

ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

14. DOWODZENIE V

Przykład 1.

1.	$\sim W \bullet \sim S$	Zał.
2.	$W \vee S$	Zał. (\sim Wpr)
3.	$\sim W$	\bullet Elim 1
4.	S	MTP 2, 3
5.	$\sim S$	\bullet Elim 1
6.	$\sim(W \vee S)$	\sim Wpr 2-4, 2-5

Przykład 2.

1.	$\sim(W \vee S)$	Zał.
2.	W	Zał. (\sim Wpr)
3.	$W \vee S$	\vee Wpr 2
4.	$\sim(W \vee S)$	R 1
5.	$\sim W$	\sim Wpr 2-3, 2-4
6.	S	Zał. (\sim Wpr)
7.	$W \vee S$	\vee Wpr 6
8.	$\sim(W \vee S)$	R 1
9.	$\sim S$	\sim Wpr 6-7, 6-8
10.	$\sim W \bullet \sim S$	\bullet Wpr 5, 9

Przykład 3

1.	$\sim F \vee \sim J$	Zał.
2.	$F \bullet J$	Zał. (\sim Wpr)
3.	$\sim F$	Zał. (\sim Wpr)
4.	F	\bullet Elim 2
5.	$\sim F$	R 3
6.	$\sim F$	\sim Wpr 3-4, 3-5
7.	$\sim J$	MTP 1, 6
8.	J	\bullet Elim 2
9.	$\sim(F \bullet J)$	\sim Wpr 2-7, 2-8

Przykład 4

1.	$\sim(F \bullet J)$	Zał.
2.	$\sim(\sim F \vee \sim J)$	Zał. (\sim Elim)
3.	$\sim F$	Zał. (\sim Elim)
4.	$\sim F \vee \sim J$	\vee Wpr 3
5.	$\sim(\sim F \vee \sim J)$	R 2
6.	F	\sim Elim 3-4, 3-5
7.	$\sim J$	Zał. (\sim Elim)
8.	$\sim F \vee \sim J$	\vee Wpr 7
9.	$\sim(\sim F \vee \sim J)$	R 2
10.	J	\sim Elim 7-8, 7-9
11.	$F \bullet J$	\bullet Wpr 6, 10
12.	$\sim(F \bullet J)$	R 1
13.	$\sim F \vee \sim J$	\sim Elim 2-11, 2-12

Przykład 5

1.	$Z \vee R$	Zał.
2.	$\sim Z$	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	R	MTP 1, 2
4.	$\sim Z \rightarrow R$	\rightarrow Wpr 2-3

Przykład 6. Dowód (b) z użyciem reguły DeM

1.	$\sim Z \rightarrow R$	Zał.
2.	$\sim(Z \vee R)$	Zał. (\sim Elim)
3.	$\sim Z \bullet \sim R$	DeM 2
4.	$\sim Z$	\bullet Elim 3
5.	R	\rightarrow Elim 1, 4
6.	$\sim R$	\bullet Elim 3
7.	$Z \vee R$	\sim Elim 2–5, 2–6

Przykład 6. Dowód (b) bez użycia reguły DeM

1.	$\sim Z \rightarrow R$	Zał.
2.	$\sim(Z \vee R)$	Zał. (\sim Elim)
3.	$\sim Z$	Zał. (\sim Elim)
4.	R	\rightarrow Elim 1, 3
5.	$Z \vee R$	\vee Wpr 4
6.	$\sim(Z \vee R)$	R2
7.	Z	\sim Elim 3–5, 3–6
8.	$Z \vee R$	\vee Wpr 7
9.	$\sim(Z \vee R)$	R 2
10.	$Z \vee R$	\sim Elim 2–8, 2–9

Przykład 7. Dowód (a)

1.	$W \rightarrow B$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	W	Zał. (\sim Wpr)
4.	B	\rightarrow Elim 1, 3
5.	$\sim B$	R 2
6.	$\sim W$	\sim Wpr 3–4, 3–5
7.	$\sim B \rightarrow \sim W$	\rightarrow Wpr 2–6

