

ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

13. DOWODZENIE IV

Przykłady dowodów:

Przykład 1

1.	$(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$	Zał.
2.	A	Zał. (\equiv Wpr)
3.	A \rightarrow B	\bullet Elim 1
4.	B	\rightarrow Elim 3, 2
5.	B	Zał. (\equiv Wpr)
6.	B \rightarrow A	\bullet Elim 1
7.	A	\rightarrow Elim 6, 5
8.	A \equiv B	\equiv Wpr 2–4, 5–7

Przykład 2

1.	A \equiv B	Zał.
2.	C \equiv D	Zał.
3.	A \bullet C	Zał. (\equiv Wpr)
4.	A	\bullet Elim 3
5.	B	\equiv Elim 1, 4
6.	C	\bullet Elim 3
7.	D	\equiv Elim 2, 6
8.	B \bullet D	\bullet Wpr 5, 7
9.	B \bullet D	Zał. (\equiv Wpr)
10.	B	\bullet Elim 9
11.	A	\equiv Elim 1, 10
12.	D	\bullet Elim 9
13.	C	\equiv Elim 2, 12
14.	A \bullet C	\bullet Wpr 11, 13
15.	(A \bullet C) \equiv (B \bullet D)	\equiv Wpr 3–8, 9–14

Przykład 3

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$A \equiv (C \bullet D)$	Zał.
3.	$B \rightarrow (D \bullet G)$	Zał.
4.	A	Zał. (\vee Elim)
5.	$C \bullet D$	\equiv Elim 2, 4
6.	D	\bullet Elim 5
7.	B	Zał. (\vee Elim)
8.	$D \bullet G$	\rightarrow Elim 3, 7
9.	D	\bullet Elim 8
10.	D	\vee Elim 1, 4–6, 7–9

Przykład 4

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	$B \bullet \sim C$	Zał.
3.	A	Zał. (\sim Wpr)
4.	B	\bullet Elim 2
5.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 3, 4
6.	C	\rightarrow Elim 1, 5
7.	$\sim C$	\bullet Elim 2
8.	$\sim A$	\sim Wpr 3–6, 3–7

Przykład 6

1.	$\sim A \rightarrow B$	Zał.
2.	$B \rightarrow A$	Zał.
3.	$\sim A$	Zał. (\sim Elim)
4.	$\sim A$	R3
5.	B	\rightarrow Elim 1, 4
6.	A	\rightarrow Elim 2, 5
7.	A	\sim Elim 3–4, 3–6

\equiv Wpr.I.a.

(a)

3.	B	Zał. (\equiv Wpr)
5.	A	
6.	A	Zał. (\equiv Wpr)
8.	B	
9.	$B \equiv A$	\equiv Wpr 3–5, 6–8

(b)

3.	C	Zał. (\equiv Wpr)
5.	$\sim A$	
6.	$\sim A$	Zał. (\equiv Wpr)
8.	C	
9.	$C \equiv \sim A$	\equiv Wpr 3–5, 6–8

(c)

3.	$B \rightarrow C$	Zał. (\equiv Wpr)
5.	$C \rightarrow B$	
6.	$C \rightarrow B$	Zał. (\equiv Wpr)
8.	$B \rightarrow C$	
9.	$(B \rightarrow C) \equiv (C \rightarrow B)$	\equiv Wpr 3–5, 6–8

(d)

3.	$A \vee C$	Zał. (\equiv Wpr)
5.	$\sim C \rightarrow A$	
6.	$\sim C \rightarrow A$	Zał. (\equiv Wpr)
8.	$A \vee C$	
9.	$(A \vee C) \equiv (\sim C \rightarrow A)$	\equiv Wpr 3–5, 6–8

→Wpr.I.b.

