *Wx* przez stałą indywiduową *c*. W podobny sposób możemy dokonać symbolizacji zdania (2), uzupełniając powyższą legendę o stałą indywiduową *a*:

[2] *Wa*   *a*: Ala

Ćwiczenie 16.I.

Dokonaj symbolizacji następujących zasłyszanych opinii o niektórych politykach polskich w oparciu o podaną legendę:

Dziedzina: politycy	*a*: Andrzej Lepper	*Ax*: *x* jest ambitny
	j: Jerzy Urban	*Ix*: *x* jest inteligentny
	m: Jan Maria Rokita	*Px*: *x* jest poczciwy
	r: Roman Giertych	*Wx*: *x* jest wygadany

(a) Andrzej Lepper jest wygadany.

(b) Wygadany jest też Roman Giertych.

(c) Jan Maria Rokita jest ambitny.

(d) Ambicji nie brak też Jerzemu Urbanowi.

(e) Jerzy Urban jest jednak przede wszystkim inteligentny.

(f) Andrzej Lepper jest ambitny.

(g) Również Roman Giertych jest ambitny.

(h) Andrzej Lepper jest poczciwym człowiekiem.

(i) Roman Giertych jest kwintesencją poczciwości.

16.3.2. Proste zdania skwantyfikowane (ogólne)

Aby przedstawić zdania takie, jak zdania (3)–(4), musimy wprowadzić dwa dodatkowe operatory, tzw. kwantyfikatory, pełniące funkcję „wiązania" zmiennych. Wyróżnia się dwa kwantyfikatory: generalizator i partykularyzator.

Generalizator (zwany też kwantyfikatorem ogólnym, dużym, generalnym, uniwersalnym) odpowiada w języku polskim takim wyrażeniom, jak 'każdy', 'dowolny', 'wszystko', 'wszelkie' *etc.* Przedstawiać go będziemy za pomocą odwróconej litery 'A'.[1] Schemat zdania utworzonego za pomocą generalizatora przedstawia się następująco:

$\forall x\ Px$ czytamy: „dla każdego *x*, *P* od *x*"

Partykularyzator (zwany też kwantyfikatorem szczegółowym, małym, egzystencjalnym, partykularnym) odpowiada w języku polskim takim wyrażeniom, jak 'pewien', 'niektóre', 'istnieje taki …, że' *etc.* Przedstawiać go będziemy za pomocą odwróconej litery 'E'. Schemat zdania utworzonego za pomocą partykularyzatora jest następujący:

$\exists x\ Px$ czytamy: „istnieje taki *x*, że *P* od *x*" lub „dla pewnego *x*, *P* od *x*".

Korzystając z wcześniej utworzonej legendy możemy przedstawić zdanie (3) jako:

[3] $\forall x\ Wx$ „Dla każdego *x*, *x* jest wysoki"
[4] $\exists x\ Wx$ „Istnieje taki *x*, że *x* jest wysoki"

Zdania skwantyfikowane nazywane też bywają „zdaniami ogólnymi", choć w raczej szczególnym – technicznym – sensie, a mianowicie takim, że zarówno zdania (3) i (4) kwalifikują się jako zdania ogólne. Potocznie używa się terminu 'zdanie ogólne' w sensie węższym, w jakim tylko zdanie (3) uznane byłoby za zdanie ogólne. Aby odróżnić zdania (3) i (4) używać będziemy terminów 'generalizacja' i 'partykularyzacja'.

[1] Używa się wielu symboli przedstawiających oba kwantyfikatory. Najbardziej tradycyjne w literaturze polskiej są $\bigwedge_x Px$ i $\bigvee_x Px$, widuje się też: $\prod_x Px$ i $\sum_x Px$, oraz $(x)Px$ i $(\exists x)Px$.

Ćwiczenie 16.II.

