14. DOWODZENIE V: WYNIKANIE LOGICZNEM, RÓWNOWAŻNOŚĆ LOGICZNA, DOWODZENIE TAUTOLOGII

Cele i wprowadzenie

- Pojęcie wynikania logicznego i równoważności logicznej w systemie SD
- Umiejętność wykazywania zachodzenia relacji wynikania logicznego i równoważności logicznej za pomocą dowodów
- umiejętność dowodzenia tautologii

14.1. Wynikanie logiczne

O wniosku wyprowadzanym z założeń pierwotnych często mówiliśmy, że wniosek ten wynika z tych założeń. Istotnie tak eksplikuje się pojęcie wynikania logicznego w systemie SD.

> Zdanie Z_0 wynika logicznie (w systemie SD) ze zbioru zdań $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje w systemie SD dowód, że Z_0 na podstawie zbioru założeń pierwotnych $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$.

Niech wyrażenie '$\Gamma \vdash p$' znaczy tyle, co 'istnieje w systemie SD dowód, że *p* na podstawie zbioru założeń pierwotnych Γ'. Mamy wtedy:

> Zdanie Z_0 wynika logicznie (w systemie SD) ze zbioru zdań $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\} \vdash Z_0$.

Warto zwrócić uwagę, że metoda dowodzenia pozwala na ustalenie związku wynikania logicznego niejako „bezpośrednio". Pamiętamy bowiem, że zastosowanie metody matrycowej do wykazania, że dane zdanie wynika logicznie ze zbioru zdań wiązało się z wykazaniem, że relacja wynikania logicznego zachodzi między właściwymi schematami logicznymi tychże zdań. Stosując metodę dowodzenia nie musimy odwoływać się do właściwych schematów logicznych zdań, aczkolwiek relacja wynikania powinna być uogólniona także na schematy zdaniowe. (Jak pamiętamy, formułami są zarówno zdania jak i schematy zdaniowe.)

> Formuła ψ wynika logicznie (w systemie SD) ze zbioru formuł $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\} \vdash \psi$.

Możemy na tej podstawie zrozumieć też, że logiczna prawidłowość wnioskowania polega na tym, iż wniosek wynika logicznie z przesłanek:

> Wnioskowanie jest logicznie prawidłowe (w systemie SD) zawsze i tylko wtedy, gdy gdy istnieje w systemie SD dowód wniosku na podstawie zbioru przesłanek.

Uwagi proszę kierować na adres:
kpaprzycka@uw.edu.pl

14.2. Zdania równoważne logicznie

Dwa zdania są równoważne logicznie zawsze i tylko wtedy, gdy jedno logicznie wynika z drugiego. Ogólnie:

> Formuła ψ jest logicznie równoważna (w systemie SD) formule φ zawsze i tylko wtedy, gdy $\{\varphi\} \vdash \psi$ oraz gdy $\{\psi\} \vdash \varphi$.

Aby wykazać, że dwa zdania są logicznie rónoważne trzeba skonstruować dwa dowody – w jednym dowodzie wyproadzić musimy jedno zdanie z drugiego, a w drugim – drugie zdanie z pierwszego.

Przypomnijmy sobie równoważności logiczne, które byliśmy w stanie wyczuć już intuicyjnie, a z których korzystaliśmy w Temacie 3 i 4 dotyczącym symbolizacji. Mamy teraz możliwość uzasadnić nasze intuicje stosując metodę dowodzenia

14.2.1. Prawa de Morgana I: 'ani *p*, ani *r*'

Jak pamiętamy uznaliśmy za logicznie równoważne zdania:

(1) Nie jest prawdziwa ani teoria Watsona, ani teoria Skinnera.
(2) Nieprawda, że albo teoria Watsona albo teoria Skinnera jest prawdziwa.