(a)

3	D	Zał. (≡Wpr)
5	A	
6	A	Zał. (≡Wpr)
8	D	
9	D ≡ A ≡Wpr 3–5, 6–8	

(b)

3	A → C	Zał. (≡Wpr)
5	C → B	
6	C → B	Zał. (≡Wpr)
8	A → C	
9	(A → C) ≡ (C → B) ≡Wpr 3–5, 6–8	

(c)

3	¬¬B	Zał. (≡Wpr)
5	¬(A • ¬B)	
6	¬(A • ¬B)	Zał. (≡Wpr)
8	¬¬B	
9	¬¬B ≡ ¬(A • ¬B) ≡Wpr 3–5, 6–8	

(d)

3	A ≡ B	Zał. (≡Wpr)
5	C	
6	C	Zał. (≡Wpr)
8	A ≡ B	
9	(A ≡ B) ≡ C ≡Wpr 3–5, 6–8	

≡Wpr.II.

(a) Dowieść, że: C ≡ D

1.	A ∨ C	Zał.
2.	D • ¬A	Zał.
3.	C	Zał. (≡Wpr)
4.	D	•Elim 2
5.	D	Zał. (≡Wpr)
6.	¬A	•Elim 2
7.	C	MTP 1, 6
8.	C ≡ D ≡Wpr 3–4, 5–7	

(b) Dowieść, że: ¬A ≡ ¬C

1.	¬A ∨ C	Zał.
2.	A ∨ ¬C	Zał.
3.	¬A	Zał. (≡Wpr)
4.	¬C	MTP 2, 3
5.	¬C	Zał. (≡Wpr)
6.	¬A	MTP 1, 5
7.	¬A ≡ ¬C ≡Wpr 3–4, 5–6	

(c) Dowieść, że: A ≡ C

1.	A ≡ B	Zał.
2.	B ≡ C	Zał.
3.	A	Zał. (≡Wpr)
4.	B	≡Elim 1, 3
5.	C	≡Elim 2, 4
6.	C	Zał. (≡Wpr)
7.	B	≡Elim 2, 6
8.	A	≡Elim 1, 7
9.	A ≡ C ≡Wpr 3–5, 6–8	

(d) Dowieść, że: D

1.	(A ≡ A) → B	Zał.
2.	B ≡ D	Zał.
3.	A	Zał. (≡Wpr)
4.	A	R 3
5.	A ≡ A	≡Wpr 3–4, 3–4
6.	B	→Elim 1, 5
7.	D ≡Elim 2, 6	

\vee Elim.I.a.

(a)

2	$B \vee A$	
3	B	Zał. (\vee Elim)
5	C	
6	A	Zał. (\vee Elim)
8	C	
9	C	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(b)

2	$\sim C \vee D$	
3	$\sim C$	Zał. (\vee Elim)
5	A	
6	D	Zał. (\vee Elim)
8	A	
9	A	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(c)

2	$(D \rightarrow A) \vee (A \vee C)$	
3	$D \rightarrow A$	Zał. (\vee Elim)
5	$\sim B \equiv A$	
6	$A \vee C$	Zał. (\vee Elim)
8	$\sim B \equiv A$	
9	$\sim B \equiv A$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(d)

2	$\sim A \vee \sim B$	
3	$\sim A$	Zał. (\vee Elim)
5	$B \rightarrow A$	
6	$\sim B$	Zał. (\vee Elim)
8	$B \rightarrow A$	
9	$B \rightarrow A$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

\vee Elim.I.b.

(a)

2	$D \vee B$	
3	D	Zał. (\vee Elim)
5	C	
6	B	Zał. (\vee Elim)
8	C	
9	C	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(b)

2	$A \vee B$	
3	A	Zał. (\vee Elim)
5	$C \vee A$	
6	B	Zał. (\vee Elim)
8	$C \vee A$	
9	$C \vee A$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(c)

2	$C \vee (A \vee B)$	
3	C	Zał. (\vee Elim)
5	$\sim D \vee \sim B$	
6	$A \vee B$	Zał. (\vee Elim)
8	$\sim D \vee \sim B$	
9	$\sim D \vee \sim B$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(d)

2	$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	
3	$A \rightarrow B$	Zał. (\vee Elim)
5	$A \vee B$	
6	$B \rightarrow A$	Zał. (\vee Elim)
8	$A \vee B$	
9	$A \vee B$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

\vee Elim.I.c.