Przykład 8. Dowód (b)

1.	$\sim B \rightarrow \sim W$	Zał.
2.	W	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)
4.	$\sim W$	\rightarrow Elim 1, 3
5.	W	R 2
6.	B	\sim Elim 3–4, 3–5
7.	$W \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 2–6

(a) Zdanie A jest logicznie równoważne zdaniu $\sim\sim A$

1.	A	Zał.
2.	$\sim A$	Zał. (\sim Wpr)
3.	A	R 1
4.	$\sim A$	R 2
5.	$\sim\sim A$	\sim Wpr 2–3, 2–4

1.	$\sim\sim A$	Zał.
2.	$\sim A$	Zał. (\sim Elim)
3.	$\sim\sim A$	R 1
4.	$\sim A$	R 2
5.	A	\sim Elim 2–3, 2–4

(b) Zdanie $A \bullet A$ jest logicznie równoważne zdaniu A

1.	$A \bullet A$	Zał.
2.	A	\bullet Elim 1

1.	A	Zał.
2.	$A \bullet A$	\bullet Wpr 1, 1

(c) Zdanie $A \vee A$ jest logicznie równoważne zdaniu A

1.	$A \vee A$	Zał.
2.	A	Zał. (\vee Elim)
3.	A	R2
4.	A	\vee Elim 1, 2–3, 2–3

1.	A	Zał.
2.	$A \vee A$	\vee Wpr 1

(d) Zdanie $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ jest logicznie równoważne zdaniu $(A \bullet B) \rightarrow C$

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow (B \rightarrow C)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \bullet B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">•Elim 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $B \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">•Elim 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> C</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 4, 5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$(A \bullet B) \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowWpr 2-6</td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.	2.	$A \bullet B$	Zał. (\rightarrow Wpr)	3.	A	•Elim 2	4.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3	5.	B	•Elim 2	6.	C	\rightarrow Elim 4, 5	7.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 2-6	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$(A \bullet B) \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \bullet B$</td> <td style="padding-left: 10px;">•Wpr 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> C</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 1, 4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $B \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowWpr 3-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow (B \rightarrow C)$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowWpr 2-6</td> </tr> </table>	1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.	2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	$A \bullet B$	•Wpr 2, 3	5.	C	\rightarrow Elim 1, 4	6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5	7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6
1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.																																									
2.	$A \bullet B$	Zał. (\rightarrow Wpr)																																									
3.	A	•Elim 2																																									
4.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3																																									
5.	B	•Elim 2																																									
6.	C	\rightarrow Elim 4, 5																																									
7.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 2-6																																									
1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.																																									
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)																																									
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																									
4.	$A \bullet B$	•Wpr 2, 3																																									
5.	C	\rightarrow Elim 1, 4																																									
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5																																									
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6																																									

(e) Zdanie $A \rightarrow B$ jest logicznie równoważne zdaniu $\sim A \vee B$

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\veeWpr 4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simWpr 3-5, 3-6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">8.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\veeWpr 7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">9.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">10.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 2-8, 2-9</td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow B$	Zał.	2.	$\sim(\sim A \vee B)$	Zał. (\sim Elim)	3.	A	Zał. (\sim Wpr)	4.	B	\rightarrow Elim 1, 3	5.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 4	6.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 2	7.	$\sim A$	\sim Wpr 3-5, 3-6	8.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 7	9.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 2	10.	$\sim A \vee B$	\sim Elim 2-8, 2-9	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">R 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 3-4, 3-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowWpr 2-6</td> </tr> </table>	1.	$\sim A \vee B$	Zał.	2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	3.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)	4.	$\sim A$	MTP 1, 3	5.	A	R 2	6.	B	\sim Elim 3-4, 3-5	7.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 2-6
1.	$A \rightarrow B$	Zał.																																																		
2.	$\sim(\sim A \vee B)$	Zał. (\sim Elim)																																																		
3.	A	Zał. (\sim Wpr)																																																		
4.	B	\rightarrow Elim 1, 3																																																		
5.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 4																																																		
6.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 2																																																		
7.	$\sim A$	\sim Wpr 3-5, 3-6																																																		
8.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 7																																																		
9.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 2																																																		
10.	$\sim A \vee B$	\sim Elim 2-8, 2-9																																																		
1.	$\sim A \vee B$	Zał.																																																		
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)																																																		
3.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)																																																		
4.	$\sim A$	MTP 1, 3																																																		
5.	A	R 2																																																		
6.	B	\sim Elim 3-4, 3-5																																																		
7.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 2-6																																																		