Zdaniom tym odpowiadają logicznie równoważne formuły logiki zdań:

[1] $\sim W \bullet \sim S$
[2] $\sim(W \vee S)$

S: Teoria **S**kinnera jest prawdziwa
W: Teoria **W**atsona jest prawdziwa

Możemy teraz udowodnić, że nasze intuicje nas nie zawodziły, konstruując: (a) dowód, że $\sim(W \vee S)$ na podstawie założenia, że $\sim W \bullet \sim S$ oraz (b) dowód, że $\sim W \bullet \sim S$ na podstawie założenia, że $\sim(W \vee S)$. Pierwszy z tych dowodów jest prostszy.

Przykład 1. Dowód (a)

1.	$\sim W \bullet \sim S$	Zał.
2.	$W \vee S$	Zał. ($\sim$Wpr)
	$\sim(W \vee S)$	

Wskazówki:

W subderywacji należy wyprowadzić bezpośred-nią sprzeczność, może to być albo para zdań ~W i W, albo para zdań ~S i S. Spróbujmy wyprowadzić sprzeczność S i ~S. Drugi element, ~S, jest łatwo dostępny. Skąd wziąć S? Oczywiście z drugiej przesłanki. Aby wyprowadzić S, trzeba najpierw otrzymać negację pierwszego członu alternatywy znajdującej się w wierszu 2, czyli trzeba najpierw otrzymać zdanie ~W. W prosty sposób otrzymamy je z wiersza 1.

Pełen dowód podany jest w *Rozwiązaniach*

Przykład 2. Dowód (b)

1.	$\sim(W \vee S)$	Zał.
	$\sim W \bullet \sim S$	

Wskazówki:

Wniosek jest koniunkcją i możemy w tym wypadku zastosować narzucającą się strategię zastosowania reguły •Wpr. Musimy jednak uzyskać oba człony ~W oraz ~S. Obydwa te człony uzyskamy stosując regułę ~Wpr.

Pełen dowód podany jest w *Rozwiązaniach*

Dowody te stanowią uzasadnienie naszych intuicji dotyczących zdań (1) i (2).

14.2.2. Prawa de Morgana II: 'nie zarówno *p* i *r*'

Jak pamiętamy uznaliśmy za logicznie równoważne zdania:

(1) Teoria Freuda i teoria Junga nie są obie prawdziwe.
(2) Albo teoria Freuda albo teoria Junga jest fałszywa.

Zdaniom tym odpowiadają logicznie równoważne formuły logiki zdań:

[1] $\sim(F \bullet J)$
[2] $\sim F \vee \sim J$

F: Teoria **F**reuda jest prawdziwa
J: Teoria **J**unga jest prawdziwa

Możemy teraz udowodnić, że nasze intuicje nas nie zawodziły, konstruując: (a) dowód, że ~(F • J) na podstawie założenia, że ~F ∨ ~J oraz (b) dowód, że ~F ∨ ~J na podstawie założenia, że ~(F • J). Pierwszy z tych dowodów jest prostszy.

Przykład 3. Dowód (a)

1.	$\sim F \vee \sim J$	Zał.
2.	$F \bullet J$	Zał. (~Wpr)
	$\sim(F \bullet J)$	

Wskazówki:

W subderywacji należy wyprowadzić bezpośrednią sprzeczność, może to być albo para zdań ~F i F, albo para zdań ~J i J. Spróbujmy wyprowadzić sprzeczność J i ~J. Pierwszy element, J, jest łatwo dostępny. Skąd wziąć ~J? Oczywiście z pierwszej przesłanki. Aby wyprowadzić ~J, trzeba najpierw otrzymać negację pierwszego członu alternatywy, czyli trzeba najpierw otrzymać zdanie ~~F. Jedynym sposobem na otrzymanie ~~F jest za pomocą reguły ~Wpr. Trzeba więc skonstruować jeszcze jedną subderywację (wnuczkę) i w niej już łatwo da się znaleźć bezpośrednia sprzeczność.

