ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

15. DOWODZENIE VI

Ćwiczenie I.

Dowiedź, że następujące reguły inferencji mogłyby być dodane jako reguły wtórne do systemu SD:

(a) RŻE

i.	$p \equiv r$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad r$	≡Elim *i*, +1
+3	$p \to r$	→Wpr (+1)–(+2)

(b) RŻE

i.	$p \equiv r$	
+1	$\quad r$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad p$	≡Elim *i*, +1
+3	$r \to p$	→Wpr (+1)–(+2)

(c) RŻW

i.	$p \to r$	
j.	$r \to p$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad r$	→Elim *i*, +1
+3	$\quad r$	Zał. (→Wpr)
+4	$\quad p$	→Elim *j*, +3
+5	$p \equiv r$	≡Wpr (+1)–(+2), (+3)–(+4)

(d) MTP

i.	$p \vee q$	
j.	$\sim p$	
+1	$\quad p$	Zał. (∨Elim)
+2	$\quad\quad \sim q$	Zał. (~Elim)
+3	$\quad\quad p$	R +1
+4	$\quad\quad \sim p$	R *j*
+5	$\quad q$	~Elim (+2)–(+3), (+2)–(+4)
+6	$\quad q$	Zał. (∨Elim)
+7	$\quad q$	R +6
+8	q	∨Elim *i*, (+1)–(+5), (+6)–(+7)

(e) MTT

i.	$p \to r$	Zał.
j.	$\sim r$	Zał.
+1	$\quad p$	Zał. (~Wpr)
+2	$\quad r$	→Elim *i*, +1
+3	$\quad \sim r$	R *j*
+4	$\sim p$	~Wpr (+1)–(+2), (+1)–(+3)

(f) HS

i.	$p \to q$	
j.	$q \to r$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad q$	→Elim *i*, +1
+3	$\quad r$	→Elim *j*, +2
+4	$p \to r$	→Wpr (+1)–(+3)

Samouczek logiki zdań. Rozwiązania ćwiczeń (wersja 2007)

Uwagi proszę kierować na adres:
kpaprzycka@uw.edu.pl

(g) HSS

i.	$p \to r$	
+1	$r \to q$	Zał. ($\to$Wpr)
+2	$\quad p$	Zał. ($\to$Wpr)
+3	$\quad r$	$\to$Elim *i*, +2
+4	$\quad q$	$\to$Elim +1, +3
+5	$p \to q$	$\to$Wpr (+2)–(+4)
+8	$(r \to q) \to (p \to q)$	$\to$Wpr (+1)–(+5)

(h) HSS

i.	$p \to r$	
+1	$q \to p$	Zał. ($\to$Wpr)
+2	$\quad q$	Zał. ($\to$Wpr)
+3	$\quad p$	$\to$Elim +1, +2
+4	$\quad r$	$\to$Elim i, +3
+5	$q \to r$	$\to$Wpr (+2)–(+4)
+8	$(q \to p) \to (q \to r)$	$\to$Wpr (+1)–(+5)

(i) MN

i.	$p \to r$	
j.	$p \to s$	
+1	p	Zał. ($\to$Wpr)
+2	r	$\to$Elim *i*, +1
+3	s	$\to$Elim *j*, +1
+4	$r \bullet s$	$\bullet$Wpr +2, +3
+5	$p \to (r \bullet s)$	$\to$Wpr (+1)–(+4)

(j) MPN

i.	$p \to r$	
j.	$q \to s$	
+1	$p \bullet q$	Zał. ($\to$Wpr)
+2	p	$\bullet$Elim +1
+3	r	$\to$Elim *i*, +2
+4	q	$\bullet$Elim +1
+5	s	$\to$Elim *j*, +4
+6	$r \bullet s$	$\bullet$Wpr +3, +5
+7	$(p \bullet q) \to (r \bullet s)$	$\to$Wpr (+1)–(+6)