(a)

2	$A \vee \sim A$	
3	A	Zał. (\vee Elim)
5	C	
6	$\sim A$	Zał. (\vee Elim)
8	C	
9	C	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(b)

2	$\sim B \vee \sim\sim D$	
3	$\sim B$	Zał. (\vee Elim)
5	$\sim\sim C$	
6	$\sim\sim D$	Zał. (\vee Elim)
8	$\sim\sim C$	
9	$\sim\sim C$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(c)

2	$(A \vee B) \vee (B \equiv C)$	
3	$A \vee B$	Zał. (\vee Elim)
5	$\sim B$	
6	$B \equiv C$	Zał. (\vee Elim)
8	$\sim B$	
9	$\sim B$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

(d)

2	$(A \bullet B) \vee (B \bullet A)$	
3	$A \bullet B$	Zał. (\vee Elim)
5	$B \bullet A$	
6	$B \bullet A$	Zał. (\vee Elim)
8	$B \bullet A$	
9	$B \bullet A$	\vee Elim 2, 3–5, 6–8

\vee Elim.II.

(a) Dowieść, że: B

1.	$\sim A \vee B$	Zał.
2.	$\sim A \rightarrow B$	Zał.
3.	$\sim A$	Zał. (\vee Elim)
4.	B	\rightarrow Elim 2, 3
5.	B	Zał. (\vee Elim)
6.	B	R5
7.	B	\vee Elim 1, 3–4, 5–6

(b) Dowieść, że: C

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$(A \rightarrow C) \bullet (B \rightarrow C)$	Zał.
3.	A	Zał. (\vee Elim)
4.	$A \rightarrow C$	\bullet Elim 2
5.	C	\rightarrow Elim 4, 3
6.	B	Zał. (\vee Elim)
7.	$B \rightarrow C$	\bullet Elim 2
8.	C	\rightarrow Elim 7, 6
9.	C	\vee Elim 1, 3–5, 6–8

(c) Dowieść, że: $D \vee G$

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$(A \vee C) \rightarrow D$	Zał.
3.	$G \equiv (\sim A \vee B)$	Zał.
4.	A	Zał. (\vee Elim)
5.	$A \vee C$	\vee Wpr 4
6.	D	\rightarrow Elim 2, 5
7.	$D \vee G$	\vee Wpr 6
8.	B	Zał. (\vee Elim)
9.	$\sim A \vee B$	\vee Wpr 8
10.	G	\equiv Elim 3, 9
11.	$D \vee G$	\vee Wpr 10
12.	$D \vee G$	\vee Elim 1, 4–7, 8–11

(d) Dowieść, że: $H \bullet B$ (wersja A)

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$A \rightarrow (G \vee H)$	Zał.
3.	$G \equiv H$	Zał.
4.	B	•Elim 1
5.	A	•Elim 1
6.	$G \vee H$	\rightarrow Elim 2, 5
7.	G	Zał. (\vee Elim)
8.	H	\equiv Elim 3, 7
9.	$H \bullet B$	•Wpr 8, 4
10.	H	Zał. (\vee Elim)
11.	$H \bullet B$	•Wpr 10, 4
12.	$H \bullet B$	\vee Elim 6, 7–9, 10–11

(d) Dowieść, że: $H \bullet B$ (wersja B)

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$A \rightarrow (G \vee H)$	Zał.
3.	$G \equiv H$	Zał.
4.	B	•Elim 1
5.	A	•Elim 1
6.	$G \vee H$	\rightarrow Elim 2, 5
7.	G	Zał. (\vee Elim)
8.	H	\equiv Elim 3, 7
9.	H	Zał. (\vee Elim)
10.	H	R 9
11.	H	\vee Elim 6, 7–8, 9–10
12.	$H \bullet B$	•Wpr 11, 4