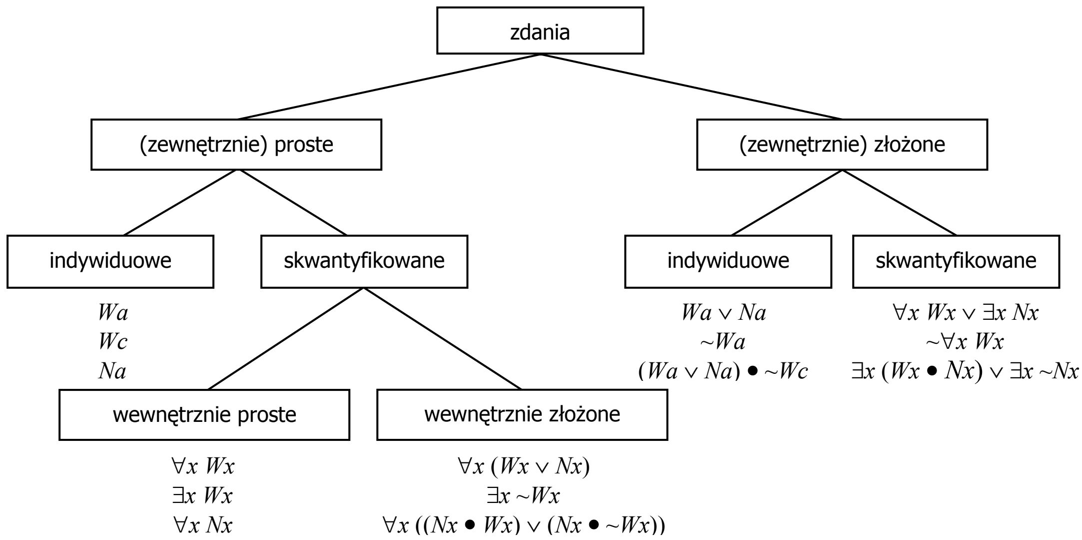
Dokonaj symbolizacji następujących zasłyszanych opinii jako zdań skwantyfikowanych w oparciu o podaną legendę. Uwaga: Niekiedy nie można oddać pełnej treści tych zdań – chodzi tylko o ujęcie ich jako prostych zdań skwantyfikowanych. Zaznacz wyrażenia w języku polskim odpowiadające kwantyfikatorom.

Dziedzina: politycy	Ix: x jest inteligentny	Ux: x jest uczciwy
	Ox: x jest oszustem	Wx: x jest wygadany

(a)	Wszyscy politycy to oszuści.	
(b)	Politycy to banda oszustów.	
(c)	Rzadko zdarzają się wśród polityków osoby uczciwe.	
(d)	Niektórzy politycy są oszustami.	
(e)	Dowolnie wybrany polityk będzie zawsze oszustem.	
(f)	Politycy są – bez wyjątku – inteligentni.	
(g)	Bywają inteligentni politycy.	
(h)	Każdy polityk jest wygadany.	
(i)	Pewien polityk jest uczciwy.	
(j)	Przynajmniej jeden polityk jest inteligentny.	

16.4. Zdania wewnętrznie i zewnętrznie złożone

W logice zdań wyróżnialiśmy pięć podstawowych rodzajów zdań złożonych: negację, koniunkcję, alternatywę, implikację i równoważność. W logice kwantyfikatorów występuje również tych pięć spójników, z tą jednak różnicą, że mogą one łączyć (a) nie tylko zdania (zarówno indywiduowe jak i ogólne), (b) ale również funkcje zdaniowe. Ze względu na możliwość (a) zdania mogą być zewnętrznie proste lub zewnętrznie złożone (albo po prostu: proste lub złożone). Ze względu na ewentualność składania również funkcji zdaniowych za pomocą spójników – zewnętrznie proste zdania skwantyfikowane mogą być również wewnętrznie proste lub złożone. Następujący diagram obrazuje nieco uproszczony – pomijający niejednorodne złożenia zarówno zewnętrzne, jak i wewnętrzne (pełny diagram przedstawiony jest w Temacie 17) – obraz podziałów w ramach zdań.