(k) DP

i.	$p \to r$	
j.	$q \to r$	
+1	$p \vee q$	Zał. ($\to$Wpr)
+2	$\quad p$	Zał. ($\vee$Elim)
+3	$\quad r$	$\to$Elim *i*, +2
+4	$\quad q$	Zał. ($\vee$Elim)
+5	$\quad r$	$\to$Elim *j*, +4
+6	r	$\vee$Elim +1, (+2)–(+3), (+4)–(+5)
+7	$(p \vee q) \to r$	$\to$Wpr (+1)–(+6)

(l) DPN

i.	$p \to r$	
j.	$q \to s$	
+1	$p \vee q$	Zał. ($\to$Wpr)
+2	$\quad p$	Zał. ($\vee$Elim)
+3	$\quad r$	$\to$Elim *i*, +2
+4	$\quad r \vee s$	$\vee$Wpr +3
+5	$\quad q$	Zał. ($\vee$Elim)
+6	$\quad r$	$\to$Elim *j*, +5
+7	$\quad r \vee s$	$\vee$Wpr +6
+8	$r \vee s$	$\vee$Elim +1, (+2)–(+4), (+5)–(+7)
+9	$(p \vee q) \to (r \vee s)$	$\to$Wpr (+1)–(+8)

(m) RF

i.	$p \to (q \to r)$	
j.	$p \to q$	
+1	p	Zał. ($\to$Wpr)
+2	$q \to r$	$\to$Elim *i*, +1
+3	q	$\to$Elim *j*, +1
+4	r	$\to$Elim +2, +3
+5	$p \to r$	$\to$Wpr (+1)–(+4)

(n) RF

i.	$p \to (q \to r)$	
+1	$p \to q$	Zał. ($\to$Wpr)
+2	$\quad p$	Zał. ($\to$Wpr)
+3	$\quad q \to r$	$\to$Elim *i*, +2
+4	$\quad q$	$\to$Elim +1, +2
+5	$\quad r$	$\to$Elim +3, +4
+6	$p \to r$	$\to$Wpr (+2)–(+5)
+7	$(p \to q) \to (p \to r)$	$\to$Wpr (+1)–(+6)

(o) RS

i.	p	
+1	$\quad r$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad p$	R *i*
+3	$r \to p$	→Wpr (+1)–(+2)

(p) RC

i.	$\sim p \to p$	
+1	$\quad \sim p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad p$	→Elim *i*, +1
+3	$\quad \sim p$	R +1
+4	p	~Elim (+1)–(+3)

(q) RDS

i.	$\sim p$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad\quad \sim r$	Zał. (→Wpr)
+3	$\quad\quad p$	R +1
+4	$\quad\quad \sim p$	R *i*
+5	$\quad r$	~Elim (+2)–(+3), (+2)–(+4)
+6	$p \to r$	→Wpr (+1)–(+5)

(r) IW

i.	$(p \bullet \sim r) \to \sim p$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad\quad \sim r$	Zał. (→Wpr)
+3	$\quad\quad p \bullet \sim r$	•Wpr +1, +2
+4	$\quad\quad \sim p$	→Elim *i*, +3
+5	$\quad\quad p$	R +1
+6	$\quad r$	~Elim (+2)–(+4), (+2)–(+5)
+7	$p \to r$	→Wpr (+1)–(+6)

(s) IW

i.	$(p \bullet \sim r) \to r$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad\quad \sim r$	Zał. (→Wpr)
+3	$\quad\quad p \bullet \sim r$	•Wpr +1, +2
+4	$\quad\quad r$	→Elim *i*, +3
+5	$\quad\quad \sim r$	R +2
+6	$\quad r$	~Elim (+2)–(+4), (+2)–(+5)
+7	$p \to r$	→Wpr (+1)–(+6)

Ćwiczenie II.

Dowiedź, że można uzupełnić system SD o wszystkie podane wyżej reguły podstawiania.

Część ze stosownych dowodów była już przedstawiana wcześniejszej. Np. dowody uzasadniające wprowadzenie reguł DeM będą miały ten sam przebieg, co dowody 1, 2, 3 i 4 z Tematu 11.

