13. DOWODZENIE IV: REGUŁY ≡WPR, ∨ELIM, ~WPR, ~ELIM

Cele i wprowadzenie

- Umiejętność stosowania reguł pierwotnych ≡Wpr, ∨Elim, ~Wpr, ~Elim
- Umiejętność przeprowadzania prostych dowodów z użyciem tych reguł

13.1. Reguła ≡Wpr (Reguła dołączania równoważności)

Jeżeli w jednej subderywacji dowodu macierzystego, której założeniem jest *p* można wyprowadzić (swobodnie występujące) *r*, a w drugiej subderywacji dowodu macierzystego, której założeniem jest *r* można wyprowadzić (swobodnie występujące) *p,* to do dowodu macierzystego wolno dołączyć wiersz, gdzie (swodobnie) występuje równoważność *p* ≡ *r*.

i.	| | *p*	Zał. (≡Wpr)
j.	| | *r*	
k.	| | *r*	Zał. (≡Wpr)
l.	| | *p*	
➢	| *p* ≡ *r*	≡ Wpr *i*–*j*, *k*–*l*

Intuicje

Jeśli z założenia, że *p*, można wyprowadzić *r*, to prawdziwą jest implikacja *p* → *r* (*p* tylko wtedy, gdy *r*); a jeżeli z założenia, że *r* można wyprowadzić *p*, to prawdziwą jest implikacja *r* → *p* (*p* wtedy, gdy *r*). Zatem jeżeli z założenia, że *p* można wyprowadzić *r,* a z założenia, że *r* można wyprowadzić *p*, to prawdziwą jest równoważność *p* ≡ *r* (*p* wtedy i tylko wtedy, gdy *r*).

Konstruowanie subderywacji dla Reguły ≡Wpr

Reguła wprowadzania równoważności jest regułą konstrukcyjną. Zawsze, gdy chcemy wprowadzić równoważność musimy najpierw skonstruować dwie subderywacje siostrzane, a reguła ≡Wpr *ściśle determinuje*, jakie muszą być ich założenia dodatkowe oraz jakie muszą być ich wnioski.

Uwagi proszę kierować na adres:
kpaprzycka@uw.edu.pl

Ćwiczenia na stosowanie reguły ≡Wpr

≡Wpr.I.a. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych" określ jaką równoważność można wyprowadzić w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

(a)

3	B	Zał. (≡Wpr)
5	A	
6	A	Zał. (≡Wpr)
8	B	
9		≡Wpr 3–5, 6–8

(b)

3	C	Zał. (≡Wpr)
5	~A	
6	~A	Zał. (≡Wpr)
8	C	
9		≡Wpr 3–5, 6–8

(c)

3	B → C	Zał. (≡Wpr)
5	C → B	
6	C → B	Zał. (≡Wpr)
8	B → C	
9		≡Wpr 3–5, 6–8

(d)

3	A ∨ C	Zał. (≡Wpr)
5	~C → A	
6	~C → A	Zał. (≡Wpr)
8	A ∨ C	
9		≡Wpr 3–5, 6–8

→Wpr.I.b. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych" wpisz założenia dodatkowe subderywacji oraz wnioski, jakie trzeba będzie w nich wyprowadzić, aby można było zastosować regułę ≡Wpr w kroku 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna.)

(a)

3		Zał. (≡Wpr)
5		
6		Zał. (≡Wpr)
8		
9	D ≡ A	≡Wpr 3–5, 6–8

(b)

3		Zał. (≡Wpr)
5		
6		Zał. (≡Wpr)
8		
9	(A → C) ≡ (C → B)	≡Wpr 3–5, 6–8

(c)

3		Zał. (≡Wpr)
5		
6		Zał. (≡Wpr)
8		
9	~~B ≡ ~(A • ~B)	≡Wpr 3–5, 6–8

(d)

3		Zał. (≡Wpr)
5		
6		Zał. (≡Wpr)
8		
9	(A ≡ B) ≡ C	≡Wpr 3–5, 6–8

13.2. Przykłady prostych dowodów z zastosowaniem reguły ≡Wpr

Przykład 1.

W poprzednim temacie dowiedliśmy, że z równoważności A ≡ B wynika koniunkcja (A → B) • (B → A). Możemy teraz dowieść, że z tej koniunkcji wynika też owa równoważność. Jedyna trudność w tym dowodzie polega na uświadomieniu sobie, że ponieważ wniosek, który mamy wyprowadzić jest równoważnością więc musimy zastosować regułę ≡Wpr aby go wyprowadzić, a to pociąga za sobą skonstruowanie dwóch siostrzanych derywacji.