Pełen dowód podany jest w *Rozwiązaniach*

Przykład 4. Dowód (b)

1.	~(F • J)	Zał.
2.	~(~F ∨ ~J)	Zał. (~Elim)
	~F ∨ ~J	

Wskazówki:

W subderywacji należy wyprowadzić bezpośrednią sprzeczność. Może to być albo para zdań: ~(F • J) i F • J, albo ~(~F ∨ ~J) i ~F ∨ ~J. Gdyby to miała być ta druga para wówczas musielibyśmy wyprowadzić najpierw ~F; jednak wyprowadzenie ~F (za pomocą reguły ~Wpr) nastręczałoby kłopotów (zastanów się jakich). Spróbujmy zatem dążyć do otrzymania pierwszej pary zdań bezpośrednio sprzecznych. ~(F • J) już mamy. Musimy zdobyć F • J stosując regułę •Wpr. Musimy zatem zdobyć swobodnie stojące zdanie F, oraz swobodnie stojące zdanie J. W obydwu wypadkach pozostaje nam tylko ostatnia deska ratunku w postaci reguły ~Elim. Jak skonstruujecie odpowiednie subderywacje, to para zdań bezpośrednio sprzecznych będzie już w zasięgu dwóch reguł.

Pełen dowód podany jest w *Rozwiązaniach*

Dowody te stanowią uzasadnienie naszych intuicji dotyczących zdań (1) i (2).

14.2.3. ‘*p* chyba, że *r*’

Rozważając zdanie:

(1) Rozwiodę się, chyba że się zmienisz.

R: Rozwiodę się
Z: Zmienisz się

doszliśmy do wniosku, że można je sparafrazować na dwa logicznie równoważne sposoby:

(2) Jeżeli się nie zmienisz, to się rozwiodę, czyli: ~Z → R
(3) Albo się zmienisz, albo się rozwiodę, czyli: Z ∨ R

Możemy teraz udowodnić, że nasze intuicje nas nie zawodziły, konstruując: (a) dowód, że ~Z → R na podstawie założenia, że Z ∨ R oraz (b) dowód, że Z ∨ R na podstawie założenia, że ~Z → R. Pierwszy z dowodów jest bardzo prosty i nie wymaga komentarza. Drugi dowód jest trudniejszy, jeżeli ma być przeprowadzany tylko w oparciu o reguły pierwotne. Staje się prostszy jeżeli opiera się na regule podstawiania DeMorgana (DeM), która pozwala zdanie postaci ‘~(*p* ∨ *q*)’ zastąpić zdaniem postaci ‘~*p* • ~*q*’ zastosowanej w kroku 3 (regułę DeM wprowadzimy w Temacie 15):

Przykład 5. Dowód (a)

1.	$Z \lor R$	Zał.

Przykład 6. Dowód (b) **(z regułą DeM)**

1.	$\sim Z \to R$	Zał.
2.	$\sim(Z \lor R)$	Zał. (~Elim)
3.	$\sim Z \bullet \sim R$	DeM 2
	$Z \lor R$	

Rozwiązania zawierają zarówno Dowód (b) z użyciem reguły DeM jak i ten dowód przeprowadzony wyłącznie za pomocą reguł pierwotnych.

Ponownie obydwa dowody stanowią uzasadnienie dla naszych językowych intuicji. Jednocześnie możliwość wykazania tych równoważności pokazuje, że w systemie dedukcji naturalnej ujęte są głębokie prawidła rządzące myślą, które zakodowane są w naszym języku. Niesamowite jest zarówno to, że je intuicyjnie wyczuwamy, jak i to że teraz jesteśmy w stanie lepiej zrozumieć źródła tych zależności.

14.2.4. ‘*r* tylko jeśli *p*’

Rozważając zdanie:

B: Kupisz bilet
W: Wygrasz na loterii

(1) Wygrasz na loterii tylko jeśli kupisz bilet.

doszliśmy do wniosku, że można je sparafrazować na dwa logicznie równoważne sposoby:

(2) Jeżeli wygrasz na loterii, to [znaczy, że] musiałeś kupić bilet; czyli: $W \to B$
(3) Jeżeli nie kupisz biletu, to nie wygrasz na loterii; czyli: $\sim B \to \sim W$

Możemy teraz udowodnić, że nasze intuicje nas nie zawodziły, konstruując: (a) dowód, że $\sim B \to \sim W$ na podstawie założenia, że $W \to B$ oraz (b) dowód, że $W \to B$ na podstawie założenia, że $\sim B \to \sim W$. Obydwa dowody są w miarę proste – pełne dowody znajdują się w *Rozwiązaniach*.