Transpozycja (Trans)

Por. Dowody 7, 8 (Temat 11)

Idempotentność (Idem)

Por. Ćwiczenie 1b, c (Temat 11)

De Morgan (DeM)

Por. Dowody 1, 2, 3, 4 (Temat 11)

Implikacja (Impl)

Por. Ćwiczenie 1e (Temat 11)

Negacja Implikacji (NegImpl)

Por. Ćwiczenie 1f (Temat 11)

Eksportacja (Eksp)

Por. Ćwiczenie 1d (Temat 11)

Podwójna negacja (Neg) (por. też Por. Ćwiczenie 1a (Temat 11)

i.	p	
+1	$\quad \sim p$	Zał. (~Wpr)
+2	$\quad p$	R *i*
+3	$\quad \sim p$	R +1
+4	$\sim\sim p$	~Wpr (+1)–(+2), (+1)–(+3)

i.	$\sim\sim p$	
+1	$\quad \sim p$	Zał. (~Wpr)
+2	$\quad \sim p$	R +1
+3	$\quad \sim\sim p$	R *i*
+4	p	~Elim (+1)–(+2), (+1)–(+3)

Przemienność (Przem)

i.	$p \bullet r$	
+1	p	•Elim *i*
+2	r	•Elim *i*
+3	$r \bullet p$	•Wpr +2, +1

Dowód $\{r \bullet p\} \vdash p \bullet r$ jest analogiczny

i.	$p \equiv r$	
+1	r	Zał. (≡Wpr)
+2	p	≡Elim *i*, +1
+3	p	Zał. (≡Wpr)
+4	r	≡Elim *i*, +3
+5	$r \equiv p$	≡Wpr (+1)–(+2), (+3)–(+4)

Dowód $\{r \equiv p\} \vdash p \equiv r$ jest analogiczny

i.	$p \vee r$	
+1	p	Zał. (∨Elim)
+2	$r \vee p$	∨Wpr +1
+3	r	Zał. (∨Elim)
+4	$r \vee p$	∨Wpr +3
+5	$r \vee p$	∨Elim *i*, (+1)–(+2), (+3)–(+4)

Dowód $\{r \vee p\} \vdash p \vee r$ jest analogiczny

Łączność (Łącz)

i	$p \vee (q \vee r)$	
+1	p	Zał. (∨Elim)
+2	$p \vee q$	∨Wpr +1
+3	$(p \vee q) \vee r$	∨Wpr +2
+4	$q \vee r$	Zał. (∨Elim)
+5	q	Zał. (∨Elim)
+6	$p \vee q$	∨Wpr +5
+7	$(p \vee q) \vee r$	∨Wpr +6
+8	r	Zał. (∨Elim)
+9	$(p \vee q) \vee r$	∨Wpr +8
+10	$(p \vee q) \vee r$	∨Elim +4, (+5)–(+7), (+8)–(+9)
+11	$(p \vee q) \vee r$	∨Elim *i*, (+1)–(+3), (+4)–(+10)

Dowód $\{(p \vee q) \vee r\} \vdash p \vee (q \vee r)$ jest analogiczny

i	$p \bullet (q \bullet r)$	
+1	p	•Elim *i*
+2	$q \bullet r$	•Elim *i*
+3	q	•Elim +2
+4	r	•Elim +2
+5	$p \bullet q$	•Wpr +1, +3
+6	$(p \bullet q) \bullet r$	•Wpr +5, +4

Dowód $\{(p \bullet q) \bullet r\} \vdash p \bullet (q \bullet r)$ jest analogiczny

Absorpcja (Abs)

i	$p \rightarrow r$	
+1	p	Zał. (→Wpr)
+2	r	→Elim *i*, +1
+3	$p \bullet r$	•Wpr +1, +2
+4	$p \rightarrow (p \bullet r)$	→Wpr (+1)–(+3)

i	$p \rightarrow (p \bullet r)$	
+1	p	Zał. (→Wpr)
+2	$p \bullet r$	→Elim *i*, +1
+3	r	•Elim +2
+4	$p \rightarrow r$	→Wpr (+1)–(+3)