(f) Zdanie $\sim(A \rightarrow B)$ jest logicznie równoważne zdaniu $A \bullet \sim B$

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(A \rightarrow B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(A \bullet \sim B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \bullet \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">•Wpr 3,4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(A \bullet \sim B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 4-5, 4-6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">8.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \rightarrow B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowWpr 3-7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">9.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(A \rightarrow B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">10.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \bullet \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 2-8, 2-9</td> </tr> </table>	1.	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał.	2.	$\sim(A \bullet \sim B)$	Zał. (\sim Elim)	3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)	5.	$A \bullet \sim B$	•Wpr 3,4	6.	$\sim(A \bullet \sim B)$	R 2	7.	B	\sim Elim 4-5, 4-6	8.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3-7	9.	$\sim(A \rightarrow B)$	R 1	10.	$A \bullet \sim B$	\sim Elim 2-8, 2-9	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \bullet \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \rightarrow B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">•Elim 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">•Elim 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(A \rightarrow B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simWpr 2-5</td> </tr> </table>	1.	$A \bullet \sim B$	Zał.	2.	$A \rightarrow B$	Zał. (\sim Wpr)	3.	A	•Elim 1	4.	B	\rightarrow Elim 2, 3	5.	$\sim B$	•Elim 1	6.	$\sim(A \rightarrow B)$	\sim Wpr 2-5
1.	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał.																																															
2.	$\sim(A \bullet \sim B)$	Zał. (\sim Elim)																																															
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)																																															
4.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)																																															
5.	$A \bullet \sim B$	•Wpr 3,4																																															
6.	$\sim(A \bullet \sim B)$	R 2																																															
7.	B	\sim Elim 4-5, 4-6																																															
8.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3-7																																															
9.	$\sim(A \rightarrow B)$	R 1																																															
10.	$A \bullet \sim B$	\sim Elim 2-8, 2-9																																															
1.	$A \bullet \sim B$	Zał.																																															
2.	$A \rightarrow B$	Zał. (\sim Wpr)																																															
3.	A	•Elim 1																																															
4.	B	\rightarrow Elim 2, 3																																															
5.	$\sim B$	•Elim 1																																															
6.	$\sim(A \rightarrow B)$	\sim Wpr 2-5																																															

(g) Zdanie $\sim(\sim A \vee B)$ jest logicznie równoważne zdaniu $A \bullet \sim B$