1.	(A → B) • (B → A)	Zał.
2.	A	Zał. (≡Wpr)
	B	
	B	Zał. (≡Wpr)
	A	
	A ≡ B	

Teraz pozostaje niezależne wyprowadzenie wniosków w obydwu siostrzanych subderywacjach (musimy pamiętać, że siostry nie wymieniają się tajemnicami!). Dokończ dowód samodzielnie i sprawdź z *Rozwiązaniami.*

Przykład 2.

Dowieść, że (A • C) ≡ (B • D) wynika z dwóch przesłanek: A ≡ B oraz C ≡ D. Dowód ten ponownie nie jest trudny, pod warunkiem, że prawidłowo go skonstruujemy:

1.	A ≡ B	Zał.
2.	C ≡ D	Zał.
3.	A • C	Zał. (≡Wpr)
	B • D	
	B • D	Zał. (≡Wpr)
	A • C	
	(A • C) ≡ (B • D)	

Rozwiązania ponownie zawierają całość dowodu.

Ćwiczenia na dowodzenie z regułą ≡Wpr

≡Wpr.II. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: $C \equiv D$

1.	$A \vee C$	Zał.
2.	$D \bullet \sim A$	Zał.

(b) Dowieść, że: $\sim A \equiv \sim C$

1.	$\sim A \vee C$	Zał.
2.	$A \vee \sim C$	Zał.

(c) Dowieść, że: $A \equiv C$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.

(d) Dowieść, że: D

1.	$(A \equiv A) \rightarrow B$	Zał.
2.	$B \equiv D$	Zał.

13.3. Reguła ∨Elim (Reguła opuszczania alternatywy)

Jeżeli we wcześniejszym wierszu danego dowodu macierzystego występuje pewna alternatywa, a z obydwu jej członów można (w dwóch siostrzanych subderywacjach, których założeniami są kolejne człony tej alternatywy) wyprowadzić (swobodnie występujące) *r*, to wolno do dowodu macierzystego dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje *r*.

i.	$p \vee q$	
j.	p	Zał. (∨Elim)
k.	r	
l.	q	Zał. (∨Elim)
m.	r	
➢	r	∨Elim *i*, *j*–*k*, *l*–*m*

Intuicje

Wpisz wniosek w następującym rozumowaniu.

Zosia zje na Wigilię albo makowiec albo sernik

Załóżmy, że Zosia zje makowiec na Wigilię

Zosia przytyje

Załóżmy, że Zosia zje sernik na Wigilię

Zosia przytyje

Konstruowanie subderywacji dla Reguły ∨Elim

Reguła eliminacji alternatywy jest regułą konstrukcyjną. Gdy chcemy skorzystać z informacji zawartej w alternatywie możemy skorzystać z reguły ∨Elim. Podobnie jak wprowadzone dotąd reguły konstrukcyjne →Wpr oraz ≡Wpr, reguła ∨Elim *determinuje ściśle*, jakie mają być założenia dodatkowe siostrzanych subderywacji wymaganych przez tę regułę – muszą to być kolejne człony alternatywy, z której mamy wyciągnąć informację.

W przeciwieństwie jednak do reguł →Wpr oraz ≡Wpr, «eliminowana» alternatywa $p \vee q$ nie określa, jaki ma być wniosek tych subderywacji. Reguła wymaga tylko, aby w obydwu siostrzanych subderywacjach wyprowadzić ten sam wniosek, który następnie – na mocy reguły ∨Elim – możemy wprowadzić do derywacji macierzystej. Jaki to będzie wniosek, będzie uzależnione od tego, czego w dowodzie potrzebujemy.

Ćwiczenia na stosowanie reguły ∨Elim

∨Elim.I.a. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” określ jakie zdanie można wyprowadzić w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

(a)

2	B ∨ A	
3	B	Zał. (∨Elim)
5	C	
6	A	Zał. (∨Elim)
8	C	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

(b)

2	~C ∨ D	
3	~C	Zał. (∨Elim)
5	A	
6	D	Zał. (∨Elim)
8	A	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

(c)

2	(D → A) ∨ (A ∨ C)	
3	D → A	Zał. (∨Elim)
5	~B ≡ A	
6	A ∨ C	Zał. (∨Elim)
8	~B ≡ A	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

(d)

2	~A ∨ ~B	
3	~A	Zał. (∨Elim)
5	B → A	
6	~B	Zał. (∨Elim)
8	B → A	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

∨Elim.I.b. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” wpisz założenia dodatkowe subderywacji oraz wnioski, jakie trzeba będzie w nich wyprowadzić, aby można było zastosować regułę ∨Elim w kroku 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna.)