Rozdzielność (Rozdz)

i	$p \vee (q \bullet r)$	
+1	$\quad p$	Zał. ($\vee$Elim)
+2	$\quad p \vee q$	$\vee$Wpr +1
+3	$\quad p \vee r$	$\vee$Wpr +1
+4	$\quad (p \vee q) \bullet (p \vee r)$	$\bullet$Wpr +2, +3
+5	$\quad q \bullet r$	Zał. ($\vee$Elim)
+6	$\quad q$	$\bullet$Elim +5
+7	$\quad p \vee q$	$\vee$Wpr +6
+8	$\quad r$	$\bullet$Elim +5
+9	$\quad p \vee r$	$\vee$Wpr +8
+10	$\quad (p \vee q) \bullet (p \vee r)$	$\bullet$Wpr +7, +9
+11	$(p \vee q) \bullet (p \vee r)$	$\vee$Elim *i*, (+1)–(+4), (+5)–(+10)

i	$(p \vee q) \bullet (p \vee r)$	
+1	$p \vee q$	$\bullet$Elim *i*
+2	$\quad p$	Zał. ($\vee$Elim)
+3	$\quad p \vee (q \bullet r)$	$\vee$Wpr +2
+4	$\quad q$	Zał. ($\vee$Elim)
+5	$\quad p \vee r$	$\bullet$Elim *i*
+6	$\quad\quad p$	Zał. ($\vee$Elim)
+7	$\quad\quad p \vee (q \bullet r)$	$\vee$Wpr +6
+8	$\quad\quad r$	Zał. ($\vee$Elim)
+9	$\quad\quad q \bullet r$	$\bullet$Wpr +4, +8
+10	$\quad\quad p \vee (q \bullet r)$	$\vee$Wpr +9
+11	$\quad p \vee (q \bullet r)$	$\vee$Elim +5, (+6)–(+7), (+8)–(+10)
+12	$p \vee (q \bullet r)$	$\vee$Elim +1, (+2)–(+3), (+4)–(+11)

i	$p \bullet (q \vee r)$	
+1	$q \vee r$	$\bullet$Elim *i*
+2	p	$\bullet$Elim *i*
+3	$\quad q$	Zał ($\vee$Elim)
+4	$\quad p \bullet q$	$\bullet$Wpr +2, +3
+5	$\quad (p \bullet q) \vee (p \bullet r)$	$\vee$Wpr +4
+6	$\quad r$	Zał ($\vee$Elim)
+7	$\quad p \bullet r$	$\bullet$Wpr +2, +6
+8	$\quad (p \bullet q) \vee (p \bullet r)$	$\vee$Wpr +7
+9	$(p \bullet q) \vee (p \bullet r)$	$\vee$Elim +1, (+3)–(+5), (+6)–(+8)

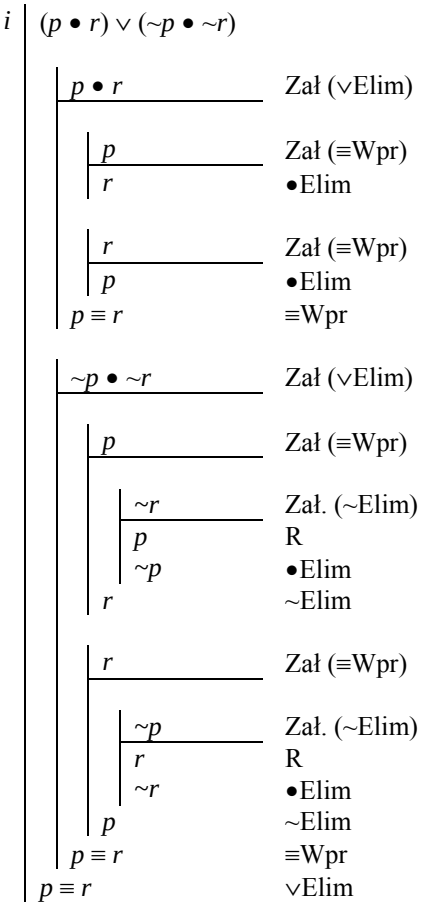
i	$(p \bullet q) \vee (p \bullet r)$	
+1	$\quad p \bullet q$	Zał ($\vee$Elim)
+2	$\quad p$	$\bullet$Elim +1
+3	$\quad q$	$\bullet$Elim +1
+4	$\quad q \vee r$	$\vee$Wpr +3
+5	$\quad p \bullet (q \vee r)$	$\bullet$Wpr +2, +4
+6	$\quad p \bullet r$	Zał ($\vee$Elim)
+7	$\quad p$	$\bullet$Elim +6
+8	$\quad r$	$\bullet$Elim +6
+9	$\quad q \vee r$	$\vee$Wpr +8
+10	$\quad p \bullet (q \vee r)$	$\bullet$Wpr +7, +9
+11	$p \bullet (q \vee r)$	$\vee$Elim *i*, (+1)–(+5), (+6)–(+10)