(e) Dowieść, że: $G \bullet H$

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$A \rightarrow (G \vee H)$	Zał.
3.	$G \equiv H$	Zał.
4.	A	•Elim 1
5.	$G \vee H$	\rightarrow Elim 2, 4
6.	G	Zał. (\vee Elim)
7.	H	\equiv Elim 3, 6
8.	$G \bullet H$	•Wpr 6, 7
9.	H	Zał. (\vee Elim)
10.	G	\equiv Elim 3, 9
11.	$G \bullet H$	•Wpr 10, 9
12.	$G \bullet H$	\vee Elim 5, 6–8, 9–11

(f) Dowieść, że: D

1.	$(B \vee A) \rightarrow D$	Zał.
2.	$A \vee (B \vee C)$	Zał.
3.	$C \equiv D$	Zał.
4.	A	Zał. (\vee Elim)
5.	$B \vee A$	\vee Wpr 4
6.	D	\rightarrow Elim 1, 5
7.	$B \vee C$	Zał. (\vee Elim)
8.	B	Zał. (\vee Elim)
9.	$B \vee A$	\vee Wpr 8
10.	D	\rightarrow Elim 1, 9
11.	C	Zał. (\vee Elim)
12.	D	\equiv Elim 3, 11
13.	D	\vee Elim 7, 8–10, 11–12
14.	D	\vee Elim 2, 4–6, 7–13

Ćwiczenia na stosowanie reguły \sim Wpr

\sim Wpr.I.a.

	p	$\sim p$		p	$\sim p$
(a)	A	$\sim A$	(g)	$C \bullet \sim D$	$\sim(C \bullet \sim D)$
(b)	$A \vee B$	$\sim(A \vee B)$	(h)	$\sim A \equiv \sim(A \bullet B)$	$\sim(\sim A \equiv \sim(A \bullet B))$
(c)	$\sim(A \bullet B)$	$\sim\sim(A \bullet B)$	(i)	$\sim(C \rightarrow B)$	$\sim\sim(C \rightarrow B)$
(d)	$\sim A \vee B$	$\sim(\sim A \vee B)$	(j)	$\sim A \equiv C$	$\sim(\sim A \equiv C)$
(e)	$\sim\sim A$	$\sim\sim\sim A$	(k)	$\sim\sim\sim C$	$\sim\sim\sim\sim C$
(f)	$\sim B$	$\sim\sim B$	(l)	$\sim B \bullet B$	$\sim(\sim B \bullet B)$

\sim Wpr.I.b.

(a)

3	B	Zał. (\sim Wpr)
5	$\sim C$	
8	C	
9	$\sim B$	\sim Wpr 3-5, 3-8

(b)

3	$A \vee B$	Zał. (\sim Wpr)
5	$\sim C$	
8	$\sim\sim C$	
9	$\sim(A \vee B)$	\sim Wpr 3-5, 3-8

(c)

3	$\sim B$	Zał. (\sim Wpr)
5	$\sim C \vee D$	
8	$\sim(\sim C \vee D)$	
9	$\sim\sim B$	\sim Wpr 3-5, 3-8

(d)

3	$\sim A \bullet \sim B$	Zał. (\sim Wpr)
5	$\sim C$	
8	$\sim\sim C$	
9	$\sim(\sim A \bullet \sim B)$	\sim Wpr 3-5, 3-8

~Wpr.I.c.

(a)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (~Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">~A</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">8</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">9</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">~C</td> <td>~Wpr 3-5, 3-8</td> </tr> </table>	3	C	Zał. (~Wpr)	5	~A		8	A		9	~C	~Wpr 3-5, 3-8
3	C	Zał. (~Wpr)											
5	~A												
8	A												
9	~C	~Wpr 3-5, 3-8											

(b)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">~A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (~Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">~B</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">8</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">9</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">~~A</td> <td>~Wpr 3-5, 3-8</td> </tr> </table>	3	~A	Zał. (~Wpr)	5	~B		8	B		9	~~A	~Wpr 3-5, 3-8
3	~A	Zał. (~Wpr)											
5	~B												
8	B												
9	~~A	~Wpr 3-5, 3-8											