(a)

2	D ∨ B	
3		Zał. (∨Elim)
5		
6		Zał. (∨Elim)
8		
9	C	∨Elim 2, 3–5, 6–8

(b)

2	A ∨ B	
3		Zał. (∨Elim)
5		
6		Zał. (∨Elim)
8		
9	C ∨ A	∨Elim 2, 3–5, 6–8

(c)

2	C ∨ (A ∨ B)	
3		Zał. (∨Elim)
5		
6		Zał. (∨Elim)
8		
9	~D ∨ ~B	∨Elim 2, 3–5, 6–8

(d)

2	(A → B) ∨ (B → A)	
3		Zał. (∨Elim)
5		
6		Zał. (∨Elim)
8		
9	A ∨ B	∨Elim 2, 3–5, 6–8

∨Elim.I.c. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” określ jakie zdanie można wyprowadzić w wierszu 9 oraz jaka musi być alternatywa w wierszu 2. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

(a)

2		
3	A	Zał. (∨Elim)
5	C	
6	~A	Zał. (∨Elim)
8	C	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

(b)

2		
3	~B	Zał. (∨Elim)
5	~~C	
6	~~D	Zał. (∨Elim)
8	~~C	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

(c)

2		
3	A ∨ B	Zał. (∨Elim)
5	~B	
6	B ≡ C	Zał. (∨Elim)
8	~B	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

(d)

2		
3	A • B	Zał. (∨Elim)
5	B • A	
6	B • A	Zał. (∨Elim)
8	B • A	
9		∨Elim 2, 3–5, 6–8

13.4. Przykłady prostych dowodów z zastosowaniem reguły ∨Elim

Przykład 3.

Dowieść, że następujące rozumowanie jest prawidłowe.

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B \\ A \equiv (C \bullet D) \\ B \rightarrow (D \bullet G)\end{array}}{D}$$

Zwróćmy od razu uwagę, że przesłanki te wydają się beznadziejne. Moglibyśmy wyprowadzić D z przesłanki 2, ale musielibyśmy mieć A – nie mamy (i nie mamy możliwości wyprowadzenia A, gdyż jest ono członem alternatywy z przesłanki 1, a nie mamy negacji drugiego członu tej alternatywy!). Moglibyśmy wyprowadzić D z przesłanki 3, ale musielibyśmy mieć B – nie mamy (i nie mamy możliwości wyprowadzenia B, gdyż jest członem alternatywy z przesłanki 1, a nie mamy negacji pierwszego członu tej alternatywy!). W tej sytuacji, gdyby nie reguła ∨Elim nie moglibyśmy zrobić nic. Na szczęście dysponujemy regułą ∨Elim i możemy wykorzystać informację zawartą w alternatywie A ∨ B – skonstruujmy zatem odpowiednie subderywacje. Reguła ∨Elim określa ściśle, że założeniami tych siostrzanych subderywacji muszą być kolejno człony alternatywy A ∨ B, natomiast nie określa jednoznacznie, co ma być wnioskiem w obu subderywacjach. W naszym wypadku ponieważ dążymy do wyprowadzenia D w dowodzie macierzystym, jedynym sensownym posunięciem wydaje się próba wyprowadzenia D jako wniosku w obydwu subderywacjach, a następnie wprowadzenia D do derywacji macierzystej za pomocą reguły ∨Elim.

Po dokończeniu następującego dowodu, sprawdź jego poprawność z *Rozwiązaniami.*

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$A \equiv (C \bullet D)$	Zał.
3.	$B \rightarrow (D \bullet G)$	Zał.
4.	A	Zał. ($\vee$Elim)
	D	
	B	Zał. ($\vee$Elim)
	D	
	D	

Ćwiczenia na dowodzenie z regułą $\vee$Elim

$\vee$Elim.II. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: B

1.	$\sim A \vee B$	Zał.
2.	$\sim A \rightarrow B$	Zał.

(b) Dowieść, że: C

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$(A \rightarrow C) \bullet (B \rightarrow C)$	Zał.

(c) Dowieść, że: $D \vee G$

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$(A \vee C) \rightarrow D$	Zał.
3.	$G \equiv (\sim A \vee B)$	Zał.

(d) Dowieść, że: $H \bullet B$

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$A \rightarrow (G \vee H)$	Zał.
3.	$G \equiv H$	Zał.