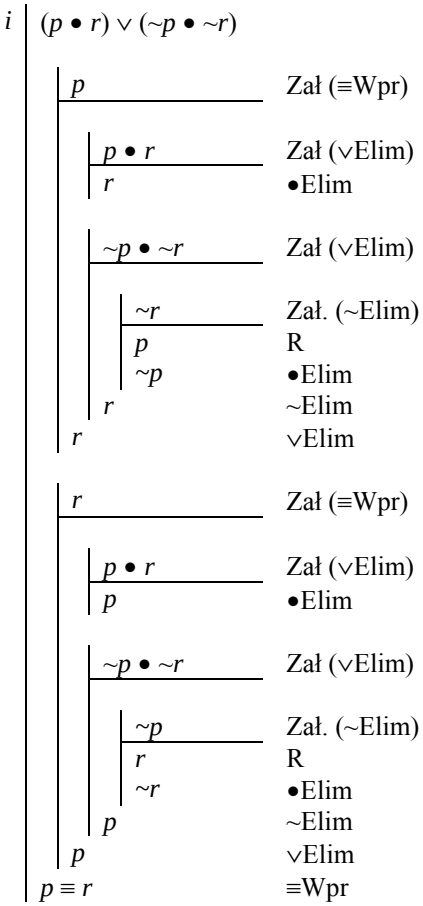
Równoważność (Równ)

i	$p \equiv r$	
+1	$\quad p$	Zał. (→Wpr)
+2	$\quad r$	≡Elim *i*, +1
+3	$p \to r$	→Wpr (+1)–(+2)
+4	$\quad r$	Zał. (→Wpr)
+5	$\quad p$	≡Elim *i*, +4
+6	$r \to p$	→Wpr (+4)–(+5)
+7	$(p \to r) \bullet (r \to p)$	•Wpr +3, +6

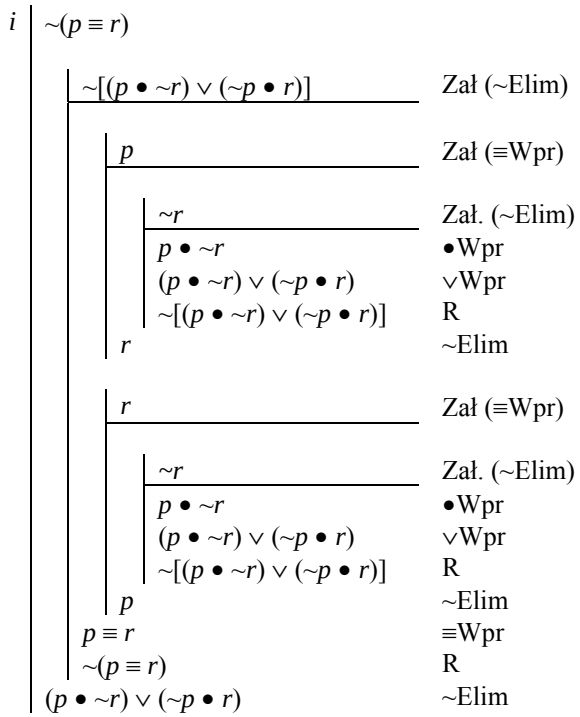
i	$(p \to r) \bullet (r \to p)$	
+1	$\quad p$	Zał. (≡Wpr)
+2	$\quad p \to r$	•Elim *i*
+3	$\quad r$	→Elim +2, +1
+4	$\quad r$	Zał. (≡Wpr)
+5	$\quad r \to p$	•Elim *i*
+6	$\quad p$	→Elim +5, +4
+7	$p \equiv r$	≡Wpr (+1)–(+3), (+4)–(+6)