Przykład 7. Dowód (a)

1.	$W \to B$	Zał.
	$\sim B \to \sim W$	

Przykład 8. Dowód (b)

1.	$\sim B \to \sim W$	Zał.
	$W \to B$	

Ćwiczenie I.

Dowiedź, że następującymi pary zdań są logicznie równoważne:

(a)	A	~~A
(b)	A • A	A
(c)	A ∨ A	A
(d)	A → (B → C)	(A • B) → C
(e)	A → B	~A ∨ B
(f)	~(A → B)	A • ~B
(g)	~(~A ∨ B)	A • ~B
(h)	~(~A • B)	A ∨ ~B

14.3. Dowodzenie tautologii

Temat 5 rozpoczęliśmy intuicyjnym rozróżnieniem zdań przygodnie prawdziwych od zdań logicznie prawdziwych, tzn. prawdziwych ze względu na swą strukturę logiczną. Wskazaliśmy wówczas na istnienie tautologii, tzn. schematów zdań logicznie prawdziwych i stosowaliśmy metodę zerojedynkową, aby wykazać tautologiczność takich schematów.

W systemie dedukcji naturalnej SD możemy dowodzić zarówno tautologiczności schematów zdaniowych, jak i logicznej prawdziwości zdań. W obydwu przypadkach dowód taki przybiera charakterystyczną postać wyprowadzenia danego schematu zdaniowego lub zdania bez założeń pierwotnych.

> Schemat zdaniowy α jest tautologią (w systemie SD) zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje w systemie SD dowód, że α na podstawie pustego zbioru założeń pierwotnych, czyli gdy $\varnothing \vdash \alpha$.
>
> Zdanie *Z* jest logicznie prawdziwe (w systemie SD) zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje w systemie SD dowód, że *Z* na podstawie pustego zbioru założeń pierwotnych, czyli gdy $\varnothing \vdash Z$.

Dowód 1: Dowiedź, że ~(*p* • ~*p*) jest tautologią

Spróbujmy dowieść, że ~(*p* • ~*p*) jest tautologią. Podejdziemy do dowodu dokładnie tak, jak do tej pory, z wyjątkiem tego, że nie możemy wpisać żadnych założeń pierwotnych, gdyż ich nie ma. Tautologię ~(*p* • ~*p*) natomiast wpisać musimy na dole linii dowodowej. Musimy skonstruować dowód stanowiący jej uzasadnienie. Przygotowujemy zatem nasz dowód:

```
|
|
|
|
| ~(p • ~p)
```

Mimo porażającej oczy pustki, nasze postępowanie niczym się nie będzie różnić od dotychczasowego. Dowody tautologii i prawd logicznych zawsze będą wymagały zastosowania reguł konstrukcyjnych. W naszym wypadku narzuca się zastosowanie reguły ~Wpr. Musimy zatem skonstruować subderywację o ściśle określonym założeniu dodatkowym:

```
   |
1. |  | p • ~p          Zał. (~Wpr)
   |  |------------
   |  |
   | ~(p • ~p)
```

Założenie to jest pierwszym wierszem przeprowadzanego dowodu. Teraz naszym zadaniem jest znalezienie zdań bezpośrednio sprzecznych, co w powyższym wypadku jest trywialne:

1.	| | $p \bullet {\sim}p$	Zał. (~Wpr)
2.	| | p	•Elim 1
3.	| | ${\sim}p$	•Elim 1
4.	| ${\sim}(p \bullet {\sim}p)$	~Wpr 1–2, 1–3

