

ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

12. DOWODZENIE III

Przykłady dowodów:

Przykład 1

1.	$Z \rightarrow A$	Zał.
2.	$A \rightarrow (\sim P \bullet \sim R)$	Zał.
3.	$\sim R \rightarrow \sim B$	Zał.
4.	$\sim B \rightarrow \sim I$	Zał.
5.	Z	Zał. (\rightarrow Wpr)
6.	A	\rightarrow Elim 1, 5
7.	$\sim P \bullet \sim R$	\rightarrow Elim 2, 6
8.	$\sim R$	\bullet Elim 7
9.	$\sim B$	\rightarrow Elim 3, 8
10.	$\sim I$	\rightarrow Elim 4, 9
11.	$Z \rightarrow \sim I$	\rightarrow Wpr 5–10

Przykład 3

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$A \bullet B$	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	A	\bullet Elim 2
4.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3
5.	B	\bullet Elim 2
6.	C	\rightarrow Elim 4, 5
7.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 2–6

Przykład 4

1.	A	Zał.
2.	C	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	A	R1
4.	$C \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 2–3

Ćwiczenia na stosowanie reguły \rightarrow Wpr

\rightarrow Wpr.I.a.

(a)

3	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	A	
9	$B \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 3-8

(b)

3	$\sim B$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	A	
9	$\sim B \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 3-8

(c)

3	C	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	$\sim B$	
9	$C \rightarrow \sim B$	\rightarrow Wpr 3-8

(d)

3	$A \equiv C$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	B	
9	$(A \equiv C) \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3-8

(e)

3	C	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	$B \rightarrow A$	
9	$C \rightarrow (B \rightarrow A)$	\rightarrow Wpr 3-8

(f)

3	$C \rightarrow A$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	B	
9	$(C \rightarrow A) \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3-8

(g)

3	$\sim(A \rightarrow B)$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	C	
9	$\sim(A \rightarrow B) \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-8

(h)

3	$\sim A$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	$B \rightarrow C$	
9	$\sim A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 3-8

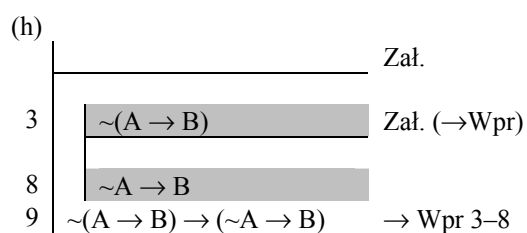
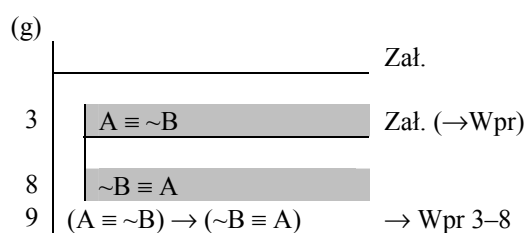
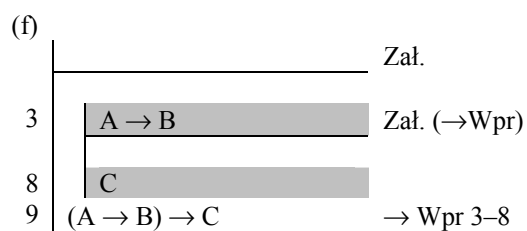
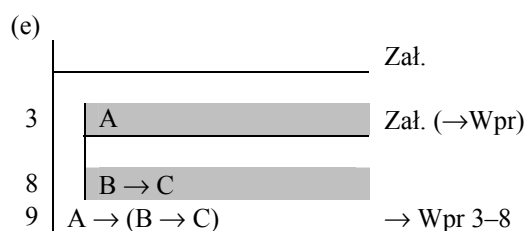
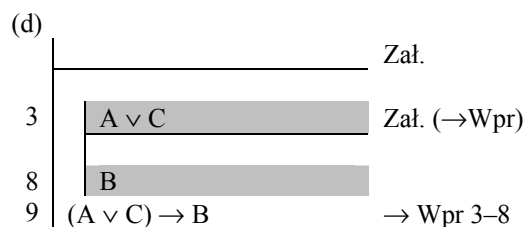
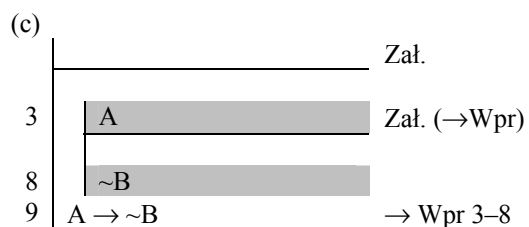
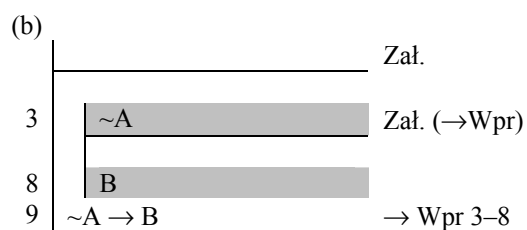
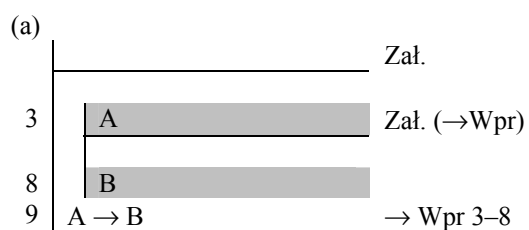
(i)