(e) Dowieść, że: $G \bullet H$

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$A \rightarrow (G \vee H)$	Zał.
3.	$G \equiv H$	Zał.

(f) Dowieść, że: D

1.	$(B \vee A) \rightarrow D$	Zał.
2.	$A \vee (B \vee C)$	Zał.
3.	$C \equiv D$	Zał.

Czy wiesz, że . . .

Dowody niewprost stanowiące podstawę reguł ~Wpr i ~Elim zostały użyte przez Parmenidesa (ok. 510-ok.450 p.n.e.), twórcy szkoły Eleatów.

Parmenides zapytuje o naturę bytu: Co to jest byt? (Mówiąc o bycie Parmenides ma na myśli to, co wspólne jest wszystkim rzeczom, które istnieją: szafom, krzesłom, zwierzętom, ludziom, myślom, uczuciom, *etc*.). Przyznaje on, że trudno określić to, jaki jest byt, ale to, co możemy o nim powiedzieć z całą pewnością to to, że *jest*. (Zastanawiać się nad tym, czy byt jest, to trochę tak, jak zastanawiać się nad tym, czy czerwoność jest czerwona. Wiemy od razu i z pewnością, że czerwoność jest czerwona, oraz że byt jest. – Tak przynajmniej myślał Parmenides.) Z tego samego powodu, wiemy też, że niebytu – jakiekolwiek inne własności miałby posiadać – *nie ma*. Te dwie myśli – że *byt jest* oraz że *niebytu nie ma* – stanowią podstawę (aksjomatyczną) dla systemu Parmenidesa. Wyłuszczmy je w postaci dwóch aksjomatów, które nazwiemy (A_1) i (A_2):

(A_1) Byt jest.

(A_2) Niebytu nie ma.

Z tych dwóch niepozornych myśli Parmenides wywodzi inne własności bytu. Okazuje się m.in., że byt nie ma ani początku, ani końca, że jest ciągły i niezmienny.

- Byt nie ma początku – twierdzi Parmenides. To oczywiste – powiada. – Jeśli założymy, że byt ma początek szybko trafiamy na absurd, na sprzeczność. Gdyby byt miał początek to istniałby pewien moment m_p, w którym byt by się zaczynał. Gdyby tak miało być, to od momentu m_p byt by był, ale co byłoby przed momentem m_p? Musiałby wtedy *być niebyt*. Ale przecież wiemy (por. aksjomat (A_2)), że niebytu nie ma. Zakładając, że byt ma początek dochodzimy do absurdu – możemy zatem wnioskować, że byt nie ma początku.
- Byt nie ma też końca. Gdyby byt miał koniec to istniałby pewien moment m_k, w którym byt by się kończył. Gdyby tak miało być, to byt byłby do momentu m_k. A co byłoby potem? Musiałby być niebyt. Wszyscy jednak wiemy, że niebytu nie ma (por. (A_2)). Ponownie więc dochodzimy do wniosku, że byt nie ma końca, bo założenie przeciwne (że byt ma koniec) prowadzi do absurdu.
- Byt jest niezmienny. Gdyby byt był zmienny to musiałby móc się zmienić. A w co to niby byt mógłby się zmienić? Tylko w niebyt. Tyle, że wtedy byłby niebyt. Ale niebytu nie ma. Założenie, że byt jest zmienny prowadzi do absurdu, zatem możemy wyprowadzić wniosek, że byt nie jest zmienny.

Parmenides dowodził też, że byt jest ciągły (tj. nie ma luk). Czy potrafisz zrekonstruować jego rozumowanie?

13.5. Reguła ~Wpr (reguła dołączania negacji, dowód niewprost, *reductio ad absurdum*)

Jeżeli w subderywacji o założeniu dodatkowym *p* można wyprowadzić dowolne (swobodnie występujące) zdanie oraz jego (swobodnie występującą) negację, to wolno do dowodu macierzystego dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje zdanie ~*p*.

i.	*p*	Zał. (~Wpr)
j.	*r*	
k.	~*r*	
➢	~*p*	~Wpr *i*–*j*, *i*–*k*

Intuicje

Uzupełnij następujące rozumowanie Parmenidesa (por. Ramka):

1.	Byt ma początek	(Zał.)
2.	Istnieje moment m_p, w którym zaczyna się byt.	(2)
3.	Przed momentem m_p, jest	(3)
4.	Niebytu nie ma (A_2)	(A_2)
5.		~Wpr (1-3, 1-4)

