

12. DOWODZENIE III: REGUŁA \rightarrow WPR, R

Cele i wprowadzenie

- Umiejętność stosowania reguł pierwotnych \rightarrow Wpr oraz R
- Umiejętność przeprowadzania prostych dowodów z użyciem tych reguł

12.1. Intuicje

Wiele reguł w systemie SD korzysta z tzw. subderywacji („poddowodów”). Subderywacje intuicyjnie odpowiadają dowodom pomocniczym, które wykonujemy niejako «na boku» po to, aby uzyskać pewien wynik w głównym toku dowodzenia.

Rozważmy następujący przykład rozumowania.

- (1) Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to będzie się uganiał za Asią.
- (2) Jeżeli Kuba będzie się uganiał za Asią, to ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotowuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.
- (3) Jeżeli Kuba nie przygotowuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania, to obleje egzamin z tego przedmiotu.
- (4) Jeżeli Kuba obleje egzamin z Biologicznych Mechanizmów Zachowania, to Asia przestanie się nim interesować.

Jeżeli więc Kuba pojedzie do Zakopanego, to Asia przestanie się nim interesować.

Chcąc dowieść, że wniosek istotnie wynika z przesłanek możemy rozumować tak:

Załóżmy, że Kuba pojedzie do Zakopanego.

Z (1) wynika, że Kuba będzie się uganiał za Asią.

Z (2) wynika dalej, że ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotowuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.

Stąd z kolei wynika, że Kuba nie przygotowuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.

A skoro tak, to na mocy (3), wiemy, że Kuba obleje też egzamin z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.

Stąd oraz z przesłanki (4) wynika, że Asia przestanie się nim interesować.

Zastanówmy się, czego dowiedliśmy. Czy dowiedliśmy, że Asia przestanie się interesować Kubą? Tak może się nam wydawać, bo ostatni krok w naszym rozumowaniu tak właśnie brzmiał. Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że nasze rozumowanie oparte było na pewnym założeniu dodatkowym, a mianowicie na założeniu, że Kuba pojedzie do Zakopanego. Całość naszego rozumowania od tego założenia zależała. Nie dowiedliśmy zatem, że z przesłanek (1)-(4) wynika zdanie:

Asia przestanie się interesować Kubą.

a jedynie, że wynika z nich zdanie:

Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to Asia przestanie się nim interesować.

Zdanie „Asia przestanie się interesować Kubą” jest wnioskiem w dowodzie pomocniczym, którego dodatkowym założeniem jest zdanie „Kuba pojedzie do Zakopanego”. W systemie SD wprowadza się

graficzną formę przedstawiania takich dowodów pomocniczych, czyli subderywacji, po to, aby ułatwić nam zorientowanie się w tym, czego dowodzimy na podstawie jakich przesłanek. Stosując szatę graficzną systemu SD, ale jeszcze nie zastępując zdań powyższego rozumowania stałymi zdaniowymi, nasze rozumowanie przybiera następującą formę:

1.	Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to będzie się uganiał za Asią.	Zał.
2.	Jeżeli Kuba będzie się uganiał za Asią, to ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.	Zał.
3.	Jeżeli Kuba nie przygotuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania, to obleje egzamin z tego przedmiotu.	Zał.
4.	Jeżeli Kuba obleje egzamin z Biologicznych Mechanizmów Zachowania, to Asia przestanie się nim interesować.	Zał.
<hr/>		
5.	Kuba pojedzie do Zakopanego	Zał.
6.	Kuba będzie się uganiał za Asią	(1), (5)
7.	Kuba ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.	(6), (2)
8.	Kuba nie przygotuje się do testu z Biologicznych Mechanizmów Zachowania.	(7)
9.	Kuba obleje egzamin z Biologicznych Mechanizmów Zachowania	(8), (3)
10.	Asia przestanie się interesować Kubą.	(9), (4)
11.	Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to Asia przestanie się nim interesować	(5)–(10)

Na subderywację składają się wiersze 5–10. Wszystkie zdania występujące w subderywacji są oddzielone od głównej linii dowodowej i wpisywane przy linii dowodowej tej subderywacji. Całą subderywacją „rządzi” założenie dodatkowe, tj. że Kuba pojedzie do Zakopanego. Wszystkie kroki w subderywacji są oparte na tym właśnie założeniu. Przecież nie wiemy, że Kuba obleje egzamin z Biologicznych Mechanizmów Zachowania na podstawie założeń (1)–(4); wiemy, że Kuba obleje egzamin z Biologicznych Mechanizmów Zachowania, *o ile* pojedzie do Zakopanego. Subderywacje służą temu, abyśmy rozumieli w kontekście jakich założeń, co z czego wynika.

Spróbuj przełożyć nasze rozumowanie na formę symboliczną:

1.	$Z \rightarrow A$	Zał.	Z: Kuba pojedzie do <u>Z</u> akopanego.
2.	$A \rightarrow (\sim P \bullet \sim R)$	Zał.	A: Kuba będzie się uganiał za <u>A</u> sią.
3.	$\sim R \rightarrow \sim B$	Zał.	P: Kuba <u>P</u> rzyswoi sobie regułę wprowadzania implikacji.
4.	$\sim B \rightarrow \sim I$	Zał.	R: Kuba p <u>R</u> zygotuje się do testu z Biol. Mech. Zach. B: Kuba zda egzamin z <u>B</u> iol. Mech. Zach. I: Asia będzie się <u>I</u> nterесować Kubą.
<hr/>			
5.		Zał. (\rightarrow Wpr)	
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.	$Z \rightarrow \sim I$	\rightarrow Wpr 5–10	

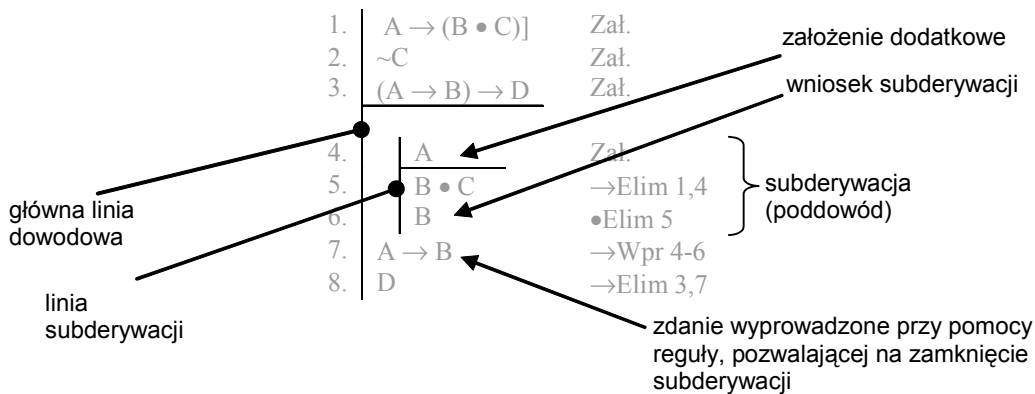
Reguła \rightarrow Wpr jest oparta na powyższych intuicjach, zanim ją przedstawimy, wprowadzimy trochę terminologii, która będzie pomocna w omawianiu reguł korzystających z subderywacji, oraz wprowadzimy regułę R, która rządzi przepływem informacji w dowodach z subderywacjami.