3	$A \vee \sim A$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	B	
9	$(A \vee \sim A) \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3-8

(j)

3	$B \rightarrow C$	Zał. (\rightarrow Wpr)
8	$C \rightarrow D$	
9	$(B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow D)$	\rightarrow Wpr 3-8

→Wpr.I.b.



→Wpr.II.

(a)

1.	$A \rightarrow (B \vee C)$	Zał.												
2.	$\sim B$	Zał.												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td> <td style="padding-right: 10px;">Zał. (→Wpr)</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$B \vee C$</td> <td>→Elim 1,3</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">C</td> <td>MTP 2,4</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$A \rightarrow C$</td> <td>→ Wpr 3–5</td> </tr> </table>			3.	A	Zał. (→Wpr)	4.	$B \vee C$	→Elim 1,3	5.	C	MTP 2,4	6.	$A \rightarrow C$	→ Wpr 3–5
3.	A	Zał. (→Wpr)												
4.	$B \vee C$	→Elim 1,3												
5.	C	MTP 2,4												
6.	$A \rightarrow C$	→ Wpr 3–5												

(b)

1.	$A \rightarrow (B \equiv \sim D)$	Zał.												
2.	$\sim D$	Zał.												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td> <td style="padding-right: 10px;">Zał. (→Wpr)</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$B \equiv \sim D$</td> <td>→Elim 1,3</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">B</td> <td>≡Elim 2,4</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$A \rightarrow B$</td> <td>→ Wpr 3–5</td> </tr> </table>			3.	A	Zał. (→Wpr)	4.	$B \equiv \sim D$	→Elim 1,3	5.	B	≡Elim 2,4	6.	$A \rightarrow B$	→ Wpr 3–5
3.	A	Zał. (→Wpr)												
4.	$B \equiv \sim D$	→Elim 1,3												
5.	B	≡Elim 2,4												
6.	$A \rightarrow B$	→ Wpr 3–5												

(c)