„Dowolne zdanie oraz jego negacja", czyli zdania bezpośrednio sprzeczne

Przytaczając rozumowanie Parmenidesa odwoływaliśmy się do pojęcia sprzeczności czy absurdu. Nie jest to jednak określenie precyjne. Jak zobaczymy w Temacie 11 zdaniami wzajemnie sprzecznymi są bowiem np. zdania A ∨ ~A oraz A • ~A. Nie są to jednak zdania, na podstawie uzyskania których można byłoby zastosować regułę ~Wpr – żadne bowiem z nich nie jest negacją drugiego. O tym, że jedno zdanie jest negacją drugiego możemy mówić w wypadku następujących par zdań:

A ∨ ~A	~(A ∨ ~A)
A • ~A	~(A • ~A)
A	~A
~A	~~A
A ∨ B	~(A ∨ B)

Możemy w takich sytuacjach mówić, że zdania te są bezpośrednio sprzeczne. Zdania *p* i *q* są **bezpośrednio sprzeczne** zawsze i tylko wtedy, gdy albo zdanie *q* jest negacją zdania *p*, albo zdanie *p* jest negacją zdania *q*.

Konstruowanie subderywacji dla Reguły ~Wpr

Reguła wprowadzania negacji określa ściśle, jakie musi być założenie subderywacji, natomiast nie określa, jaką parę zdań bezpośrednio sprzecznych należy wyprowadzić. Zdania te mogą być związane z założeniem subderywacji, lecz nie muszą. Na tym właśnie polega trudność stosowania reguły ~Wpr (i jej pokrewnej pod tym względem reguły ~Elim): reguła sama w sobie nie określa, jaką parę zdań bezpośrednio sprzecznych mamy wyprowadzić.

Ćwiczenia na stosowanie reguły ~Wpr

~Wpr.I.a. Uzupełnij pary zdań bezpośrednio sprzecznych – trzymając się konwencji, że zdania z drugiej kolumny (~*p*) są negacjami zdań z pierwszej kolumny (*p*).

p	~*p*	*p*	~*p*
A			~(C • ~D)
A ∨ B			~(~A ≡ ~(A • B))
~(A • B)			~~(C → B)
~A ∨ B			~(~A ≡ C)
~~A			~~~~C
~B			~(~B • B)

~Wpr.I.b. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych" określ jakie zdanie można wyprowadzić w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać kroków subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

(a)

3	B	Zał. (~Wpr)
5	~C	
8	C	
9		~Wpr 3–5, 3–8

(b)

3	A ∨ B	Zał. (~Wpr)
5	~C	
8	~~C	
9		~Wpr 3–5, 3–8

(c)

3	~B	Zał. (~Wpr)
5	~C ∨ D	
8	~(~C ∨ D)	
9		~Wpr 3–5, 3–8

(d)

3	~A • ~B	Zał. (~Wpr)
5	~C	
8	~~C	
9		~Wpr 3–5, 3–8

~Wpr.I.c. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych" wpisz założenie dodatkowe subderywacji oraz zdanie będące bezpośrednio sprzeczne ze zdaniem danym w wierszu 8. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać pozostałych kroków subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna.)

(a)

3		Zał. (~Wpr)
5		
8	A	
9	~C	~Wpr 3–5, 3–8

(b)

3		Zał. (~Wpr)
5		
8	B	
9	~~A	~Wpr 3–5, 3–8

(c)

3		Zał. (~Wpr)
5		
8	C • B	
9	~(A ∨ B)	~Wpr 3–5, 3–8

(d)

3		Zał. (~Wpr)
5		
8	C	
9	~~(A → B)	~Wpr 3–5, 3–8

13.6. Przykłady prostych dowodów z zastosowaniem reguły ~Wpr

Przykład 4.

Dowieść, że następujące rozumowanie jest prawidłowe.

$$\frac{\begin{array}{c}(A \bullet B) \rightarrow C \\ B \bullet \sim C\end{array}}{\sim A}$$

Jasne jest, że aby wyprowadzić negację ~A musimy skorzystać z jakiejś reguły konstrukcyjnej. Regułą, która się narzuca jest reguła wprowadzania negacji – mamy wszakże wyprowadzić jako wniosek zdanie będące negacją. Zacznijmy więc od skonstruowania stosownej subderywacji, której założeniem będzie zdanie A:

1.	(A • B) → C	Zał.
2.	B • ~C	Zał.
3.	| A	Zał. (~Wpr)
	|	
	|	
	~A	

Jak wspominaliśmy już reguła ~Wpr określa wyraźnie, co ma być założeniem subderywacji, ale nie określa jednoznacznie pary zdań bezpośrednio sprzecznych, do wyprowadzenia której mamy dążyć. Jest to pozostawione decyzji strategicznej. Jedną z heurystyk, którymi możemy się posłużyć to szukanie zalążka takiej pary zdań bezpośrednio sprzecznych już w przesłankach. W naszym wypadku taką potencjalną parę stanowią zdania C i ~C, które na razie są członami przesłanek 1 i 2, ale które po niewielki zabiegach mogą zostać wyprowadzone w skonstruowanej subderywacji.