12.2. Subderywacje

Derywacje mogą zawierać subderywacje. Każda subderywacja:

- ma swą własną linię derywacyjną
- ma dokładnie *jedno* założenie zwane założeniem dodatkowym (podkreślone linią założeniową)
- może zawierać dowolną ilość kroków
- ostatnie zdanie w subderywacji jest jej wnioskiem.

Oto przykład dowodu zawierającego subderywację (proszę się na razie nie starać zrozumieć dowodu, lecz tylko przyrzeć się oznaczeniom):



Czy wiesz, że ...

Systemy naturalnej dedukcji, taki jak prezentowany tu system SD nazywa się systemami „w stylu Fitcha” (*Fitch-style natural deduction systems*) za nazwiskiem logika, który po raz pierwszy użył takich struktur graficznych (linii derywacji, linii założeń pierwotnych, linii subderywacji i linii założeń dodatkowych) do zaznaczenia toku wnioskowania. Od roku 1952, w którym Fitch opublikował swój podręcznik, systemy w stylu Fitcha robiły karierę – również dydaktyczną, gdyż pozwalały na lepsze i łatwiejsze opanowanie dowodów podrzędnych, czyli subderywacji.

Warto jednakże wspomnieć, że graficzną metodę zaznaczania subderywacji wprowadził już Jaśkowski. Wprowadził on bowiem dwie metody zaznaczania subderywacji. Jedna z nich – właśnie graficzna – polegała na tym, że subderywacja ujmowana była w ramkę. Druga z nich była dużo łatwiejsza do złożenia w drukarni i polegała na odpowiednim ponumerowaniu kroków subderywacji. Z pewną poprawką na reguły inferencji, które miały nieco inną postać u Jaśkowskiego – ten sam dowód tautologii $[(A \bullet B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$ prezentowałby się następująco w tych dwóch systemach notacyjnych:

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał. (\rightarrow Wpr)	1.1	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał. (\rightarrow Wpr)
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	2.1.1	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	3.1.1.1	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 2,3	4.1.1.1	$A \bullet B$	\bullet Wpr 2, 3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4	5.1.1.1	C	\rightarrow Elim 1, 4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3–5	6.1.1	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2–6	7.1	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6
8.	$[(A \bullet B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$	\rightarrow Wpr 1–7	8.	$[(A \bullet B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$	\rightarrow Wpr 1–7

W jednym z najlepszych podręczników polskich, opracowanym przez Borkowskiego i Słupeckiego, stosowany jest też numeryczny system zaznaczania subderywacji, choć jeszcze inaczej niż to robił Jaśkowski, a mianowicie kolejny krok wnioskowania jest naliczany w obrębie subderywacji. A zatem poszczególne kroki nosiłyby następujące numeracje: 1.1, 1.1.1, 1.1.1.1, 1.1.1.2, 1.1.1.3, 1.1.2., 1.2. 2.

F.J. Pelletier (2000) „A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks” [w:] J. Woods, B. Brown (eds) *Logical Consequence: Rival Approaches, Vol. 1.* (Oxford: Hermes Science Pubs) pp. 105-138.

12.3. Reguła \rightarrow Wpr (Reguła wprowadzania implikacji; dowód warunkowy)

Jeżeli w subderywacji dowodu macierzystego, której założeniem (dodatkovym) jest p , można wyprowadzić (swobodnie występujące) r , to do dowodu macierzystego wolno dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje implikacja $p \rightarrow r$.

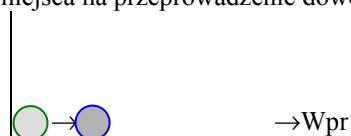
$i.$	p	Zał. (\rightarrow Wpr)
$j.$	r	
\triangleright	$p \rightarrow r$	\rightarrow Wpr $i-j$

Intuicje

Jeśli z założenia, że p , można wyprowadzić r , to prawdziwą jest implikacja $p \rightarrow r$. Jedno ze sposobów odczytania implikacji jest wszakże „ r przy założeniu, że p ”.

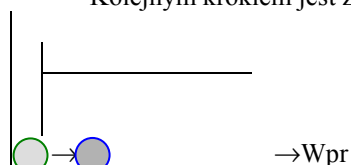
Konstruowanie subderywacji dla Reguły \rightarrow Wpr

Reguła wprowadzania implikacji jest regułą konstrukcyjną. Stosowanie reguł konstrukcyjnych wiąże się z koniecznością przygotowania dowodu oraz pewnej zmiany zapisów dowodów. Do tej pory mogliśmy zapisywać zdania, do których wyprowadzenia dążymy z boku. W wypadku takich reguł jak \rightarrow Wpr należy wpisać implikację, którą chcemy wyprowadzić na dole derywacji zostawiając «dość» miejsca na przeprowadzenie dowodu:



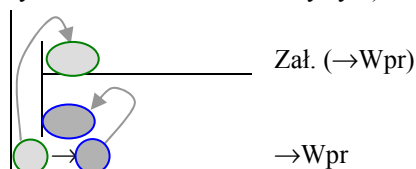
Ile miejsca to «dość» miejsca, trudno jest powiedzieć. Z czasem wyrobicie sobie w tej materii intuicję. Zawsze lepiej jest zostawić więcej miejsca niż za mało. Warto też zaznaczyć sobie, że implikacja taka ma być uzyskana za pomocą reguły \rightarrow Wpr – choć pełne uzasadnienie otrzymamy dopiero później.

Kolejnym krokiem jest zbudowanie subderywacji:



Trzeba subderywację fizycznie narysować *nad* implikacją, którą chcemy z takiej subderywacji wyprowadzić.

Ostatnim krokiem przygotowania dowodu jest wpisanie założenia subderywacji, które można uzasadnić na mocy reguły \rightarrow Wpr (jako „Zał. (\rightarrow Wpr)”) oraz wniosku subderywacji, który będziemy musieli uzasadnić na podstawie reszty dowodu. Reguła \rightarrow Wpr *ściśle determinuje*, jakie ma być założenie dodatkowe tej subderywacji (zawsze: poprzednik implikacji, którą chcemy uzyskać w dowodzie macierzystym), oraz jaki ma być jej wniosek (zawsze: następnik implikacji, którą chcemy uzyskać w dowodzie macierzystym).



Po takim przygotowaniu możemy przejść do przeprowadzania dowodu. Celem, na którym trzeba się skoncentrować jest wyprowadzenia wniosku subderywacji z pozostałych zdań dowodu.