1.	$\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.												
2.	C	Zał.												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim A$</td> <td style="padding-right: 10px;">Zał. (→Wpr)</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$C \rightarrow B$</td> <td>→Elim 1,3</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">B</td> <td>→Elim 2,4</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim A \rightarrow B$</td> <td>→ Wpr 3–5</td> </tr> </table>			3.	$\sim A$	Zał. (→Wpr)	4.	$C \rightarrow B$	→Elim 1,3	5.	B	→Elim 2,4	6.	$\sim A \rightarrow B$	→ Wpr 3–5
3.	$\sim A$	Zał. (→Wpr)												
4.	$C \rightarrow B$	→Elim 1,3												
5.	B	→Elim 2,4												
6.	$\sim A \rightarrow B$	→ Wpr 3–5												

(d)

1.	$B \vee (B \vee C)$	Zał.												
2.	$\sim B$	Zał.												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td> <td style="padding-right: 10px;">Zał. (→Wpr)</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$B \vee C$</td> <td>MTP 1,2</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">C</td> <td>MTP 2,4</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$A \rightarrow C$</td> <td>→ Wpr 3–5</td> </tr> </table>			3.	A	Zał. (→Wpr)	4.	$B \vee C$	MTP 1,2	5.	C	MTP 2,4	6.	$A \rightarrow C$	→ Wpr 3–5
3.	A	Zał. (→Wpr)												
4.	$B \vee C$	MTP 1,2												
5.	C	MTP 2,4												
6.	$A \rightarrow C$	→ Wpr 3–5												

(e)

1.	$A \equiv (B \vee C)$	Zał.												
2.	$\sim D$	Zał.												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$A \equiv \sim D$</td> <td style="padding-right: 10px;">Zał. (→Wpr)</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td> <td>≡Elim 3, 2</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$B \vee C$</td> <td>≡Elim 1, 4</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$</td> <td>→ Wpr 3–5</td> </tr> </table>			3.	$A \equiv \sim D$	Zał. (→Wpr)	4.	A	≡Elim 3, 2	5.	$B \vee C$	≡Elim 1, 4	6.	$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$	→ Wpr 3–5
3.	$A \equiv \sim D$	Zał. (→Wpr)												
4.	A	≡Elim 3, 2												
5.	$B \vee C$	≡Elim 1, 4												
6.	$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$	→ Wpr 3–5												

(f)

1.	$(A \equiv B) \vee (B \vee C)$	Zał.												
2.	$\sim(A \equiv B)$	Zał.												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim B$</td> <td style="padding-right: 10px;">Zał. (→Wpr)</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$B \vee C$</td> <td>MTP 1,2</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">C</td> <td>MTP 3,4</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim B \rightarrow C$</td> <td>→ Wpr 3–5</td> </tr> </table>			3.	$\sim B$	Zał. (→Wpr)	4.	$B \vee C$	MTP 1,2	5.	C	MTP 3,4	6.	$\sim B \rightarrow C$	→ Wpr 3–5
3.	$\sim B$	Zał. (→Wpr)												
4.	$B \vee C$	MTP 1,2												
5.	C	MTP 3,4												
6.	$\sim B \rightarrow C$	→ Wpr 3–5												

Ćwiczenia na zastosowanie reguły R

R.I.

(a)				(b)			
1.	A	Zał.		1.		Zał.	
2.		Zał.		2.	A		
3.		Zał.		3.		Zał.	
4.	A	R1		4.	A	R2	
5.	A	R1		5.		Zał.	
6.				6.	A	R2	
7.				7.	A	R2	
8.	A	R1		8.			
9.	A	R1		9.	A	R2	
10.	A	R1		10.			
11.	A	R1		11.	A	R2	
12.	A	R1		12.	A	R2	
13.		Zał.		13.		Zał.	
14.	A	R1		14.	A	R2	
15.		Zał.		15.		Zał.	
16.	A	R1		16.	A	R2	
17.	A	R1		17.	A	R2	
18.				18.			
19.	A	R1		19.	A	R2	
20.				20.			
21.	A	R1		21.	A	R2	