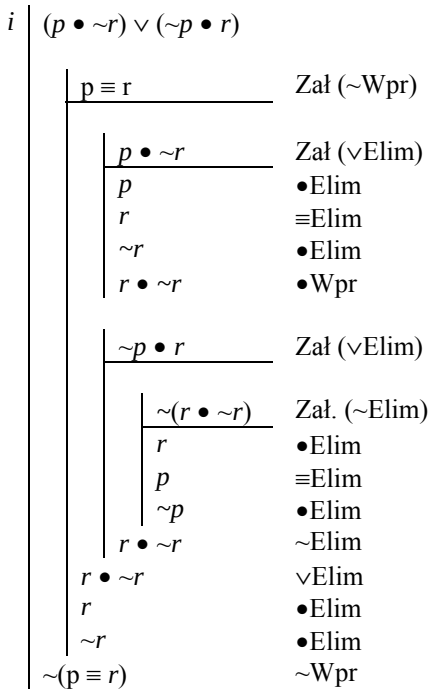
i	$p \equiv r$	
+1	$\quad \sim[(p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)]$	Zał. (~Elim)
+2	$\quad\quad \sim p$	Zał. (~Elim)
+3	$\quad\quad\quad r$	Zał. (~Wpr)
+4	$\quad\quad\quad p$	≡Elim *i*, +3
+5	$\quad\quad\quad \sim p$	R +2
+6	$\quad\quad \sim r$	~Wpr (+3)–(+4), (+3)–(+5)
+7	$\quad\quad \sim p \bullet \sim r$	•Wpr +2, +6
+8	$\quad\quad (p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)$	∨Wpr +7
+9	$\quad\quad \sim[(p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)]$	R +1
+10	$\quad p$	~Elim (+2)–(+8), (+2)–(+9)
+11	$\quad\quad \sim r$	Zał. (~Elim)
+12	$\quad\quad\quad p$	Zał. (~Wpr)
+13	$\quad\quad\quad r$	≡Elim *i*, +12
+14	$\quad\quad\quad \sim r$	R +11
+15	$\quad\quad \sim p$	~Wpr (+12)–(+13), (+12)–(+14)
+16	$\quad\quad \sim p \bullet \sim r$	•Wpr +15, +11
+17	$\quad\quad (p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)$	∨Wpr +16
+18	$\quad\quad \sim[(p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)]$	R +1
+19	$\quad r$	~Elim (+11)–(+17), (+11)–(+18)
+20	$\quad p \bullet r$	•Wpr +10, +19
+21	$\quad (p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)$	∨Wpr +20
+22	$\quad \sim[(p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)]$	R +1
+23	$(p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)$	~Elim (+1)–(+21), (+1)–(+22)





Negacja równoważności (NegRówn)





Ćwiczenie III.

Ponieważ reguły podstawiania można stosować również do członów zdań, więc często będzie wiele sposobów zastosowania danej reguły do pewnego zdania. Uzupełnij brakujące informacje.

(a)

1.	$C \equiv D$	Zał.
2.	$\sim\sim(C \equiv D)$	Neg 1
3.	$\sim\sim C \equiv D$	Neg 1
4.	$C \equiv \sim\sim D$	Neg 1

(b)

1.	$\sim A \vee \sim B$	Zał.
2.	$\sim\sim(\sim A \vee \sim B)$	Neg 1
3.	$\sim\sim\sim A \vee \sim B$	Neg 1
4.	$\sim A \vee \sim\sim\sim B$	Neg 1

(c)

1.	$C \bullet \sim\sim A$	Zał.
2.	$\sim\sim(C \bullet \sim\sim A)$	Neg 1
3.	$C \bullet A$	Neg 1
4.	$\sim\sim C \bullet \sim\sim A$	Neg 1
5.	$C \bullet \sim\sim\sim\sim A$	Neg 1

(d)

1.	$\sim\sim(B \rightarrow \sim C)$	Zał.
2.	$B \rightarrow \sim C$	Neg 1
3.	$\sim\sim\sim\sim(B \rightarrow \sim C)$	Neg 1
4.	$\sim\sim(\sim\sim B \rightarrow \sim C)$	Neg 1
5.	$\sim\sim(B \rightarrow \sim\sim\sim C)$	Neg 1