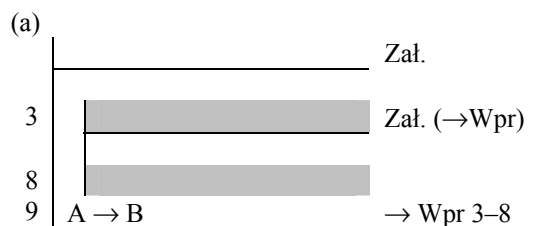
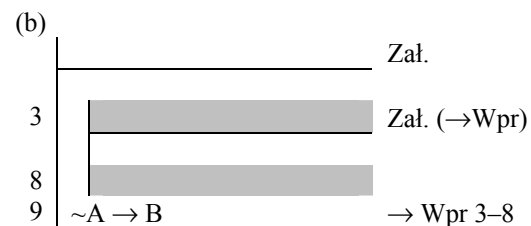
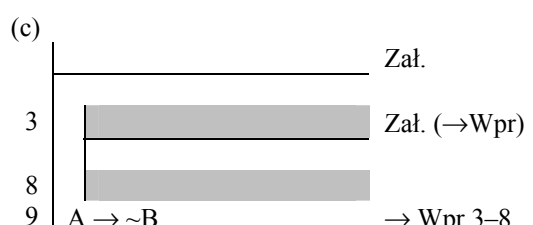
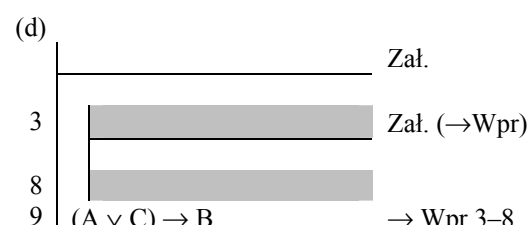
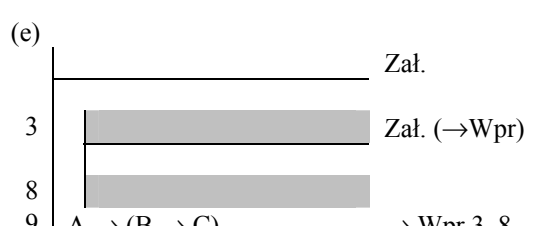
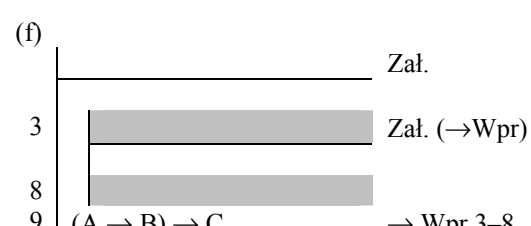
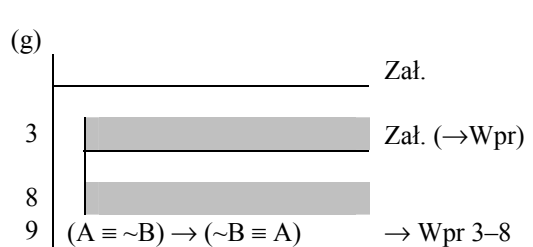
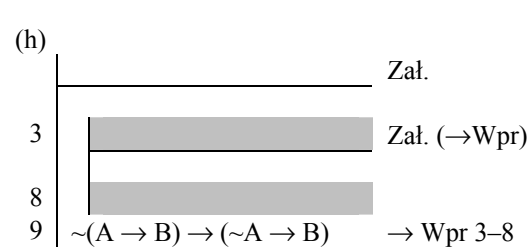
Zanim przejdziecie do przykładów, sprawdźcie swoje opanowanie tych podstaw stosowania reguły \rightarrow Wpr w następujących ćwiczeniach.

Ćwiczenia na stosowanie reguły \rightarrow Wpr

\rightarrow Wpr.I.a. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować regułę \rightarrow Wpr, aby wyprowadzić pewną implikację. Aby to zrobić trzeba skonstruować subderywację (została już skonstruowana). Określ jaką implikację można wyprowadzić w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|--|------|---|---------------------------|---|------|---|-----------------------|-----|---|--|------|---|---------------------------|---|------|---|-----------------------|
| (a) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | (b) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (c) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | (d) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (e) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | (f) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (g) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrowWpr 3-8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3-8 | (h) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3-8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| (i) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | (j) | <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;"></td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; width: 50px;">3</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">8</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 50px;">9</td> <td style="width: 50px; text-align: right;">\rightarrow Wpr 3–8</td> </tr> </table> | | Zał. | 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | 8 | Zał. | 9 | \rightarrow Wpr 3–8 |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | Zał. (\rightarrow Wpr) | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | \rightarrow Wpr 3–8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

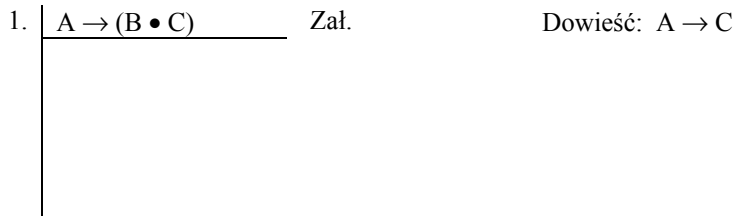
→Wpr.I.b. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować →Wpr, aby wyprowadzić pewną implikację. Aby to zrobić trzeba skonstruować subderywację (została już skonstruowana). Wpisz założenie dodatkowe subderywacji oraz wniosek, jaki trzeba będzie wyprowadzić w tej subderywacji, aby można było zastosować regułę →Wpr w kroku 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna.)

- (a) 
- (b) 
- (c) 
- (d) 
- (e) 
- (f) 
- (g) 
- (h) 

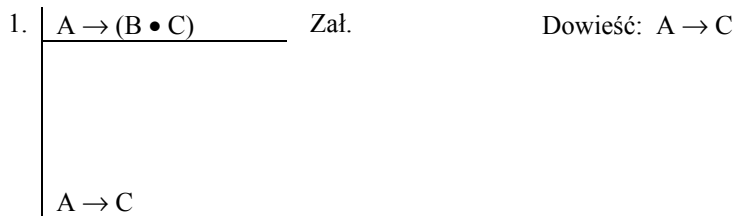
12.4. Przykłady prostych dowodów z zastosowaniem reguły \rightarrow Wpr

Przykład 1.

Proszę dowieść, że $A \rightarrow C$ w oparciu o przesłankę $A \rightarrow (B \bullet C)$. Rozumowanie takie jest niewątpliwie prawidłowe. Odpowiada mu wnioskowanie np. „Jeżeli Ania pójdzie na imprezę, to pozna Beatę i Czesia. Zatem, jeżeli Ania pójdzie na imprezę, to pozna Czesia.”

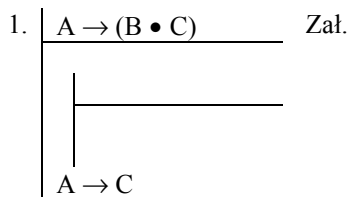


W wypadku reguł konstrukcyjnych warto zmienić sposób podejścia do dowodu. Do tej pory dokonywaliśmy analizy na boku niejako. Teraz warto nam będzie zacząć czynnie wpisywać to, co chcemy uzyskać na dole linii derywacyjnej. W powyższym wypadku przygotowujemy dowód tak:

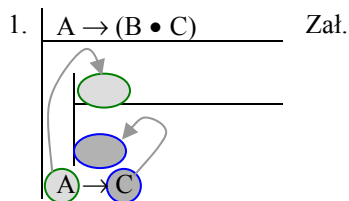


Wpisujemy wniosek na dole głównej linii dowodowej (niestety nie ma zasady, która pozwoliłaby nam na określenie, ile miejsca potrzeba – lepiej zostawić więcej niż za mało). **Uwaga!** Nasze wpisanie zdania $A \rightarrow C$ na dole linii dowodowej nie jest równoznaczne z tym, że zdanie to wyprowadziliśmy! Ma nam tylko *przypominać*, co mamy wyprowadzić. Dlatego też nie wolno nam jeszcze zdania $A \rightarrow C$ używać w dowodzie. Nie ma ono ani numeru wiersza, ani swego uzasadnienia. Stanie się częścią dowodu dopiero wówczas gdy uzyska swoje uzasadnienie.