(c)				(d)			
1.		Zał.		1.		Zał.	
2.				2.			
3.		Zał.		3.		Zał.	
4.	A	R4		4.			
5.		Zał.		5.		Zał.	
6.	A	R4		6.	A		
7.	A	R4		7.	A	R6	
8.				8.			
9.	A	R4		9.			
10.	A	R4		10.			
11.	A	R4		11.			
12.	A	R4		12.			
13.	A	R4		13.		Zał.	
14.	A	R4		14.			
15.		Zał.		15.		Zał.	
16.	A	R4		16.			
17.	A	R4		17.			
18.				18.			
19.	A	R4		19.			
20.				20.			
21.				21.			

R.II. Skonstruuj następujące dowody stosując regułę R *explicite*:

(a) Dowieść, że: $C \rightarrow (A \bullet B)$

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.		
3.	C	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \bullet B$	R 1
5.	$C \rightarrow (A \bullet B)$	\rightarrow Wpr 2-3

(b) Dowieść, że: $A \bullet A$

1.	A	Zał.
2.	A	R 1
3.	$A \bullet A$	\bullet Wpr 1, 2

(c) Dowieść, że: $C \rightarrow A$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.		
4.	C	Zał. (\rightarrow Wpr)
5.	$B \equiv C$	R2
6.	B	\equiv Elim 3, 4
7.	$A \equiv B$	R1
8.	A	\equiv Elim 5, 6
9.	$C \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 3-7

(d) Dowieść, że: $[B \bullet (D \bullet G)] \rightarrow (A \bullet C)$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.		
4.	$B \bullet (D \bullet G)$	Zał. (\rightarrow Wpr)
5.	B	\bullet Elim 3
6.	$A \equiv B$	R1
7.	A	\equiv Elim 4,5
8.	$D \bullet G$	\bullet Elim 3
9.	D	\bullet Elim 7
10.	$C \equiv D$	R 2
11.	C	\equiv Elim 8, 9
12.	$A \bullet C$	\bullet Wpr 6, 10
13.	$[B \bullet (D \bullet G)] \rightarrow (A \bullet C)$	\rightarrow Wpr 3-11

Ćwiczenia na stosowanie reguły \rightarrow Wpr
 \rightarrow Wpr.l.c.

(a)

		Zał.
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
7.	C	
8.	B \rightarrow C	\rightarrow Wpr 4-7
9.	A \rightarrow (B \rightarrow C)	\rightarrow Wpr 3-8

(b)

		Zał.
3.	\sim A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
7.	\sim C	
8.	B \rightarrow \sim C	\rightarrow Wpr 4-7
9.	\sim A \rightarrow (B \rightarrow \sim C)	\rightarrow Wpr 3-8

(c)

		Zał.
3.	B \vee C	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)
7.	C	
8.	\sim B \rightarrow C	\rightarrow Wpr 4-7
9.	(B \vee C) \rightarrow (\sim B \rightarrow C)	\rightarrow Wpr 3-8

(d)

		Zał.
3.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	B \vee C	Zał. (\rightarrow Wpr)
7.	C	
8.	(B \vee C) \rightarrow C	\rightarrow Wpr 4-7
9.	\sim B \rightarrow [(B \vee C) \rightarrow C]	\rightarrow Wpr 3-8

(e)

		Zał.
3.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
7.	B \vee C	
8.	B \rightarrow (B \vee C)	\rightarrow Wpr 4-7
9.	\sim B \rightarrow [B \rightarrow (B \vee C)]	\rightarrow Wpr 3-8

(f)

		Zał.
3.	A \rightarrow B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	D	Zał. (\rightarrow Wpr)
7.	C	
8.	D \rightarrow C	\rightarrow Wpr 4-7
9.	(A \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)	\rightarrow Wpr 3-8

→Wpr.I.d.