Rys. 1. Uproszczona klasyfikacja typów zdań w logice kwantyfikatorów (por. tekst)

Na razie przyjrzyjcie się pobieżnie temu diagramowi i potraktujcie go jako mapę, do której będziecie się mogli odnieść dopiero po przećwiczeniu symbolizacji zdań. Precyzyjniejsze określenia poszczególnych kategorii będą dostępne w Temacie 17.

Do tej pory rozważaliśmy dwa typy zdań, znajdujące się po lewej stronie diagramu. Rozważymy teraz pozostałe trzy typy zdań, rozpoczynając od zdań zewnętrznie złożonych.

16.4.1. Złożone zdania indywiduowe

Złożone zdania indywiduowe powstają za pomocą spójników zdaniowych z innych zdań indywiduowych (prostych lub złożonych) według znanych nam z logiki zdań zasad. Zdania:

[5] ~(*Na* • *Pa*)
[6] ~*Na* • *Pa*

odczytujemy (przy następującej legendzie symbolizacji):

Dziedzina: osoby	*a*: Adam	*Nx*: *x* pójdzie do nieba
	b: Beata	*Px*: *x* pójdzie do piekła

(5) Nieprawda, że Adam pójdzie zarówno do nieba, jak i do piekła.
(6) Adam nie pójdzie do nieba, lecz do piekła.

Ćwiczenie 16.III.

Dokonaj symbolizacji następujących zasłyszanych opinii o niektórych politykach polskich w oparciu o podaną legendę. Niekiedy będzie można podać różne symbolizacje tych zdań.

Dziedzina: politycy	*a*: Andrzej Lepper	*Ix*: *x* jest inteligentny
	j: Jerzy Urban	*Ox*: *x* jest oszustem
	m: Jan Maria Rokita	*Ux*: *x* jest uczciwy
	r: Roman Giertych	*Wx*: *x* jest wygadany

(a)	Andrzej Lepper jest wygadany i inteligentny.	
(b)	Andrzej Lepper jest wygadany, ale nie jest inteligentny.	
(c)	Jeżeli Roman Giertych jest inteligentny, to Andrzej Lepper też jest inteligentny.	
(d)	Roman Giertych jest oszustem wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest uczciwy.	
(e)	Ani Jan Maria Rokita, ani Jerzy Urban nie są oszustami.	
(f)	Jan Maria Rokita i Jerzy Urban nie są obaj uczciwi.	
(g)	Jeżeli ani Andrzej Lepper ani Roman Giertych nie są oszustami, a Jan Maria Rokita jest uczciwy, to oszustem jest Jerzy Urban.	
(h)	Albo Roman Giertych jest uczciwy, albo zarówno jest inteligentny i nad wyraz wygadany, jak i jest zwyczajnym oszustem.	
(i)	Wszyscy czterej (Andrzej Lepper, Jerzy Urban, Jan Maria Rokita, Roman Giertych) są inteligentni.	
(j)	Któryś spośród nich czterech jest oszustem	

16.4.2. Złożone zdania skwantyfikowane

Za pomocą spójników zdaniowych można składać również zdania skwantyfikowane. Zdanie:

[7] $\sim\forall x\,\boxed{Nx}$

jest negacją zdania skwantyfikowanego, a mianowicie zdania „Wszyscy pójdą do nieba". Zdanie [7] możemy odczytujemy w następujący sposób:

{7} Nieprawda, że dla każdego *x*, *x* pójdzie do nieba

czyli:

(7) Nie wszyscy pójdą do nieba.

Rozważmy jeszcze jeden przykład. Zdanie:

[8] $\sim\forall x\,\boxed{Nx} \bullet \exists x\,\boxed{Px}$

jest koniunkcją. Pierwszym członem tej koniunkcji jest negacja zdania skwantyfikowanego (a mianowicie zdania „Wszyscy pójdą do nieba"); drugim członem jest zdanie skwantyfikowane partykularnie „Ktoś pójdzie do piekła". Zdanie [8] możemy odczytać w sposób następujący:

{8} Nieprawda, że dla każdego *x*, *x* pójdzie do nieba, i istnieje taki *x*, że *x* pójdzie do piekła,

czyli:

(8) Nie wszyscy pójdą do nieba, ale niektórzy pójdą do piekła.