Ponieważ naszym celem jest wyprowadzenie implikacji, więc musimy zastosować regułę \rightarrow Wpr, która wymaga, po pierwsze, abyśmy *skonstruowali subderywację*:



Po wtóre, musimy uzupełnić konstrukcję subderywacji wpisując jej założenie, oraz wniosek, do którego wprowadzenia będziemy dążyli. Reguła \rightarrow Wpr dokładnie określa, co musi być założeniem, a co wnioskiem subderywacji, która pozwoli nam na wyprowadzenie $A \rightarrow C$ na linię dowodu macierzystego. Te informacje musimy od razu wpisać.



Założenie subderywacji, czyli swobodnie stojące zdanie A (poprzednik implikacji, którą chcemy wyprowadzić za pomocą reguły \rightarrow Wpr) staje się już częścią dowodu – jest uzasadnione na mocy reguły \rightarrow Wpr jako założenie dodatkowe, więc możemy włączyć wiersz, w którym się znajduje do dowodu. Natomiast wniosek derywacji, czyli swobodnie stojące zdanie C (następnik implikacji, którą chcemy wyprowadzić za pomocą reguły \rightarrow Wpr) wpisujemy na końcu linii subderywacji na razie bez uzasadnienia, gdyż wniosek ten również nie jest jeszcze częścią dowodu. Dopiero gdy znajdziemy uzasadnienie dla wyprowadzenia C, wówczas wiersz ten będzie można dołączyć do dowodu:

1.	A \rightarrow (B \bullet C)	Zał.						
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \rightarrow C</td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	C		A \rightarrow C		
A	Zał. (\rightarrow Wpr)							
C								
A \rightarrow C								

Powtórzmy jeszcze raz: nie wiemy jeszcze jak uzasadnić zdanie C (mające być wnioskiem subderywacji) i zdanie A \rightarrow C (mające być wnioskiem dowodu). Skoncentrować się teraz musimy najpierw na znalezieniu uzasadnienia dla zdania C opierając się zarówno na przesłance A \rightarrow (B \bullet C), jak i na założeniu dodatkowym A. (W tym dowodzie korzystać możemy z całości dostępnej wyżej informacji. Nie musi tak jednak być. Wprowadzimy niedługo regułę R, która określa dokładnie z jakich informacji wolno korzystać w subderywacjach, a z jakich nie.)

Wyprowadzenie C ze zdań występujących w wierszach 1 oraz 2 nie nastręcza żadnych trudności. Ponieważ dana jest implikacja A \rightarrow (B \bullet C) w wierszu 1 oraz jej poprzednik A w wierszu 2, więc możemy wyprowadzić jej następnik za pomocą reguły \rightarrow Elim:

1.	A \rightarrow (B \bullet C)	Zał.								
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B \bullet C</td> <td style="padding-left: 20px;">\rightarrowElim 1, 2</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \rightarrow C</td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	B \bullet C	\rightarrow Elim 1, 2	C		A \rightarrow C		
A	Zał. (\rightarrow Wpr)									
B \bullet C	\rightarrow Elim 1, 2									
C										
A \rightarrow C										

Skoro w wierszu 3 mamy koniunkcję B \bullet C, to możemy wyprowadzić jej drugi człon za pomocą reguły \bullet Elim:

1.	A \rightarrow (B \bullet C)	Zał.								
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B \bullet C</td> <td style="padding-left: 20px;">\rightarrowElim 1, 2</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;">\bulletElim 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \rightarrow C</td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	B \bullet C	\rightarrow Elim 1, 2	C	\bullet Elim 3	A \rightarrow C		
A	Zał. (\rightarrow Wpr)									
B \bullet C	\rightarrow Elim 1, 2									
C	\bullet Elim 3									
A \rightarrow C										

W ten sposób wyprowadziliśmy w subderywacji zdanie C. To znaczy, że zrobiliśmy to, czego wymagała od nas reguła \rightarrow Wpr. Mieliśmy skonstruować subderywację, której założeniem dodatkowym był poprzednik implikacji, którą chcieliśmy wyprowadzić w derywacji macierzystej. Uczyniliśmy to – skonstruowaliśmy subderywację, której założeniem dodatkowym jest A. Mieliśmy wyprowadzić w tej subderywacji wniosek, którym miał być następnik implikacji, którą chcieliśmy wyprowadzić w derywacji macierzystej. Uczyniliśmy to – w subderywacji o założeniu dodatkowym A, wyprowadziliśmy C. Możemy zatem zamknąć subderywację, a w derywacji macierzystej (czyli w naszym przypadku w derywacji głównej) wpisać implikację, której poprzednikiem jest założenie dodatkowe zamykanej subderywacji (A), a której następnikiem jest wniosek zamykanej subderywacji (C), czyli implikację A \rightarrow C:

1.	A \rightarrow (B \bullet C)	Zał.								
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B \bullet C</td> <td style="padding-left: 20px;">\rightarrowElim 1, 2</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;">\bulletElim 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \rightarrow C</td> <td style="padding-left: 20px;">\rightarrowWpr 2–4</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	B \bullet C	\rightarrow Elim 1, 2	C	\bullet Elim 3	A \rightarrow C	\rightarrow Wpr 2–4	
A	Zał. (\rightarrow Wpr)									
B \bullet C	\rightarrow Elim 1, 2									
C	\bullet Elim 3									
A \rightarrow C	\rightarrow Wpr 2–4									

Przykład 2.

Proszę dowieść, że $(A \bullet C) \rightarrow \sim D$ w oparciu o przesłankę $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$.

1.	$A \rightarrow (B \bullet \sim D)$ _____	Zał.	Dowieść: $(A \bullet C) \rightarrow \sim D$

Naturalną reakcją na to zadanie jest konsternacja. „Skąd C?” ciśnie się nam na usta. Nie konsternujemy się tylko zrobimy dokładnie to, co reguła \rightarrow Wpr nakazuje (wszakże wniosek jest implikacją, więc prawie na pewno musimy skorzystać z reguły wprowadzania implikacji). Wpiszmy wniosek na dole derywacji:

1.	$A \rightarrow (B \bullet \sim D)$ _____	Zał.
	$(A \bullet C) \rightarrow \sim D$	

Skonstruujmy subderywację, od razu wpisując jej założenie dodatkowe i wniosek:

1.	$A \rightarrow (B \bullet \sim D)$ _____	Zał.
2.	$A \bullet C$ _____	Zał. (\rightarrow Wpr)
	$\sim D$	
	$(A \bullet C) \rightarrow \sim D$	

Nasze zadanie staje się teraz łatwiejsze. Mamy wyprowadzić $\sim D$ z dwóch zdań: implikacji $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$ oraz koniunkcji $A \bullet C$. Przeprowadzamy taką samą analizę docelową jak dotychczas. Zdanie $\sim D$ jest członem koniunkcji i będziemy je mogli wydobyc za pomocą reguły \bullet Elim, ale musielibyśmy najpierw mieć swobodnie występującą koniunkcję $B \bullet \sim D$. Koniunkcja $B \bullet \sim D$ jest następnikiem implikacji w wierszu pierwszym i będziemy ją mogli wyprowadzić za pomocą reguły \rightarrow Elim, o ile dany nam będzie swobodnie występujący poprzednik tej implikacji, tj. zdanie A. Zdanie A jest członem koniunkcji występującej swobodnie w wierszu 2, możemy je zatem wyprowadzić za pomocą reguły \bullet Elim. Wprowadzając cały nasz plan w życie możemy uzasadnić zdanie $\sim D$. (Dowód w całości przedstawiony jest w *Rozwiązaniach*.)