(e)

1.	$\sim(A \vee \sim(B \bullet C))$	Zał.
2.	$\sim A \bullet \sim\sim(B \bullet C)$	DeM 1
3.	$\sim(A \vee (\sim B \vee \sim C))$	DeM 1

(f)

1.	$\sim(\sim D \bullet \sim(A \vee C))$	Zał.
2.	$\sim\sim D \vee \sim\sim(A \vee C)$	DeM 1
3.	$\sim(\sim D \bullet (\sim A \bullet \sim C))$	DeM 1
4.	$\sim\sim(D \vee (A \vee C))$	DeM 1

(g)

1.	$\sim(\sim(\sim A \vee \sim C) \vee \sim(\sim B \bullet \sim D))$	Zał.
2.	$\sim(\sim\sim(A \bullet C) \vee \sim(\sim B \bullet \sim D))$	DeM 1
3.	$\sim(\sim(\sim A \vee \sim C) \vee \sim\sim(B \vee D))$	DeM 1
4.	$\sim((\sim\sim A \bullet \sim\sim C) \vee \sim(\sim B \bullet \sim D))$	DeM 1
5.	$\sim(\sim(\sim A \vee \sim C) \vee (\sim\sim B \vee \sim\sim D))$	DeM 1
6.	$\sim\sim(\sim A \vee \sim C) \bullet \sim\sim(\sim B \bullet \sim D))$	DeM 1

(h)

1.	$C \equiv B$	Zał.
2.	$(C \equiv B) \bullet (C \equiv B)$	Idem 1
3.	$(C \equiv B) \vee (C \equiv B)$	Idem 1
4.	$(C \bullet C) \equiv B$	Idem 1
5.	$C \equiv (B \bullet B)$	Idem 1
6.	$(C \vee C) \equiv B$	Idem 1
7.	$C \equiv (B \vee B)$	Idem 1

(i)

1.	$\sim(A \bullet D)$	Zał.
2.	$\sim(A \bullet D) \bullet \sim(A \bullet D)$	Idem 1
3.	$\sim(A \bullet D) \vee \sim(A \bullet D)$	Idem 1
4.	$\sim((A \bullet A) \bullet D)$	Idem 1
5.	$\sim(A \bullet (D \bullet D))$	Idem 1
6.	$\sim((A \vee A) \bullet D)$	Idem 1
7.	$\sim(A \bullet (D \vee D))$	Idem 1

(j)

1.	$(A \vee B) \bullet (C \equiv D)$	Zał.
2.	$(C \equiv D) \bullet (A \vee B)$	Przem 1
3.	$(B \vee A) \bullet (C \equiv D)$	Przem 1
4.	$(A \vee B) \bullet (D \equiv C)$	Przem 1

(k)

1.	$(A \bullet B) \bullet (C \bullet D)$	Zał.
2.	$((A \bullet B) \bullet C) \bullet D$	Łącz 1
3.	$A \bullet (B \bullet (C \bullet D))$	Łącz 1

(l)

1.	$(A \vee B) \bullet (C \vee D)$	Zał.
2.	$((A \vee B) \bullet C) \vee ((A \vee B) \bullet D)$	Rozdz 1
3.	$(A \bullet (C \vee D)) \vee (B \bullet (C \vee D))$	Rozdz 1
4.	$(A \vee B) \bullet (C \vee D)$	Rozdz 2
5.	$((A \bullet C) \vee (B \bullet C)) \vee ((A \vee B) \bullet D)$	Rozdz 2
6.	$((A \vee B) \bullet C) \vee ((A \bullet D) \vee (B \bullet D))$	Rozdz 2
7.	$(A \vee B) \bullet (C \vee D)$	Rozdz 3
8.	$((A \bullet C) \vee (A \bullet D)) \vee (B \bullet (C \vee D))$	Rozdz 3
9.	$(A \bullet (C \vee D)) \vee ((B \bullet C) \vee (B \bullet D))$	Rozdz 3