(a)

	Zał.	
3.	B	Zał. (→Wpr)
4.	A	Zał. (→Wpr)
7.	C	
8.	$A \rightarrow C$	→ Wpr 4-7
9.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	→ Wpr 3-8

(b)

	Zał.	
3.	$\sim C$	Zał. (→Wpr)
4.	$\sim B$	Zał. (→Wpr)
7.	$\sim A$	
8.	$\sim B \rightarrow \sim A$	→ Wpr 4-7
9.	$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$	→ Wpr 3-8

(c)

	Zał.	
3.	$B \bullet C$	Zał. (→Wpr)
4.	A	Zał. (→Wpr)
7.	$C \bullet A$	
8.	$A \rightarrow (C \bullet A)$	→ Wpr 4-7
9.	$(B \bullet C) \rightarrow [A \rightarrow (C \bullet A)]$	→ Wpr 3-8

(d)

	Zał.	
3.	B	Zał. (→Wpr)
4.	A	Zał. (→Wpr)
7.	$C \rightarrow A$	
8.	$A \rightarrow (C \rightarrow A)$	→ Wpr 4-7
9.	$B \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow A)]$	→ Wpr 3-8

(e)

	Zał.	
3.	B	Zał. (→Wpr)
4.	$A \rightarrow C$	Zał. (→Wpr)
7.	C	
8.	$(A \rightarrow C) \rightarrow C$	→ Wpr 4-7
9.	$B \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$	→ Wpr 3-8

(f)

	Zał.	
3.	$B \rightarrow C$	Zał. (→Wpr)
4.	A	Zał. (→Wpr)
7.	C	
8.	$A \rightarrow C$	→ Wpr 4-7
9.	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	→ Wpr 3-8

Ćwiczenia na dowodzenia z regułą \rightarrow Wpr

\rightarrow Wpr.III.

(a)

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 2,3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	$A \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6

(b)

1.	$(A \vee G) \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \vee G$	\vee Wpr 2
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6

(c)

1.	$(A \rightarrow C) \bullet G$	Zał.
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \rightarrow C$	\bullet Elim 1
5.	C	\rightarrow Elim 2,4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6

(d)

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3
5.	C	\rightarrow Elim 2,4
6.	$A \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6

(e)

1.	$G \equiv (A \vee B)$	Zał.
2.	G	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	$\sim A$	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \vee B$	\equiv Elim 1, 2
5.	B	MTP 3, 4
6.	$\sim A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$	\rightarrow Wpr 2-6

(f)

1.	$C \vee (B \vee A)$	Zał.
2.	$\sim C$	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	$\sim B$	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$B \vee A$	MTP 1, 2
5.	A	MTP 3, 4
6.	$\sim B \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$	\rightarrow Wpr 2-6

→Wpr.IV. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: $B \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3
5.	C	\rightarrow Elim 2,4
6.	$A \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3–5
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2–6

(b) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	Zał.
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3
5.	C	\rightarrow Elim 2,4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3–5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2–6

(c) Dowieść, że: C

1.	$(A \rightarrow B) \equiv C$	Zał.
2.	$B \bullet D$	Zał.
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	B	\bullet Elim 2
5.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3–4
6.	C	\equiv Elim 1, 5

(d) Dowieść, że: $\sim A \rightarrow [\sim B \rightarrow (C \bullet D)]$

1.	$C \vee A$	Zał.
2.	$D \vee B$	Zał.
3.	$\sim A$	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$\sim B$	Zał. (\rightarrow Wpr)
5.	D	MTP 2, 4
6.	C	MTP 1, 3
7.	$C \bullet D$	\bullet Wpr 6, 5
8.	$\sim B \rightarrow (C \bullet D)$	\rightarrow Wpr 4–7
9.	$\sim A \rightarrow [\sim B \rightarrow (C \bullet D)]$	\rightarrow Wpr 3–8