Po dokończeniu dowodu, sprawdź jego poprawność z *Rozwiązaniami.*

Ćwiczenia na dowodzenie z regułą ~Wpr

~Wpr.II. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: ~A

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$A \rightarrow \sim B$	Zał.

(b) Dowieść, że: ~~C

1.	$C \bullet B$	Zał.
2.	A	Zał.

(c) Dowieść, że: ~(A • B)

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$B \rightarrow \sim\sim D$	Zał.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	Zał.

(d) Dowieść, że: ~(A ≡ B)

1.	$(A \equiv B) \rightarrow C$	Zał.
2.	$\sim(C \vee A)$	Zał.

13.7. Reguła ~Elim (reguła opuszczania negacji, dowód niewprost, *reductio ad absurdum*)

> Jeżeli w subderywacji o założeniu dodatkowym ~*p* można wyprowadzić dowolne (swobodnie występujące) zdanie oraz jego (swobodnie występującą) negację, to wolno do dowodu macierzystego dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje zdanie *p*.
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | *i.* | \| \| ~*p* | Zał. (~Elim) |
> | *j.* | \| \| *r* | |
> | *k.* | \| \| ~*r* | |
> | ➢ | \| *p* | ~Elim *i*–*j*, *i*–*k* |

Intuicje

Uzupełnij następujące rozumowanie Parmenidesa:

1.	Byt nie jest ciągły	(Zał.)
2.	Istnieje w bycie pewna luka *l*	(1)
3.	W każdym momencie m_l, w którym trwa luka *l* jest	(2)
4.	Niebytu nie ma (A_2)	(A_2)
5.		~Elim (1-3, 1-4)

Konstruowanie subderywacji dla Reguły ~Elim

Podobnie jak reguła ~Wpr, reguła eliminowania negacji określa ściśle, jakie musi być założenie subderywacji, natomiast nie określa, jaką parę zdań bezpośrednio sprzecznych należy wyprowadzić. W wypadku stosowania reguły ~Wpr, jej zastosowanie może być zasugerowane formą logiczną wyprowadzanego zdania – wnioskiem, który uprawomacnia reguła ~Wpr jest *zawsze* negacja. Wniosek uprawomocniony regułą ~Elim może natomiast być *dowolnym* zdaniem. Z tych dwóch względów zaleca się wstrzemięźliwe stosowanie reguły ~Elim:

Porada babuni o regule ~Elim:

Stosuj ~Elim tylko jeżeli wszystkie inne strategie zawiodą!

Ćwiczenia na stosowanie reguły ~Elim

~Elim.I.a. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” określ jakie zdanie można wyprowadzić w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać kroków subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

(a)

3	~A	Zał. (~Elim)
5	~C	
8	C	
9		~Elim 3–5, 3–8

(b)

3	~~B	Zał. (~Elim)
5	~C	
8	~~C	
9		~Elim 3–5, 3–8

(c)

3	~(A → B)	Zał. (~Elim)
5	~C ∨ D	
8	~(~C ∨ D)	
9		~Elim 3–5, 3–8

(d)

3	~~(~A • ~B)	Zał. (~Elim)
5	~C	
8	~~C	
9		~Elim 3–5, 3–8

~Elim.I.b. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” wpisz założenie dodatkowe subderywacji oraz zdanie będące bezpośrednio sprzeczne ze zdaniem danym w wierszu 8. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać pozostałych kroków subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna.)

(a)

3		Zał. (~Elim)
5		
8	A • B	
9	~C	~Elim 3–5, 3–8

(b)

3		Zał. (~Elim)
5		
8	B ∨ C	
9	A	~Elim 3–5, 3–8

(c)

3		Zał. (~Elim)
5		
8	~C • B	
9	~A ≡ B	~Elim 3–5, 3–8

(d)

3		Zał. (~Elim)
5		
8	A → B	
9	A → B	~Elim 3–5, 3–8

13.8. Przykłady prostych dowodów z zastosowaniem reguły ~Elim

Przykład 5.