Po uzasadnieniu $\sim D$, możemy zamknąć subderywację i uzasadnić wprowadzenie do derywacji macierzystej implikacji, której poprzednikiem jest założenie dodatkowe tej subderywacji ($A \bullet C$), a następnikiem wniosek tej subderywacji ($\sim D$), czyli implikację $(A \bullet C) \rightarrow \sim D$.

Przykład 3.

Dowieść, że z przesłanki $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ wynika wniosek $(A \bullet B) \rightarrow C$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.	Dowieść: $(A \bullet B) \rightarrow C$

Naszym zadaniem jest wyprowadzić implikację $(A \bullet B) \rightarrow C$. Zastosujemy regułę \rightarrow Wpr, a zatem musimy skonstruować odpowiednią subderywację z poprzednikiem tej implikacji (czyli zdaniem $A \bullet B$) jako założeniem dodatkowym, a następnikiem tej implikacji (tj. zdaniem C) jako wnioskiem subderywacji. Wprowadzenie do dowodu założenia dodatkowego $A \bullet B$ sprawia, że wyprowadzenie zdania C staje się na tyle proste, że nie będziemy go już tu komentować. Po skonstruowaniu dowodu proszę sprawdzić, czy się zgadza z dowodem z Rozwiązań.

Ćwiczenia na dowodzenie z regułą \rightarrow Wpr

\rightarrow Wpr.II. W następujących dowodach uzupełnij konstrukcję subderywacji (wpisując założenie dodatkowe w wierszu 3, oraz żądany wniosek subderywacji w wierszu 5), a następnie uzupełnij brakujący krok w wierszu 4 oraz uzasadnij wszystkie kroki:

<p>(a)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$A \rightarrow (B \vee C)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim B$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">$A \rightarrow C$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$A \rightarrow C$		<p>(b)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$A \rightarrow (B \equiv \sim D)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim D$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">$A \rightarrow B$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \equiv \sim D)$	Zał.	2.	$\sim D$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$A \rightarrow B$	
1.	$A \rightarrow (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim B$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$A \rightarrow C$																																				
1.	$A \rightarrow (B \equiv \sim D)$	Zał.																																			
2.	$\sim D$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$A \rightarrow B$																																				
<p>(c)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">C</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim A \rightarrow B$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.	2.	C	Zał.	3.			4.			5.			6.	$\sim A \rightarrow B$		<p>(d)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$B \vee (B \vee C)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim B$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">$A \rightarrow C$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$B \vee (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$A \rightarrow C$	
1.	$\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.																																			
2.	C	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$\sim A \rightarrow B$																																				
1.	$B \vee (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim B$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$A \rightarrow C$																																				
<p>(e)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$A \equiv (B \vee C)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim D$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \equiv (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim D$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$		<p>(f)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$(A \equiv B) \vee (B \vee C)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim(A \equiv B)$</td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;">$\sim B \rightarrow C$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$(A \equiv B) \vee (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim(A \equiv B)$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$\sim B \rightarrow C$	
1.	$A \equiv (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim D$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$																																				
1.	$(A \equiv B) \vee (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim(A \equiv B)$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$\sim B \rightarrow C$																																				

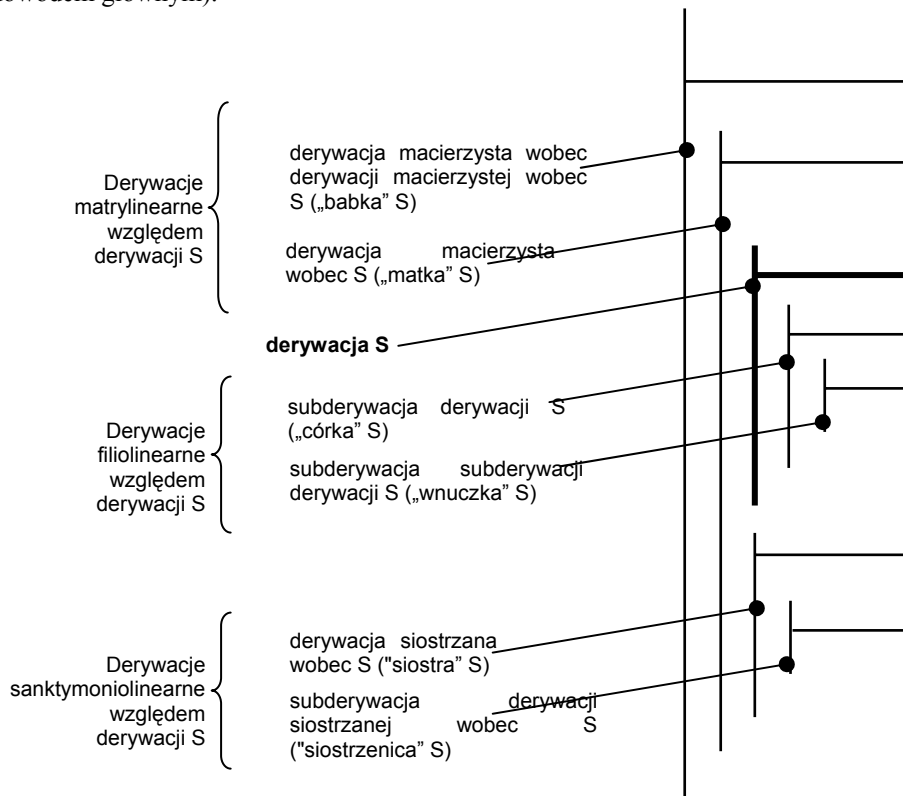
12.5. Subderywacje subderywacji

Ponieważ każda subderywacja jest derywacją, zatem subderywacje mogą również zawierać dalsze subderywacje. Derywację D , która bezpośrednio zawiera subderywację S nazwiemy *derywacją macierzystą* względem subderywacji S . Możemy myśleć o derywacji D jako o „matce” derywacji S , a o subderywacji S jako o „córce” derywacji D . Subderywacja S może również zawierać swoją „córkę”, subderywację S' . Subderywacja S' będzie „wnuczką” derywacji D , która jest dla S' „babką”.

Subderywacje mogą również mieć „siostry”: jeśli dwie subderywacje mają tę samą derywację macierzystą, to są subderywacjami siostrzanymi. Relacje te ilustruje schemat przedstawiony na Rys. 1.

Ważnym pojęciem jest pojęcie *linii matrylinearnej* danej subderywacji S , na którą składają się wszystkie derywacje będące matką S , babką S , prababką S , praprababką S , itd. Należy zauważyć, że linia matrylinearna danej subderywacji *nie obejmuje* ani własnych sióstr, ani sióstr matki, ani sióstr babki, ani sióstr prababki, etc. Podobnie na *derywacje filiolinearne* danej derywacji D składają się wszystkie córki, wnuczki, prawnuczki, etc., tj. wszystkie subderywacje derywacji D , subderywacje subderywacji derywacji D , subderywacje subderywacji subderywacji derywacji D , etc. Na *derywacje sanktymoniolinearne* (derywacje z linii siostrzanej) składają się wszystkie derywacje siostrzane oraz wszystkie derywacje wobec nich filiolinearne.