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\veeWpr 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 2-3, 2-4</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\veeWpr 6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">8.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">9.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simWpr 6-7, 6-8</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">10.</td> <td style="padding-left: 5px;">$A \bullet \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\bulletWpr 5, 9</td> </tr> </table>	1.	$\sim(\sim A \vee B)$	Zał.	2.	$\sim A$	Zał. (\sim Elim)	3.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 2	4.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 1	5.	A	\sim Elim 2-3, 2-4	6.	B	Zał. (\sim Wpr)	7.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 6	8.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 1	9.	$\sim B$	\sim Wpr 6-7, 6-8	10.	$A \bullet \sim B$	\bullet Wpr 5, 9	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \bullet \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">\bulletElim 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim \sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simWpr 3-4, 3-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 2, 6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">8.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\bulletElim 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">9.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim(\sim A \vee B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simWpr 2-7, 2-8</td> </tr> </table>	1.	$A \bullet \sim B$	Zał.	2.	$\sim A \vee B$	Zał. (\sim Wpr)	3.	$\sim A$	Zał. (\sim Wpr)	4.	A	\bullet Elim 1	5.	$\sim A$	R 3	6.	$\sim \sim A$	\sim Wpr 3-4, 3-5	7.	B	MTP 2, 6	8.	$\sim B$	\bullet Elim 1	9.	$\sim(\sim A \vee B)$	\sim Wpr 2-7, 2-8
1.	$\sim(\sim A \vee B)$	Zał.																																																								
2.	$\sim A$	Zał. (\sim Elim)																																																								
3.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 2																																																								
4.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 1																																																								
5.	A	\sim Elim 2-3, 2-4																																																								
6.	B	Zał. (\sim Wpr)																																																								
7.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 6																																																								
8.	$\sim(\sim A \vee B)$	R 1																																																								
9.	$\sim B$	\sim Wpr 6-7, 6-8																																																								
10.	$A \bullet \sim B$	\bullet Wpr 5, 9																																																								
1.	$A \bullet \sim B$	Zał.																																																								
2.	$\sim A \vee B$	Zał. (\sim Wpr)																																																								
3.	$\sim A$	Zał. (\sim Wpr)																																																								
4.	A	\bullet Elim 1																																																								
5.	$\sim A$	R 3																																																								
6.	$\sim \sim A$	\sim Wpr 3-4, 3-5																																																								
7.	B	MTP 2, 6																																																								
8.	$\sim B$	\bullet Elim 1																																																								
9.	$\sim(\sim A \vee B)$	\sim Wpr 2-7, 2-8																																																								

(h) Zdanie $\sim(\sim A \bullet B)$ jest logicznie równoważne zdaniu $A \vee \sim B$

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(\sim A \bullet B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(A \vee \sim B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \vee \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\veeWpr 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(A \vee \sim B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 3-4, 3-5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simElim)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">8.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $A \vee \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\veeWpr 7</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">9.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim(A \vee \sim B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">10.</td> <td style="padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 7-8, 7-9</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">11.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim A \bullet B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\bulletWpr 6, 10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">12.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim(\sim A \bullet B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">R 1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">13.</td> <td style="padding-left: 5px;">$A \vee \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simElim 2-11, 2-12</td> </tr> </table>	1.	$\sim(\sim A \bullet B)$	Zał.	2.	$\sim(A \vee \sim B)$	Zał. (\sim Elim)	3.	A	Zał. (\sim Elim)	4.	$A \vee \sim B$	\vee Wpr 3	5.	$\sim(A \vee \sim B)$	R 2	6.	$\sim A$	\sim Elim 3-4, 3-5	7.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)	8.	$A \vee \sim B$	\vee Wpr 7	9.	$\sim(A \vee \sim B)$	R 2	10.	B	\sim Elim 7-8, 7-9	11.	$\sim A \bullet B$	\bullet Wpr 6, 10	12.	$\sim(\sim A \bullet B)$	R 1	13.	$A \vee \sim B$	\sim Elim 2-11, 2-12	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \vee \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A \bullet B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\simWpr)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim A$</td> <td style="padding-left: 10px;">\bulletElim 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> $\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 1, 3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> B</td> <td style="padding-left: 10px;">\bulletElim 2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="padding-left: 5px;">$\sim(\sim A \bullet B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">\simWpr 2-4, 2-5</td> </tr> </table>	1.	$A \vee \sim B$	Zał.	2.	$\sim A \bullet B$	Zał. (\sim Wpr)	3.	$\sim A$	\bullet Elim 2	4.	$\sim B$	MTP 1, 3	5.	B	\bullet Elim 2	6.	$\sim(\sim A \bullet B)$	\sim Wpr 2-4, 2-5
1.	$\sim(\sim A \bullet B)$	Zał.																																																								
2.	$\sim(A \vee \sim B)$	Zał. (\sim Elim)																																																								
3.	A	Zał. (\sim Elim)																																																								
4.	$A \vee \sim B$	\vee Wpr 3																																																								
5.	$\sim(A \vee \sim B)$	R 2																																																								
6.	$\sim A$	\sim Elim 3-4, 3-5																																																								
7.	$\sim B$	Zał. (\sim Elim)																																																								
8.	$A \vee \sim B$	\vee Wpr 7																																																								
9.	$\sim(A \vee \sim B)$	R 2																																																								
10.	B	\sim Elim 7-8, 7-9																																																								
11.	$\sim A \bullet B$	\bullet Wpr 6, 10																																																								
12.	$\sim(\sim A \bullet B)$	R 1																																																								
13.	$A \vee \sim B$	\sim Elim 2-11, 2-12																																																								
1.	$A \vee \sim B$	Zał.																																																								
2.	$\sim A \bullet B$	Zał. (\sim Wpr)																																																								
3.	$\sim A$	\bullet Elim 2																																																								
4.	$\sim B$	MTP 1, 3																																																								
5.	B	\bullet Elim 2																																																								
6.	$\sim(\sim A \bullet B)$	\sim Wpr 2-4, 2-5																																																								

ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

14. DOWODZENIE VII

Dowód 2

1.			p	Zał. (\rightarrow Wpr)
2.			$p \vee r$	\vee Wpr 1
3.			$p \rightarrow (p \vee r)$	\rightarrow Wpr 1-2

Dowód 3 (z użyciem reguł podstawiania)

1.			$\sim(p \vee \sim p)$	Zał. (\sim Elim)
2.			$\sim p \bullet \sim \sim p$	deM 1
3.			$\sim p$	\bullet Elim 2
4.			$\sim \sim p$	\bullet Elim 2
5.			$p \vee \sim p$	\sim Elim 1-3, 1-4

Dowód 3 (z użyciem reguł pierwotnych)

1.			$\sim(p \vee \sim p)$	Zał. (\sim Elim)
2.				
3.				
4.				
5.			$\sim p$	\sim Wpr 2-3, 2-4
6.			$p \vee \sim p$	\vee Wpr 5
7.			$\sim(p \vee \sim p)$	R1
8.			$p \vee \sim p$	\sim Elim 1-6, 1-7

Ćwiczenie I.

- (a)
- | | | |
|----|-------------------|---------------------------|
| 1. | p | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 2. | p | R1 |
| 3. | p \rightarrow p | \rightarrow Wpr 1-2 |
- (b)
- | | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | $(p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow r)$ | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 2. | p | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 3. | p \rightarrow q | \bullet Elim 1 |
| 4. | q | \rightarrow Elim 3, 2 |
| 5. | q \rightarrow r | \bullet Elim 1 |
| 6. | r | \rightarrow Elim 5, 4 |
| 7. | p \rightarrow r | \rightarrow Wpr 2-6 |
| 8. | $((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ | \rightarrow Wpr 1-7 |
- (c)
- | | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | $(p \rightarrow q) \bullet (p \rightarrow r)$ | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 2. | p | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 3. | p \rightarrow q | \bullet Elim 1 |
| 4. | q | \rightarrow Elim 3, 2 |
| 5. | q \rightarrow r | \bullet Elim 1 |
| 6. | r | \rightarrow Elim 5, 4 |
| 7. | q \bullet r | \bullet Wpr 4, 7 |
| 8. | p \rightarrow (q \bullet r) | \rightarrow Wpr 2-7 |
| 9. | $((p \rightarrow q) \bullet (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \bullet r))$ | \rightarrow Wpr 1-8 |
- (d)
- | | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | $(p \rightarrow r) \bullet (p \rightarrow \sim r)$ | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 2. | p | Zał. (\sim Wpr) |
| 3. | p \rightarrow r | \bullet Elim 1 |
| 4. | r | \rightarrow Elim 3, 2 |
| 5. | p \rightarrow $\sim r$ | \bullet Elim 1 |
| 6. | $\sim r$ | \rightarrow Elim 5, 2 |
| 7. | $\sim p$ | \sim Wpr 2-4, 2-6 |
| 8. | $((p \rightarrow r) \bullet (p \rightarrow \sim r)) \rightarrow \sim p$ | \rightarrow Wpr 1-7 |
- (e)
- | | | |
|----|---|---------------------------|
| 1. | p \bullet (q \rightarrow r) | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 2. | p \bullet q | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 3. | q \rightarrow r | \bullet Elim 1 |
| 4. | q | \bullet Elim 2 |
| 5. | r | \rightarrow Elim 3, 4 |
| 6. | (p \bullet q) \rightarrow r | \rightarrow Wpr 2-5 |
| 7. | $(p \bullet (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \bullet q) \rightarrow r)$ | \rightarrow Wpr 1-6 |