Jak pamiętacie może z Tematu 11, skonfrontowani byliśmy z wnioskowaniem prawidłowym, które bardzo przypominało regułę MTP, ale niestety nie można było tej reguły zastosować, gdyż druga przesłanka nie stanowiła negacji żadnego z członów alternatywy danej w pierwszej przesłance.

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee \sim B \\ B \end{array}}{A}$$

W Temacie 15m, gdy wprowadzimy regułę podstawiania *Neg* będziemy mogli zastąpić B przez ~~B i w ten stosób zastosować MTP. Tymczasem jednak możemy wykorzystać właśnie poznaną regułę ~Elim:

1.	A ∨ ~B	Zał.
2.	B	Zał.
3.	~A	Zał. (~Elim)
	A	

Jak wspominaliśmy już reguła ~Elim nie określa jednoznacznie pary zdań bezpośrednio sprzecznych, do wyprowadzenia której mamy dążyć. W naszym wypadku potencjalną parą zdań bezpośrednio sprzecznych są zdania ~B i B. Zdanie B wystarczy powtórzyć, natomiast zdanie ~B jest drugim członem alternatywy, które możemy uzyskać pod warunkiem, że mamy negację pierwszego członu (A), tj. ~A. Zdanie ~A jest nam dane w dodatkowym założeniu podyktowanym przez regułę ~Elim. Możemy więc przystąpić do dowodu.

W kroku 4, stosujemy regułę MTP do alternatywy w wierszu 1 (A ∨ ~B) oraz negacji w wierszu 3 (~A), w ten sposób otrzyjmując drugi człon alternatywy, czyli ~B.

3.	~A	Zał. (~Elim)
4.	~B	MTP 1, 3

W kroku 5, powtarzamy przesłankę 2, czyli B, aby uzyskać parę zdań bezpośrednio sprzecznych.

5.	B	R2

W ten sposób w subderywacji o założeniu ~A, wyprowadziliśmy parę zdań bezpośrednio sprzecznych. Możemy zatem zamknąć tę subderywację, a do derywacji macierzystej wprowadzić zdanie A, oraz uzasadnić je regułą ~Elim. Wszystkie bowiem warunki na zastosowanie reguły ~Elim do wyprowadzenia zdania A zostały spełnione: stworzyliśmy subderywację z negacją zdania A jako założeniem dodatkowym oraz wyprowadziliśmy w tej subderywacji zdania bezpośrednio sprzeczne.

Przykład 6.

W powyższym przykładzie wyprowadzana para zdań bezpośrednio sprzecznych była niezwiązana z założeniem dodatkowym. Tak jednak nie musi być – co ilustruje następujący przykład.

Dowiedź, że następujące rozumowanie jest prawidłowe.

$$\frac{\begin{array}{c}\sim A \rightarrow B \\ B \rightarrow A\end{array}}{A}$$

Mamy wyprowadzić zdanie A, które występuje w następniku przesłanki 2. Nic prostszego – wydawać by się mogło – wystarczy tylko zastosować regułę →Elim po zdobyciu poprzednika tej implikacji, tj. zdania B. Problem w tym, że aby zdobyć B trzeba byłoby zastosować regułę →Elim do przesłanki 1, a przedtem zdobyć jej poprzednik, tj. zdanie ~A. Zdania ~A nie da się już jednak wyprowadzić z danych przesłanek. Z tego impasu uratować może tylko reguła będąca „ostatnią deską ratunku", tj. reguła ~Elim:

1.	~A → B	Zał.
2.	B → A	Zał.
3.	~A	Zał. (~Elim)
4.	~A	R3
	A	

Jak wspominaliśmy już reguła ~Elim nie określa jednoznacznie pary zdań bezpośrednio sprzecznych, do wyprowadzenia której mamy dążyć. W naszym wypadku potencjalną parą zdań bezpośrednio sprzecznych są zdania ~A i A. Zdanie ~A wystarczy powtórzyć (co uczyniliśmy w kroku 4), natomiast zdanie A trzeba wyprowadzić z przesłanek.

Po dokończeniu dowodu, sprawdź jego poprawność z *Rozwiązaniami.*

Ćwiczenia na dowodzenie z regułą ~Elim

~Elim.II. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: A

1.	~~A • C	Zał.
2.	B • ~~D	Zał.