Warto zwrócić uwagę, że pojęcia „derywacji macierzystej” oraz „subderywacji” są pojęciami względnymi – derywacja jest derywacją macierzystą zawsze względem jakiejś derywacji; podobnie derywacja jest subderywacją zawsze względem jakiejś derywacji. (Zupełnie tak samo ma się sprawa z byciem matką czy córką – zawsze jest się czyjąś matką, czyjąś córką.) W przypadku derywacji może być tak, że dana derywacja nie ma derywacji macierzystej – wówczas jest derywacją główną (dowodem głównym).



Rys. 1.

Definicje pojęć derywacji matrylinearnej, filiolinearnej i sanktymoniolinearnej

Pojęcia te można zdefiniować precyzyjniej. Niech pojęciem pierwotnym będzie pojęcie bycia **derywacją macierzystą**.

Derywacja d jest (bezpośrednią) **subderywacją** derywacji D zawsze i tylko wtedy, gdy derywacja D jest derywacją macierzystą wobec derywacji d .

Derywacja D' jest derywacją **matrylinearną** wobec derywacji D zawsze i tylko wtedy, gdy:

- (0) derywacja D' jest derywacją macierzystą wobec derywacji D , lub
- (1) istnieje taka derywacja D_x , że derywacja D_x jest derywacją matrylinearną wobec derywacji D , a derywacja D' jest derywacją macierzystą wobec derywacji D_x .

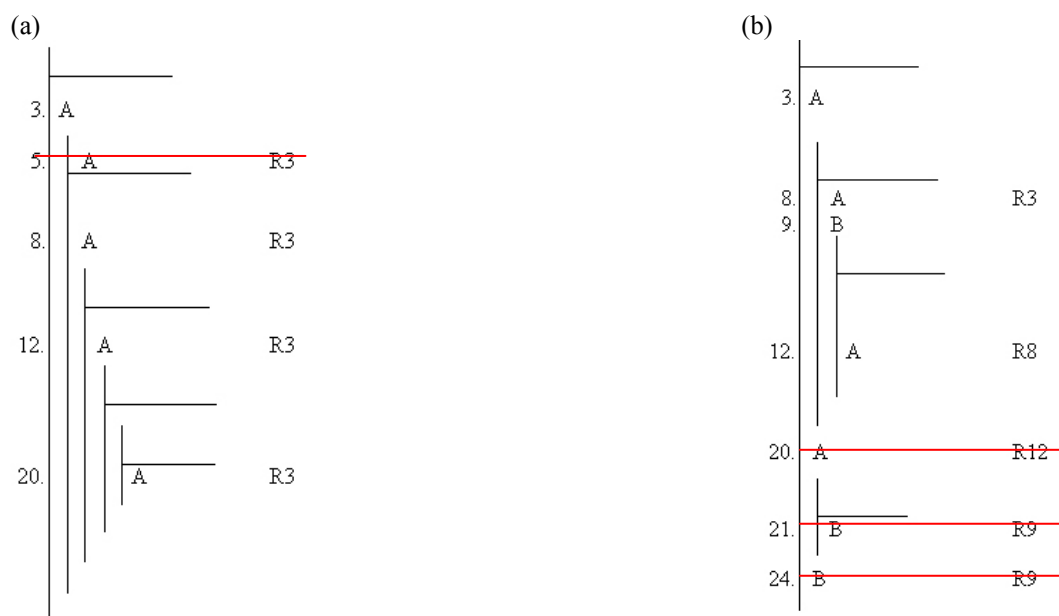
Derywacja D' jest derywacją **filiolinearną** wobec derywacji D zawsze i tylko wtedy, gdy:

- (0) derywacja D' jest (bezpośrednią) subderywacją derywacji D , lub
- (1) istnieje taka derywacja D_x , że derywacja D_x jest filiolinearna wobec derywacji D , a derywacja D' jest (bezpośrednią) subderywacją derywacji D_x .

Derywacja D' jest derywacją **sanktymoniolinearną** wobec derywacji D zawsze i tylko wtedy, gdy:

- (0) istnieje derywacja D_m , taka, że derywacja D_m jest derywacją macierzystą względem derywacji D' oraz D , lub
- (1) istnieje taka derywacja D_x , że derywacja D_x jest derywacją sanktymoniolinearną wobec derywacji D , a derywacja D_x jest derywacją macierzystą wobec derywacji D' lub istnieje taka derywacja D_x , że derywacja D_x jest derywacją sanktymoniolinearną wobec derywacji D' , a derywacja D_x jest derywacją macierzystą wobec derywacji D .

Rozważmy „szkielety derywacyjne” (a) i (b) z Rys. 2.



Rys. 2.

W szkielecie (a) jedyny nieprawidłowy krok znajduje się w wierszu 5, gdyż reguła reiteracji nie może uzasadnić założenia subderywacji! W szkielecie (b) nieprawidłowych kroków jest więcej:

W wierszu 20 próbuje się wyprowadzić informację znajdującą się w subderywacji subderywacji, ale przecież córki nie przekazują informacji matkom, wnuczki – babkom, etc.

Wiersz 21: B występuje w wierszu 9, który jest wierszem derywacji siostrzanej względem danej, zatem nie wolno powtórzyć B w wierszu 21.

Wiersz 24: B występuje w wierszu 9, który jest wierszem subderywacji (córki), zatem nie wolno powtórzyć B w wierszu 24.

Stosowanie reguły R *implicite* i *explicite*

Regułę R można stosować *explicite*, lecz jest to dość uciążliwe, gdyż dowód znacznie się wtedy rozrasta. Reguła R bardzo często funkcjonuje w dowodach „wykonywanych” przez ludzi (w przeciwieństwie do komputerów) w formie *implicite* – a polega po prostu na tym, że w dowodzie korzystamy tylko ze zdań, które wolno powtórzyć uzasadniając to powtórzenie regułą R. Oto przykład tego samego dowodu, pierwszy stosuje regułę R *implicite*, drugi – *explicite*:

<p>1. $(D \vee A) \rightarrow (C \rightarrow B)$</p> <p>2. $C \bullet \sim A$</p> <hr/> <p>3. D</p> <p>4. $D \vee A$</p> <p>5. $C \rightarrow B$</p> <p>6. C</p> <p>7. B</p> <p>8. $D \rightarrow B$</p>	<p>Zał.</p> <p>Zał.</p> <p>Zał.</p> <p>\veeWpr 3</p> <p>\rightarrowElim 1,4</p> <p>\bulletElim 2</p> <p>\rightarrowElim 5,6</p> <p>\rightarrow Wpr 3–7</p>	<p>1. $(D \vee A) \rightarrow (C \rightarrow B)$</p> <p>2. $C \bullet \sim A$</p> <hr/> <p>3. D</p> <p>4. $D \vee A$</p> <p>5. $(D \vee A) \rightarrow (C \rightarrow B)$</p> <p>6. $C \rightarrow B$</p> <p>7. $C \bullet \sim A$</p> <p>8. C</p> <p>9. B</p> <p>10. $D \rightarrow B$</p>	<p>Zał.</p> <p>Zał.</p> <p>Zał.</p> <p>\veeWpr 3</p> <p>R1</p> <p>\rightarrowElim 4, 5</p> <p>R2</p> <p>\bulletElim 7</p> <p>\rightarrowElim 6,8</p> <p>\rightarrow Wpr 3–9</p>
--	---	---	--

Obydwa dowody są prawidłowe. Dowód drugi jest po prostu dłuższy. Ze względów praktycznych, przyjmijmy konwencję stosowania reguły R *implicite*, choć niekiedy zastosowanie reguły R *explicite* jest konieczne, co ilustruje następujący przykład

Przykład 4.