(f)

1.	$p \bullet (q \rightarrow r)$	Zał. (\rightarrow Wpr)
2.	q	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	$q \rightarrow r$	•Elim 1
4.	r	\rightarrow Elim 3, 2
5.	p	•Elim 1
6.	$p \bullet r$	•Wpr 5, 4
7.	$q \rightarrow (p \bullet r)$	\rightarrow Wpr 2–6
8.	$(p \bullet (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \bullet r))$	\rightarrow Wpr 1–7

(g)

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Zał. (\equiv Wpr)
2.	q	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	p	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$q \rightarrow r$	\rightarrow Elim 1, 3
5.	r	\rightarrow Elim 4, 2
6.	$p \rightarrow r$	\rightarrow Wpr 3–5
7.	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	\rightarrow Wpr 2–6
8.	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	Zał. (\equiv Wpr)
9.	p	Zał. (\rightarrow Wpr)
10.	q	Zał. (\rightarrow Wpr)
11.	$p \rightarrow r$	\rightarrow Elim 8, 10
12.	r	\rightarrow Elim 11, 9
13.	$q \rightarrow r$	\rightarrow Wpr 10–12
14.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	\rightarrow Wpr 9–13
15.	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (q \rightarrow (p \rightarrow r))$	\rightarrow Wpr 1–14

(h)

1.	$(p \vee q) \bullet ((p \rightarrow r) \bullet (q \rightarrow s))$	Zał. (\rightarrow Wpr)
2.	$p \vee q$	•Elim 1
3.	$(p \rightarrow r) \bullet (q \rightarrow s)$	•Elim 1
4.	p	Zał. (\vee Elim)
5.	$p \rightarrow r$	•Elim 3
6.	r	\rightarrow Elim 5, 4
7.	$r \vee s$	\vee Wpr 6
8.	q	Zał. (\vee Elim)
9.	$q \rightarrow s$	•Elim 3
10.	s	\rightarrow Elim 9, 8
11.	$r \vee s$	\vee Wpr 10
12.	$r \vee s$	\vee Elim 2, 4–7, 8–11
13.	$((p \vee q) \bullet ((p \rightarrow r) \bullet (q \rightarrow s))) \rightarrow (r \vee s)$	\rightarrow Wpr 1–14

Ćwiczenie II.

(a)

1.	$\sim[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)]$	Zał. (\sim Elim)
2.	p	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	$\sim q$	Zał. (\sim Elim)
4.	q	Zał. (\rightarrow Wpr)
5.	p	R2
6.	$q \rightarrow p$	\rightarrow Wpr 4–5
7.	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	\vee Wpr 6
8.	$\sim[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)]$	R1
9.	q	\sim Elim 3–7, 3–8
10.	$p \rightarrow q$	\rightarrow Wpr 2–9
11.	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	\vee Wpr 10
12.	$\sim[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)]$	R1
13.	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	\sim Elim 1–11, 1–12

(b)

1.	$\sim[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)]$	Zał. (\sim Elim)
2.	$\sim(p \rightarrow q) \bullet \sim(q \rightarrow p)$	DeM 1
3.	$\sim(p \rightarrow q)$	\bullet Elim 2
4.	$\sim(q \rightarrow p)$	\bullet Elim 2
5.	$p \bullet \sim q$	NegImpl 3
6.	$q \bullet \sim p$	NegImpl 4
7.	p	\bullet Elim 5
8.	$\sim p$	\bullet Elim 6
9.	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$	\sim Elim 1–7, 1–8