(b) Dowieść, że: ~C

1.	~C ∨ (B ∨ ~C)	Zał.
2.	~B	Zał.

(c) Dowieść, że: $A \bullet B$

1.	$\sim(A \bullet B) \rightarrow (C \bullet D)$	Zał.
2.	$\sim D \bullet \sim B$	Zał.

(d) Dowieść, że: C

1.	$\sim C \rightarrow \sim B$	Zał.
2.	$\sim A \bullet (\sim B \rightarrow B)$	Zał.

(e) Dowieść, że: $\sim(A \vee B)$ [trudne]

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$B \rightarrow \sim\sim D$	Zał.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	Zał.

13.9. Trzy strategie dowodzenia

Wprowadziliśmy już wszystkie pierwotne reguły systemu SD:

dla koniunkcji

i.	p	
j.	r	
➢	$p \wedge r$	∧Wpr *i, j*

i.	$p \wedge r$	
➢	p	∧Elim *i*

i.	$p \wedge r$	
➢	r	∧Elim *i*

dla implikacji

i.	$\quad \mid p$	Zał.
j.	$\quad \mid r$	
➢	$p \rightarrow r$	→ Wpr *i–j*

i.	$p \rightarrow r$	
j.	p	
➢	r	→Elim *i, j*

dla równoważności

i.	$\quad \mid p$	Zał.
j.	$\quad \mid r$	
k.	$\quad \mid r$	Zał.
l.	$\quad \mid p$	
➢	$p \equiv r$	≡Wpr *i–j, k-l*

i.	$p \equiv r$	
j.	p	
➢	r	≡Elim *i,j*

i.	$p \equiv r$	
j.	r	
➢	p	≡Elim *i, j*

dla alternatywy

i.	p	
➢	$p \vee r$	∨Wpr *i*

i.	p	
➢	$r \vee p$	∨Wpr *i*

i.	$p \vee q$	
j.	$\quad \mid p$	Zał.
k.	$\quad \mid r$	
l.	$\quad \mid q$	Zał.
m.	$\quad \mid r$	
➢	r	∨Elim *i, j–k, l–m*

dla negacji

i.	$\quad \mid p$	Zał.
j.	$\quad \mid r$	
k.	$\quad \mid \sim r$	
➢	$\sim p$	~Wpr *i– j, i–k*

i.	$\quad \mid \sim p$	Zał.
j.	$\quad \mid r$	
k.	$\quad \mid \sim r$	
➢	p	~Elim *i– j, i–k*

Reguła reiteracji

i.	p	
➢	$\quad \mid p$	R *i*

i.	p	
➢	$\quad \mid p$	R *i*

Są to reguły wprowadzania dla każdego z pięciu spójników (tj. reguły pozwalające dołączyć do dowodu wiersz, gdzie wprowadzany spójnik jest spójnikiem głównym) oraz reguły eliminacji dla każdego spójnika (tj. reguły pozwalające wykorzystać informację zawartą w zdaniu, którego dany spójnik jest głównym funktorem).

Odpowiednio możemy też przedstawić trzy możliwe strategie wyprowadzania danej formuły. Korzystaliśmy z nich *implicite*, ale warto je sformułować *eksplicite.* Po pierwsze, warto się zastanowić czy żądanej formuły nie da się wyprowadzić z tego, co w dowodzie jest dane za pomocą jakiejś reguły eliminacji. Prostym dowodem, w którym taka strategia się narzuca jest np.:

1.	$B \to ((A \to D) \bullet \sim C)$	Zał.
2.	$A \bullet B$	Zał.
	$A \to D$	

Może się jednak okazać, że strategia eliminacji nie jest wskazana. Wówczas warto się zastanowić nad strategią wprowadzenia – choć strategia ta jest możliwa tylko jeżeli zdanie wyprowadzane jest złożone. Staramy się zastosować regułę wprowadzenia dla spójnika, który jest spójnikiem głównym żądanej formuły:

1.	$D \bullet B$	Zał.
	$A \to D$	

Może się jednak okazać, że żadna ze wspomnianych strategii nie wydaje się obiecująca, a wtedy już pozostaje tylko ostatnia deska ratunku, czyli reguła ~Elim:

1.	$\sim(A \to D) \to (A \to D)$	Zał.
	$A \to D$	

Zawsze, gdy ustalamy strategię wyprowadzenia danej formuły warto się zastanowić (w tej kolejności), czy można tę formułę uzyskać za pomocą strategii eliminacji lub wprowadzania, a jeżeli obie zawiodą, to pozostaje reguła ~Elim.