(e) Dowieść, że: C

1.	$(A \rightarrow B) \equiv C$	Zał.
2.	$(A \rightarrow A) \rightarrow B$	Zał.
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
5.	A	R4
6.	$A \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 4–5
7.	B	\rightarrow Elim 2, 6
8.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 3–7
9.	C	\equiv Elim 1, 8

(f) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \bullet C)$

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	Zał.
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	B	\rightarrow Elim 2, 3
5.	C	\rightarrow Elim 1, 3
6.	$B \bullet C$	\bullet Wpr 4, 5
7.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	\rightarrow Wpr 3–6

(g) Dowieść, że: $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$B \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	$B \rightarrow C$	Zał. (\rightarrow Wpr)			
$B \rightarrow C$	Zał. (\rightarrow Wpr)					
3.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)		
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)				
A	Zał. (\rightarrow Wpr)					
4.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">\rightarrowElim 1, 3</td> </tr> </table>	B	\rightarrow Elim 1, 3			
B	\rightarrow Elim 1, 3					
5.	C	\rightarrow Elim 2, 4				
6.	$A \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3–5				
7.	$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2–6				

(h) Dowieść, że: $B \rightarrow (A \bullet C)$

1.	$A \bullet (B \rightarrow C)$	Zał.		
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	
B	Zał. (\rightarrow Wpr)			
3.	A	\bullet Elim 1		
4.	$B \rightarrow C$	\bullet Elim 1		
5.	C	\rightarrow Elim 4, 2		
6.	$A \bullet C$	\bullet Wpr 3, 5		
7.	$B \rightarrow (A \bullet C)$	\rightarrow Wpr 2–6		

(i) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	$C \bullet D$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)			
A	Zał. (\rightarrow Wpr)					
3.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)		
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)				
B	Zał. (\rightarrow Wpr)					
4.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;">\bulletElim 1</td> </tr> </table>	C	\bullet Elim 1			
C	\bullet Elim 1					
5.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3–4				
6.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2–5				

(j) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \rightarrow (D \rightarrow C))$

1.	$C \bullet D$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)			
A	Zał. (\rightarrow Wpr)					
3.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)		
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)				
B	Zał. (\rightarrow Wpr)					
4.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">D</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">D</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	D	Zał. (\rightarrow Wpr)		
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">D</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	D	Zał. (\rightarrow Wpr)				
D	Zał. (\rightarrow Wpr)					
5.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;">\bulletElim 1</td> </tr> </table>	C	\bullet Elim 1			
C	\bullet Elim 1					
6.	$D \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 4–5				
7.	$B \rightarrow (D \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 3–6				
8.	$A \rightarrow (B \rightarrow (D \rightarrow C))$	\rightarrow Wpr 2–7				

(k) Dowieść, że: $A \rightarrow (D \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.				
2.	$D \rightarrow B$	Zał.				
3.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)			
A	Zał. (\rightarrow Wpr)					
4.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">D</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">D</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	D	Zał. (\rightarrow Wpr)		
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">D</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	D	Zał. (\rightarrow Wpr)				
D	Zał. (\rightarrow Wpr)					
5.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$B \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 20px;">\rightarrowElim 1, 3</td> </tr> </table>	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3			
$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1, 3					
6.	B	\rightarrow Elim 2, 4				
7.	C	\rightarrow Elim 5, 6				
8.	$D \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 4–7				
9.	$A \rightarrow (D \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 3–8				

(l) Dowieść, że: $(A \vee B) \rightarrow C$

1.	$(A \rightarrow C) \bullet \sim B$	Zał.		
2.	$(B \vee C) \vee D$	Zał.		
3.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \vee B$</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> </table>	$A \vee B$	Zał. (\rightarrow Wpr)	
$A \vee B$	Zał. (\rightarrow Wpr)			
4.	$A \rightarrow C$	\bullet Elim 1		
5.	$\sim B$	\bullet Elim 1		
6.	A	MTP 3, 5		
7.	C	\rightarrow Elim 4, 6		
8.	$(A \vee B) \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3–7		