16.4.3. Wewnętrznie złożone zdania skwantyfikowane

Wewnętrznie złożone zdania skwantyfikowane są zdaniami zewnętrznie prostymi – ich głównym operatorem jest kwantyfikator. W zasięgu tego kwantyfikatora natomiast znajduje się złożona funkcja zdaniowa. Rozważmy następujący przykład zdania wewnętrznie złożonego:

[9] $\forall x \sim Nx$

Operatorem głównym jest tutaj generalizator, w którego zasięgu znajduje się złożona funkcja zdaniowa, a mianowicie $\sim Nx$. Tę złożoną funkcję zdaniową możemy odczytać „*x* nie pójdzie do nieba". Mamy zatem:

{9} Dla każdego *x, x* nie pójdzie do nieba.

czyli:

(9) Nikt nie pójdzie do nieba.

Rozważmy jeszcze zdania:

[10] $\forall x \sim(Nx \bullet Px)$
[11] $\forall x\ (\sim Nx \bullet Px)$

które odczytamy:

{10} Dla każdego *x,* nieprawda, że *x* pójdzie zarówno do nieba, jak i do piekła.
(10) Nikt nie pójdzie zarówno do nieba, jak i do piekła.

{11} Dla każdego *x, x* nie pójdzie do nieba, lecz *x* pójdzie do piekła.
(11) Wszyscy pójdą nie do nieba, lecz do piekła.

Warto zwrócić uwagę, że sposób złożenia funkcji zdaniowych w zdaniach [10] i [11] odpowiada sposobowi złożenia zdań indywiduowych w zdaniach [5] i [6].

Ćwiczenie 16.IV.

Odczytaj następujące złożone zdania skwantyfikowane w oparciu o cztery podane legendy:

(1) Dziedzina: ludzie	*Nx*: *x* pójdzie do nieba	*Px*: *x* pójdzie do piekła
(2) Dziedzina: liczby	*Nx*: *x* jest nieparzyste	*Px*: *x* jest parzyste
(3) Dziedzina: politycy	*Nx*: *x* ma niewyparzony język	*Px*: *x* jest podstępny
(4) Dziedzina: podręczniki	*Nx*: *x* jest nudny	*Px*: *x* jest przystępny

(a) $\sim\forall x\ Nx$	(b) $\sim\forall x\ Px$	(c) $\exists x \sim Px$
(d) $\forall x\ (Nx \vee Px)$	(e) $\forall x\ Nx \vee \forall x\ Px$	(f) $\forall x\ Nx \rightarrow \sim\forall x\ Px$
(g) $\exists x\ (Nx \bullet Px)$	(h) $\exists x\ Nx \bullet \exists x\ Px$	(i) $\exists x \sim Px \rightarrow \sim\forall x\ Px$

16.5. Zasięg kwantyfikatora, a kwantyfikator jako funktor główny

Podobnie jak w logice zdań bardzo istotna była umiejętność rozstrzygania, który ze spójników jest główny, tak w logice kwantyfikatorów umiejętność ta jest również istotna, choć zostaje nieco skomplikowana ze względu na to, że funktorem głównym może być kwantyfikator. Jest tak w zewnętrznie prostych zdaniach skwantyfikowanych, np.:

(1) $\forall x\ \boxed{Nx}$
(2) $\forall x\ \boxed{(Px \vee Nx)}$
(3) $\exists x\ \boxed{\sim((Px \vee Nx) \vee (Cx \bullet \sim Px))}$

We wszystkich tych zdaniach kwantyfikator »sięga« końca zdania – jest zatem kwantyfikatorem głównym; w zdaniach (2)–(3) gwarantują to nawiasy. W poniższych zdaniach natomiast kwantyfikatory nie są już funktorami głównymi.