(c)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (~Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(C \bullet B)$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">8</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$C \bullet B$</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">9</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(A \vee B)$</td> <td>~Wpr 3-5, 3-8</td> </tr> </table>	3	$A \vee B$	Zał. (~Wpr)	5	$\sim(C \bullet B)$		8	$C \bullet B$		9	$\sim(A \vee B)$	~Wpr 3-5, 3-8
3	$A \vee B$	Zał. (~Wpr)											
5	$\sim(C \bullet B)$												
8	$C \bullet B$												
9	$\sim(A \vee B)$	~Wpr 3-5, 3-8											

(d)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">3</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim(A \rightarrow B)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (~Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">5</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">~C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">8</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">9</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim\sim(A \rightarrow B)$</td> <td>~Wpr 3-5, 3-8</td> </tr> </table>	3	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał. (~Wpr)	5	~C		8	C		9	$\sim\sim(A \rightarrow B)$	~Wpr 3-5, 3-8
3	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał. (~Wpr)											
5	~C												
8	C												
9	$\sim\sim(A \rightarrow B)$	~Wpr 3-5, 3-8											

Ćwiczenia na dowodzenie z regułami ~Wpr**~Wpr.II.**(a) Dowieść, że: $\sim A$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$A \rightarrow \sim B$	Zał.
3.	A	Zał. (~Wpr)
4.	B	\rightarrow Elim 1, 3
5.	~B	\rightarrow Elim 2, 3
6.	~A	~Wpr 3-4, 3-5

(b) Dowieść, że: $\sim\sim C$

1.	$C \bullet B$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	~C	Zał. (~Wpr)
4.	C	•Elim 1
5.	~C	R 3
6.	~~C	~Wpr 3-4, 3-5

(c) Dowieść, że: $\sim(A \bullet B)$ [wersja A]

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$B \rightarrow \sim\sim D$	Zał.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	Zał.
4.	$A \bullet B$	Zał. (~Wpr)
5.	A	•Elim 4
6.	C	\rightarrow Elim 1, 5
7.	~C	•Elim 3
8.	~(A • B)	~Wpr 4-6, 4-7

(c) Dowieść, że: $\sim(A \bullet B)$ [wersja B]

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$B \rightarrow \sim\sim D$	Zał.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	Zał.
4.	$A \bullet B$	Zał. (~Wpr)
5.	B	•Elim 4
6.	~~D	\rightarrow Elim 2, 5
7.	~D	•Elim 3
8.	~(A • B)	~Wpr 4-6, 4-7

(d) Dowieść, że: $\sim(A \equiv B)$

1.	$(A \equiv B) \rightarrow C$	Zał.
2.	$\sim(C \vee A)$	Zał.
3.	$A \equiv B$	Zał. (~Wpr)
4.	C	\rightarrow Elim 1, 3
5.	$C \vee A$	\vee Wpr 4
6.	~($C \vee A$)	R 2
7.	~(A ≡ B)	~Wpr 3-5, 3-6

Ćwiczenia na stosowanie reguły \sim Elim

\sim Elim.I.a.

(a)

3	$\sim A$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim C$	
8	C	
9	A	\sim Elim 3–5, 3–8

(b)

3	$\sim\sim B$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim C$	
8	$\sim\sim C$	
9	$\sim B$	\sim Elim 3–5, 3–8

(c)

3	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim C \vee D$	
8	$\sim(\sim C \vee D)$	
9	$A \rightarrow B$	\sim Elim 3–5, 3–8

(d)

3	$\sim\sim(\sim A \bullet \sim B)$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim C$	
8	$\sim\sim C$	
9	$\sim(\sim A \bullet \sim B)$	\sim Elim 3–5, 3–8

\sim Elim.I.b.