Dowód 2 – dla przerażonych dowodzeniem tautologii

Zdarza się niekiedy studentom przyzwyczajonym do dowodzenia, że pewne zdanie wynika logicznie z innych, iż trudno im przezwyciężyć porażenie spowodowane wspomnianą już pustką wśród założeń pierwotnych. Na takie kłopoty sugeruję przeprowadzenie następującego dowodu:

1.	| $q \bullet s$	Zał.
	|	
	| $p \rightarrow (p \vee r)$	

Ponieważ mamy wyprowadzić implikację, musimy zastosować regułę →Wpr. Po przygotowaniu subderywacji:

1.	| $q \bullet s$	Zał.
2.	| | p	Zał. (→Wpr)
	| |	
	| | $p \vee r$	
	| $p \rightarrow (p \vee r)$	

strategia dowodzenia narzuca się sama – aby otrzymać alternatywę $p \vee r$ mając dany jej pierwszy człon wystarczy zastosować regułę ∨Wpr.

1.	| $q \bullet s$	Zał.
2.	| | p	Zał. (→Wpr)
3.	| | $p \vee r$	∨Wpr 2
4.	| $p \rightarrow (p \vee r)$	→Wpr 2–3

Ten dowód jest bardzo prosty. Należy jednak zwrócić uwagę, że nie korzysta się w ogóle z przesłanki 1. Istotnie schemat $p \rightarrow (p \vee r)$ jest tautologią – można go wyprowadzić z pustego zbioru przesłanek pierwotnych. Przeprowadź ten dowód (por. *Rozwiązania*):

	|
	| $p \rightarrow (p \vee r)$

Oczywiście istotne przebiegi obu dowodów są identyczne. W pierwszym wypadku wstawiliśmy przesłankę „atrapę", która służyła tylko uśmierzeniu palpitacji serca. Zawsze taką atrapę można sobie postawić, pod warunkiem, że w przesłance tej nie występują żadne zmienne zdaniowe (ew. zdania) występujące w tautologii (ew. zdaniu logicznie prawdziwym), którego mamy dowieść.

Ćwiczenie I.

Dowiedź, że następujące schematy zdaniowe są tautologiami:

(a)	$p \rightarrow p$	
(b)	$\big((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$	prawo sylogizmu hipotetycznego
(c)	$\big((p \rightarrow q) \bullet (p \rightarrow r)\big) \rightarrow \big(p \rightarrow (q \bullet r)\big)$	prawo mnożenia następników
(d)	$\big((p \rightarrow r) \bullet (p \rightarrow {\sim}r)\big) \rightarrow {\sim}p$	prawo redukcji do absurdu
(e)	$\big(p \bullet (q \rightarrow r)\big) \rightarrow \big((p \bullet q) \rightarrow r\big)$	
(f)	$\big(p \bullet (q \rightarrow r)\big) \rightarrow \big(q \rightarrow (p \bullet r)\big)$	
(g)	$\big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big) \equiv \big(q \rightarrow (p \rightarrow r)\big)$	
(h)	$\Big((p \vee q) \bullet \big((p \rightarrow r) \bullet (q \rightarrow s)\big)\Big) \rightarrow (r \vee s)$	prawo dylematu konstrukcyjnego

Dowód 3 – prawo wyłączonego środka

Nie wszystkie dowody tautologii są równie proste – w szczególności jeżeli nie korzysta się z reguł wtórnych i reguł podstawiania. Jednym z trudniejszych dowodów – w oparciu o wspomniane ograniczenia – jest dowód prostego wydawałoby się prawa wyłączonego środka (po lewej stronie umieszczony jest opis strategii; po prawej stronie kolejne etapy konstruowania dowodu – aby lepiej zrozumieć przebieg dowodu wpisz odpowiednie informacje w zaznaczone pola, a potem sprawdź czy wpisane zostały poprawnie):

(A) Mamy wyprowadzić $p \vee {\sim}p$. Narzuca się zastosowanie reguły ∨Wpr, nie mamy jednak żadnego członu, do którego można byłoby coś dodać. Nie mamy też możliwości otrzymania takiego członu. Sytuacja jest beznadziejna, a w takiej sytuacji Babunia radzi „stosuj regułę ~Elim!”:

$p \vee {\sim}p$

(B) Zyskujemy teraz dodatkową informację, ale musimy dążyć do wyprowadzenia jakiejś (choć nie wiemy jakiej) sprzeczności. Ponieważ jednak nie mamy specjalnego wyboru spróbujmy wyprowadzić zdanie sprzeczne z tym właśnie założeniem. Naszym celem pośrednim staje się otrzymanie pary zdań:
$p \vee {\sim}p$
${\sim}(p \vee {\sim}p)$
Drugie z tych zdań otrzymujemy przez powtórzenie. Kłopot tylko z pierwszym.

1.	${\sim}(p \vee {\sim}p)$	Zał. (~Elim)
	$p \vee {\sim}p$	

(C) Musimy się zastanowić, jak otrzymać schemat $p \vee \sim p$. Jest to schemat alternatywy. Dostępne są dwie strategie: (i) albo korzystamy z reguły $\vee$Wpr, (ii) albo korzystamy z reguły ~Elim. Zwróćmy uwagę, że do drugiej strategii już się uciekliśmy (por. (A)). Gdybyśmy to uczynili ponownie wówczas bylibyśmy na dobrej drodze do nieskończonego regresu subderywacji. Spróbujmy zatem wykorzystać strategię (i) i zastosować regułę $\vee$Wpr. Należy też zwrócić uwagę, że obiekcja podniesiona wobec tej strategii w punkcie wyjście (A) przestaje obowiązywać. Teraz już bowiem dysponujemy czymś, a mianowicie założeniem dodatkowym w wierszu 1.

1.	$\sim(p \vee \sim p)$	Zał. (~Elim)
	$p \vee \sim p$	
	$\sim(p \vee \sim p)$	R1
	$p \vee \sim p$	

(D) Aby zastosować regułę $\vee$Wpr do wyprowadzenia $p \vee \sim p$, musimy dysponować jednym z jej członów. W tym momencie możemy obrać za cel dowolny z nich – wybierzmy $\sim p$. Naszym celem jest wyprowadzenie $\sim p$.

1.	$\sim(p \vee \sim p)$	Zał. (~Elim)
	$\sim p$	
	$p \vee \sim p$	
	$\sim(p \vee \sim p)$	R1
	$p \vee \sim p$	

(E) Aby wyprowadzić $\sim p$, spróbujemy zastosować regułę ~Wpr. Konstruujemy więc subderywację, której założeniem dodatkowym jest p. Musimy teraz wyprowadzić jakąś bezpośrednią sprzeczność. Może to być albo:

p
$\sim p$
albo
$p \vee \sim p$
$\sim(p \vee \sim p)$

1.	$\sim(p \vee \sim p)$	Zał. (~Elim)
2.	p	Zał. (~Wpr)
	$\sim p$	
	$p \vee \sim p$	
	$\sim(p \vee \sim p)$	R1
	$p \vee \sim p$	

(F) Chwila refleksji wystarczy aby wybrać tę drugą ewentualność:
$p \vee \sim p$ – otrzymamy przez zastosowanie reguły $\vee$Wpr
$\sim(p \vee \sim p)$ – otrzymamy przez powtórzenie;

Reszta układa się w dowód.

1.	$\sim(p \vee \sim p)$	Zał. (~Elim)
2.	p	Zał. (~Wpr)
	$p \vee \sim p$	
4.	$\sim(p \vee \sim p)$	R1
	$\sim p$	
	$p \vee \sim p$	
	$\sim(p \vee \sim p)$	R1
	$p \vee \sim p$	

Ćwiczenie II.

Spróbuj dowieść (a) bez pomocy reguł podstawiania, (b) z pomocą tych reguł, że następujący schemat zdaniowy jest tautologią: $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.

Ćwiczenie III.

Dowiedź, że wszystkie pozostałe schematy tautologiczne wymienione w Temacie 7 są tautologiami w systemie SD.