(4) $\forall x\,\boxed{Nx} \lor \forall x\,\boxed{Px}$

(5) $\forall x\,\boxed{(Px \lor Nx)} \rightarrow {\sim}\exists x\,\boxed{Cx}$

(6) ${\sim}(\exists x\,\boxed{{\sim}((Px \lor Nx) \lor (Cx \bullet {\sim}Px))} \lor \exists x\,\boxed{((Px \lor Nx) \lor (Cx \bullet {\sim}Px)))}$

Aby rozstrzygnąć, który z funktorów jest spójnikiem głównym warto przypomnieć sobie metodę łączenia nawiasów wprowadzoną w Temacie ???. Kwantyfikatory zachowują się przy wiązaniach tak, jak spójnik negacji.

Ćwiczenie 16.V.

Który funktor jest funktorem głównym w zdaniach z poprzedniego ćwiczenia, oraz następujących zdaniach:

(a) ${\sim}\forall x{\sim}Nx$

(b) ${\sim}\forall x\,{\sim}Nx \bullet \exists x\,{\sim}Px$

(c) ${\sim}(\forall x\,{\sim}Nx \bullet \exists x\,{\sim}Px)$

(d) ${\sim}(\forall x\,{\sim}Nx \bullet \exists x\,{\sim}Px) \rightarrow {\sim}\forall x\,Px$

(e) $\exists x\,{\sim}(Nx \bullet Px)$

(f) $\forall x\,({\sim}(Nx \bullet Px) \rightarrow (Px \rightarrow Nx))$

(g) $\forall x\,({\sim}(Nx \bullet Px) \rightarrow (Px \rightarrow Nx)) \equiv \forall x\,Px$

(h) $\forall x\,{\sim}(({\sim}(Nx \bullet Px) \rightarrow (Px \rightarrow Nx)) \equiv Px)$

16.6. Zmienne związane i zmienne wolne

Formuły, w których kwantyfikator nie związuje wszystkich zmiennych są funkcjami zdaniowymi, a zmienne niezwiązane żadnym kwantyfikatorem określa się mianem „zmiennych wolnych”. Formuła

$$\forall x\,(Nx \lor Px)$$

jest zdaniem – wszystkie zmienne występujące w zdaniach są związane. Natomiast formuła:

$$\forall x\,Nx \lor Px$$

jest funkcją zdaniową, gdyż druga zmienna ‘x’ jest wolna – nie jest związana kwantyfikatorem. Funkcję zdaniową $\forall x\,Nx \lor Px$ można więc zapisać w następujący sposób:

$$\forall x\,Nx \lor Py$$

Zmienną x (w drugim członie alternatywy) można wymienić na jakąkolwiek inną zmienną bez zmiany znaczenia formuły, gdyż jest to zmienna niezwiązana kwantyfikatorem wiążącym zmienną x w pierwszym członie alternatywy.

Ćwiczenie 16.VI.

Ustal, które zmienne są wolne. W wypadku zmiennych wolnych zamień zmienne, tak aby różniły się kształtem od zmiennych związanych:

(a) $\exists y\,Qy \rightarrow Ry$

(b) ${\sim}\forall x\,(Px \rightarrow Rx) \lor {\sim}Px$

(c) ${\sim}\forall x\,(Px \rightarrow Rx) \lor {\sim}(\forall x\,Px \rightarrow Rx)$

(d) $\exists x\,(Px \equiv {\sim}Qx) \lor (Rx \equiv {\sim}Px)$

(e) ${\sim}(\forall x\,{\sim}Qx \bullet {\sim}Px) \rightarrow {\sim}\forall x\,Px$

(f) $({\sim}\forall x\,{\sim}Qx \bullet {\sim}Px) \rightarrow {\sim}\forall x\,(Px \bullet Qx)$

(g) $\exists x\,Px \equiv ({\sim}Qx \rightarrow (Rx \equiv {\sim}Px))$

16.7. Podsumowanie

Jak pamiętamy, logika zdań zakładała, że dysponujemy stałymi zdaniowymi, zmiennymi zdaniowymi, spójnikami zdaniowymi, oraz nawiasami. Warto teraz zestawić wszystkie elementy potrzebne do skonstruowania logiki kwantyfikatorów. Potrzebujemy:

- spójniki zdaniowe (jak w logice zdań): ~, •, ∨, →, ≡
- nawiasy (jak w logice zdań): (,), [,], {, }
- stałe predykatowe (nazwy własności): *A*, *B*, ...
- stałe indywiduowe (nazwy rzeczy): *a, b, c*
- zmienne predykatowe: `P, Q, R, …`
- zmienne indywiduowe: *x, y, z*
- kwantyfikatory:
  - generalizator; ∀*x*; dla każdego *x*...
  - partykularyzator; ∃*x*; dla pewnego *x*, istnieje takie *x*, że…

16.8. Logika kwantyfikatorów jako rozwinięcie logiki zdań

Jak zobaczymy w logice kwantyfikatorów za prawidłowe uznane są wszystkie rozumowania uznane za prawidłowe w logice zdań, a w dodatku na gruncie logiki kwantyfikatorów można uznać za prawidłowe przynajmniej niektóre z intuicyjnie prawidłowych rozumowań, które nie są prawidłowe w świetle logiki zdań. Spójrzmy jeszcze raz na przykład argumentacji (A_1) i (A_2) (por. §16.2). Jak pamiętamy podczas gdy argumentację (A_1) daje się zrozumieć jako argumentację prawidłową w logice zdań, to argumentacja (A_2) jest instancją rozumowania nieprawidłowego o kształcie: *p*, *q*, zatem: *r*. Spójrzmy na te argumentacje przez teoretyczny filtr logiki kwantyfikatorów.

(A_1) Jeżeli Sokrates jest człowiekiem, to jest śmiertelny.
Sokrates jest człowiekiem.
___
Zatem: Sokrates jest śmiertelny

Wnioskowanie (A_1) przybiera następującą postać w języku logiki kwantyfikatorów:

[A_1*]	*Ła* → *Ma*	*a*: Sokrates
	Ła	*Łx*: *x* jest człowiekiem
	Ma	*Mx*: *x* jest śmiertelny

Pamiętając, że *Ła* i *Ma* są zdaniami atomowymi, powinniście rozpoznać rozumowanie i w tej postaci jako instancję *modus ponendo ponens*, czy też reguły →Elim w systemie SD.

Natomiast wnioskowanie (A_2):

(A_2) Wszyscy ludzie są śmiertelni.
Sokrates jest człowiekiem.
___
Zatem: Sokrates jest śmiertelny

przybiera postać:

[A_2*] ∀*x* (*Łx* → *Mx*)
Ła
___
Ma

Być może już widzicie zarys głębszej struktury tego rozumowania, które trochę przypomina rozumowanie w oparciu o *modus ponens*, choć nie do końca ze względu na obecność kwantyfikatora.

Dla chętnych: W systemie dedukcji naturalnej dla logiki kwantyfikatorów, oprócz reguł wprowadzania i opuszczania poszczególnych spójników zdaniowych, obowiązują reguły wprowadzania i opuszczania poszczególnych kwantyfikatorów. W tym miejscu istotna jest tylko reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego, która jest też bardzo intuicyjna i prosta: jeśli coś zachodzi dla wszystkich indywiduów z dziedziny *D*, to zachodzi dla każdego pojedynczego elementu dziedziny *D*. W naszym przypadku, jeśli prawdziwa jest pierwsza przesłanka, tj. jeżeli prawdziwe jest zdanie „Dla każdego *x*, jeżeli *x* jest człowiekiem, to *x* jest śmiertelny", to prawdziwe musi być zdanie: „Jeżeli Sokrates jest człowiekiem, to Sokrates jest śmiertelny". A jeśli tak, to oprócz kroku opuszczenia kwantyfikatora ogólnego, dalszy ciąg rozumowania przebiega tak jak w argumentacji (A_1) – stąd ich intuicyjnie wyczuwane podobieństwo.

Logika kwantyfikatorów jest zarówno spadkobierczynią osiągnięć logiki zdań, jak też rozwiązuje niektóre ograniczenia tej ostatniej.