(a)

3	$\sim\sim C$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim(A \bullet B)$	
8	$A \bullet B$	
9	$\sim C$	\sim Elim 3–5, 3–8

(b)

3	$\sim A$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim(B \vee C)$	
8	$B \vee C$	
9	A	\sim Elim 3–5, 3–8

(c)

3	$\sim(\sim A \equiv B)$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim(\sim C \bullet B)$	
8	$\sim C \bullet B$	
9	$\sim A \equiv B$	\sim Elim 3–5, 3–8

(d)

3	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał. (\sim Elim)
5	$\sim(A \rightarrow B)$	
8	$A \rightarrow B$	
9	$A \rightarrow B$	\sim Elim 3–5, 3–8

~Elim.II.

(a) Dowieść, że: A

1.	$\sim A \bullet C$	Zał.
2.	$B \bullet \sim D$	Zał.
3.	$\sim A$	Zał. (~Elim)
4.	$\sim A$	•Elim 1
5.	$\sim A$	R3
6.	A	~Elim 3–4, 3–5

(b) Dowieść, że: $\sim C$ [wersja 1]

1.	$\sim C \vee (B \vee \sim C)$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	$\sim \sim C$	Zał. (~Elim)
4.	$B \vee \sim C$	MTP 1, 3
5.	B	MTP 3, 4
6.	$\sim B$	R 2
7.	$\sim C$	~Elim 3–5, 3–6

(b) Dowieść, że: $\sim C$ [wersja 2]

1.	$\sim C \vee (B \vee \sim C)$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	$\sim \sim C$	Zał. (~Elim)
4.	$B \vee \sim C$	MTP 1, 3
5.	$\sim C$	MTP 2, 4
6.	$\sim C$	R 3
7.	$\sim C$	~Elim 3–5, 3–6

(c) Dowieść, że: $A \bullet B$

1.	$\sim(A \bullet B) \rightarrow (C \bullet D)$	Zał.
2.	$\sim D \bullet \sim B$	Zał.
3.	$\sim(A \bullet B)$	Zał. (~Elim)
4.	$C \bullet D$	→Elim 1, 3
5.	D	•Elim 4
6.	$\sim D$	•Elim 2
7.	$A \bullet B$	~Elim 3–5, 3–6

(d) Dowieść, że: C

1.	$\sim C \rightarrow \sim B$	Zał.
2.	$\sim A \bullet (\sim B \rightarrow B)$	Zał.
3.	$\sim C$	Zał. (~Elim)
4.	$\sim B$	→Elim 1, 3
5.	$\sim B \rightarrow B$	•Elim 2
6.	B	→Elim 4, 5
7.	C	~Elim 3–4, 3–6

(e) Dowieść, że: $\sim(A \vee B)$ [wersja A]

1.	A → C	Zał.
2.	B → $\sim \sim D$	Zał.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	Zał.
4.	A ∨ B	Zał. (~Wpr)
5.	A	Zał. (∨Elim)
6.	C	→Elim 1, 5
7.	$\sim C$	•Elim 3
8.	C • $\sim C$	•Wpr 6, 7
9.	B	Zał. (∨Elim)
10.	$\sim(C \bullet \sim C)$	Zał. (~Elim)
11.	$\sim \sim D$	→Elim 2, 9
12.	$\sim D$	•Elim 3
13.	C • $\sim C$	~Elim 10–11, 10–12
14.	C • $\sim C$	∨Elim 4, 5–8, 9–13
15.	C	•Elim 14
16.	$\sim C$	•Elim 14
17.	$\sim(A \vee B)$	~Wpr 4–15, 4–16

(e) Dowieść, że: $\sim(A \vee B)$ [wersja B]

1.	A → C	Zał.
2.	B → $\sim \sim D$	Zał.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	Zał.
4.	A ∨ B	Zał. (~Wpr)
5.	A	Zał. (~Wpr)
6.	C	→Elim 1, 5
7.	$\sim C$	•Elim 3
8.	$\sim A$	~Wpr 5–6, 5–7
9.	B	MTP 4, 8
10.	$\sim \sim D$	→Elim 2, 9
11.	$\sim D$	•Elim 3
12.	$\sim(A \vee B)$	~Wpr 4–10, 4–11