Proszę dowieść, że $C \rightarrow A$ wynika z przesłanki A. Mamy wyprowadzić implikację z bardzo prostej przesłanki, więc musimy skorzystać z reguły wprowadzania implikacji. Skonstruujemy stosowną subderywację z poprzednikiem implikacji $C \rightarrow A$ jako założeniem dodatkowym oraz z następnikiem tej implikacji jako żądanym wnioskiem:

1.	A	_____	Zał.
2.	C	_____	Zał. (\rightarrow Wpr)
	A		
	C \rightarrow A		

Jak wyprowadzić zdanie A z przesłanek: A (wiersz 1) oraz C (wiersz 2)? Po prostu przez powtórzenie.

Ćwiczenia na zastosowanie reguły R

R.I. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” wskaż wszystkie wiersze, w których można dokonać powtórzenia (R) wyróżnionego zdania. (Pamiętaj, że założenia subderywacji są zawsze uzasadniane jako założenia, natomiast zdania znajdujące się w wierszu derywacji macierzystej zamykającym subderywację wolno uzasadniać tylko przez odwołanie do konstrukcyjnych reguł inferencyjnych.)

(a)

1.	A	_____
2.	_____	
3.	_____	
4.	_____	
5.	_____	
6.	_____	
7.	_____	
8.	_____	
9.	_____	
10.	_____	
11.	_____	
12.	_____	
13.	_____	
14.	_____	
15.	_____	
16.	_____	
17.	_____	
18.	_____	
19.	_____	
20.	_____	
21.	_____	

(b)

1.	_____	
2.	A	
3.	_____	
4.	_____	
5.	_____	
6.	_____	
7.	_____	
8.	_____	
9.	_____	
10.	_____	
11.	_____	
12.	_____	
13.	_____	
14.	_____	
15.	_____	
16.	_____	
17.	_____	
18.	_____	
19.	_____	
20.	_____	
21.	_____	

12.7. Przykłady dowodów z zagnieżdżającymi się subderywacjami

Przykład 5.

Dowiedź, że z przesłanki $(A \bullet B) \rightarrow C$ wynika wniosek $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.	Dowieść: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Dowiedliśmy już (por. Przykład 3, wyżej), że $(A \bullet B) \rightarrow C$ wynika logicznie z $A \rightarrow (B \rightarrow C)$. Mamy teraz dowieść implikacji odwrotnej. Zaczynamy jak zwykle od skonstruowania odpowiedniej subderywacji, której założeniem dodatkowym jest poprzednik implikacji, którą mamy wyprowadzić, czyli zdanie A , a której wnioskiem jest następnik tej implikacji, czyli zdanie $B \rightarrow C$.

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.								
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> A </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ </td> <td></td> </tr> </table>	$B \rightarrow C$		$A \rightarrow (B \rightarrow C)$			
A	Zał. (\rightarrow Wpr)									
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ </td> <td></td> </tr> </table>	$B \rightarrow C$		$A \rightarrow (B \rightarrow C)$							
$B \rightarrow C$										
$A \rightarrow (B \rightarrow C)$										

Jak wyprowadzić $B \rightarrow C$ z założeń 1 i 2? Nie za bardzo wiadomo, ale ponieważ $B \rightarrow C$ to implikacja, więc spróbujemy zastosować regułę \rightarrow Wpr jeszcze raz. Musimy zatem przygotować kolejną subderywację z poprzednikiem implikacji $B \rightarrow C$ (czyli zdaniem B) jako założeniem dodatkowym, a następnikiem implikacji $B \rightarrow C$ (czyli zdaniem C) jako wnioskiem tej subderywacji. Mamy zatem strukturę następującą:

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.														
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> A </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> B </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> C </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> B </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> C </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> B </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> C </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	C		$B \rightarrow C$			$A \rightarrow (B \rightarrow C)$			
A	Zał. (\rightarrow Wpr)															
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> B </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> C </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ </td> <td></td> </tr> </table>	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> B </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> C </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	C		$B \rightarrow C$			$A \rightarrow (B \rightarrow C)$							
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> B </td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> C </td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> $B \rightarrow C$ </td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	C		$B \rightarrow C$											
B	Zał. (\rightarrow Wpr)															
C																
$B \rightarrow C$																
$A \rightarrow (B \rightarrow C)$																

A teraz – mimo, iż można dostać tymczasowego oczopląsu – zadanie się znacznie upraszcza. Sprowadza się ono bowiem do tego, żeby wyprowadzić zdanie C korzystając ze wszystkich założeń, a więc: przesłanki $(A \bullet B) \rightarrow C$ oraz założeń dodatkowych A (z wiersza 2) i B (z wiersza 3). Proste –

zastosujemy regułę \rightarrow Elim, ale do tego potrzebujemy poprzednik implikacji z wiersza 1, tj. $A \bullet B$, który łatwo uzyskamy stosując regułę \bullet Wpr.

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 2,3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	$B \rightarrow C$	
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	

Uzyskaliśmy zatem (w derywacji „wnuczce”) zdanie C , które pozwala nam zamknąć derywację „wnuczkę” i w derywacji dla niej macierzystej dodać implikację $B \rightarrow C$ uzasadniając ją regułą \rightarrow Wpr:

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 2,3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	

Uzyskaliśmy w ten sposób (w derywacji „córce”) zdanie $B \rightarrow C$, które pozwala nam zamknąć derywację „córkę” i w derywacji dla niej macierzystej, czyli w derywacji głównej, dodać implikację $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ uzasadniając ją regułą \rightarrow Wpr:

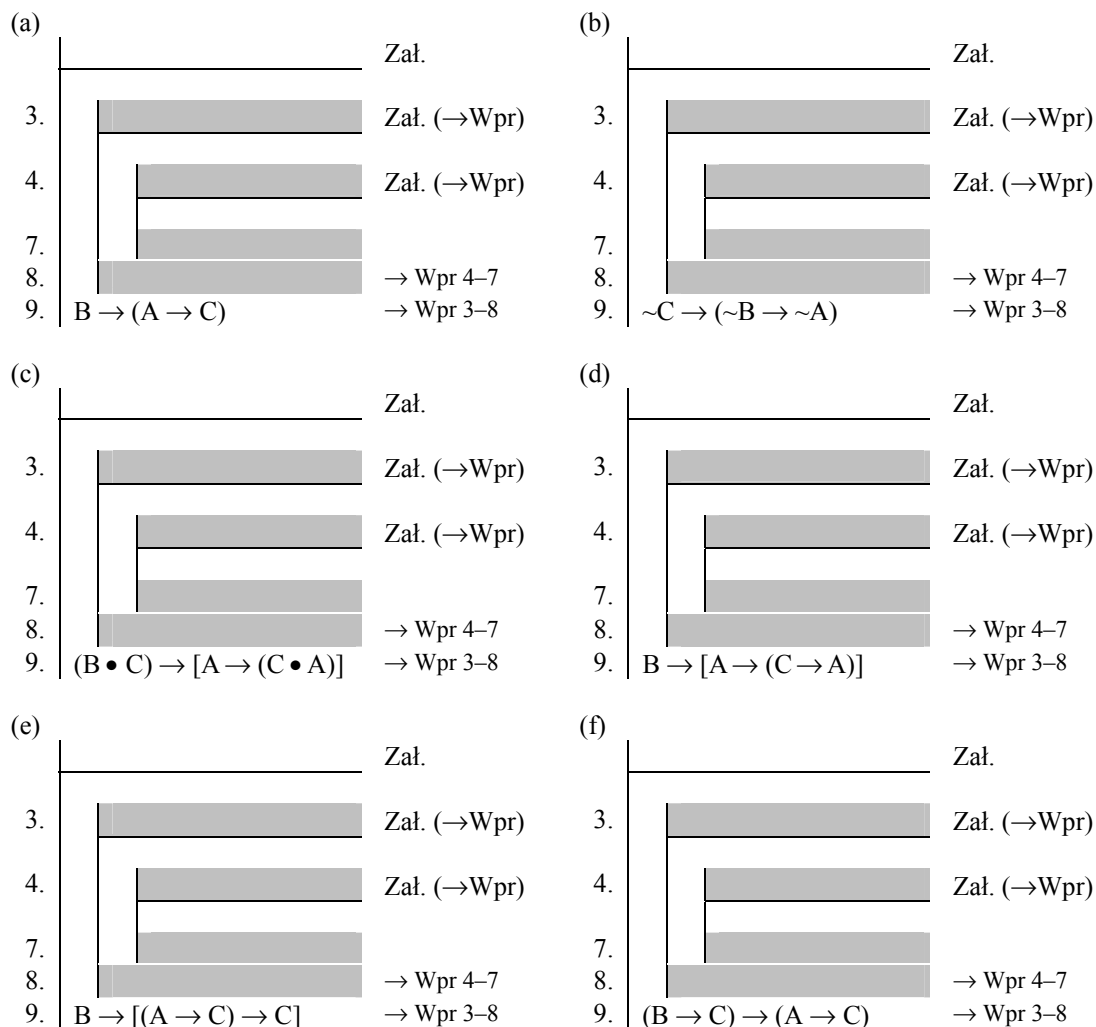
1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)
3.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)
4.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 2,3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 3-5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	\rightarrow Wpr 2-6

Ćwiczenia na stosowanie reguły \rightarrow Wpr

\rightarrow Wpr.I.c. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować regułę \rightarrow Wpr dwukrotnie, aby wyprowadzić pewną implikację, której następnikiem jest też implikacja. Aby to zrobić trzeba skonstruować dwie zagnieżdżone subderywacje (zostały już skonstruowane). Określ, jaką implikację można wyprowadzić w wierszu 8 oraz w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna.)

(a)	<table border="0"> <tr><td></td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> A</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>4.</td><td> B</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>7.</td><td> C</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 4-7</td></tr> <tr><td>9.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 3-8</td></tr> </table>		_____	Zał.	3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	7.	C		8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7	9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8	(b)	<table border="0"> <tr><td></td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> \simA</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>4.</td><td> B</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>7.</td><td> \simC</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 4-7</td></tr> <tr><td>9.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 3-8</td></tr> </table>		_____	Zał.	3.	\sim A	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	7.	\sim C		8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7	9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8
	_____	Zał.																																					
3.	A	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
7.	C																																						
8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7																																					
9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8																																					
	_____	Zał.																																					
3.	\sim A	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
7.	\sim C																																						
8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7																																					
9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8																																					
(c)	<table border="0"> <tr><td></td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> $B \vee C$</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>4.</td><td> \simB</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>7.</td><td> C</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 4-7</td></tr> <tr><td>9.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 3-8</td></tr> </table>		_____	Zał.	3.	$B \vee C$	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)	7.	C		8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7	9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8	(d)	<table border="0"> <tr><td></td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> \simB</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>4.</td><td> $B \vee C$</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>7.</td><td> C</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 4-7</td></tr> <tr><td>9.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 3-8</td></tr> </table>		_____	Zał.	3.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	$B \vee C$	Zał. (\rightarrow Wpr)	7.	C		8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7	9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8
	_____	Zał.																																					
3.	$B \vee C$	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
4.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
7.	C																																						
8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7																																					
9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8																																					
	_____	Zał.																																					
3.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
4.	$B \vee C$	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
7.	C																																						
8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7																																					
9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8																																					
(e)	<table border="0"> <tr><td></td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> \simB</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>4.</td><td> B</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>7.</td><td> $B \vee C$</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 4-7</td></tr> <tr><td>9.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 3-8</td></tr> </table>		_____	Zał.	3.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	7.	$B \vee C$		8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7	9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8	(f)	<table border="0"> <tr><td></td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> $A \rightarrow B$</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>4.</td><td> D</td><td>Zał. (\rightarrowWpr)</td></tr> <tr><td>7.</td><td> C</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 4-7</td></tr> <tr><td>9.</td><td> _____</td><td>\rightarrow Wpr 3-8</td></tr> </table>		_____	Zał.	3.	$A \rightarrow B$	Zał. (\rightarrow Wpr)	4.	D	Zał. (\rightarrow Wpr)	7.	C		8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7	9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8
	_____	Zał.																																					
3.	\sim B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
4.	B	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
7.	$B \vee C$																																						
8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7																																					
9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8																																					
	_____	Zał.																																					
3.	$A \rightarrow B$	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
4.	D	Zał. (\rightarrow Wpr)																																					
7.	C																																						
8.	_____	\rightarrow Wpr 4-7																																					
9.	_____	\rightarrow Wpr 3-8																																					

→Wpr.I.d. W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować regułę →Wpr dwukrotnie, aby wyprowadzić pewną implikację, której następnikiem jest też implikacja. Aby to zrobić trzeba skonstruować dwie zagnieżdżone subderywacje (zostały już skonstruowane). Wpisz założenia dodatkowe obydwu subderywacji oraz wnioski, jakie trzeba będzie wyprowadzić w każdej subderywacji, aby można było zastosować regułę →Wpr w kroku 8 oraz 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna.)



Ćwiczenia na dowodzenia z regułą \rightarrow Wpr

\rightarrow Wpr.III. W następujących dowodach uzupełnij konstrukcję obydwu subderywacji (wpisując założenia dodatkowe w wierszu 2 i 3, oraz żądane wnioski w wierszu 5 i 6), a następnie uzupełnij brakujący krok w wierszu 4 oraz uzasadnij wszystkie kroki:

<p>(a)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$(A \bullet B) \rightarrow C$</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$B \rightarrow (A \rightarrow C)$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.		2.				3.				4.				5.				6.				7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$			<p>(b)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$(A \vee G) \rightarrow C$</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow (B \rightarrow C)$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$(A \vee G) \rightarrow C$	Zał.		2.				3.				4.				5.				6.				7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$		
1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.																																																							
2.																																																									
3.																																																									
4.																																																									
5.																																																									
6.																																																									
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$																																																								
1.	$(A \vee G) \rightarrow C$	Zał.																																																							
2.																																																									
3.																																																									
4.																																																									
5.																																																									
6.																																																									
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$																																																								
<p>(c)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$(A \rightarrow C) \bullet G$</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow (B \rightarrow C)$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$(A \rightarrow C) \bullet G$	Zał.		2.				3.				4.				5.				6.				7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$			<p>(d)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$A \rightarrow (B \rightarrow C)$</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$B \rightarrow (A \rightarrow C)$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.		2.				3.				4.				5.				6.				7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$		
1.	$(A \rightarrow C) \bullet G$	Zał.																																																							
2.																																																									
3.																																																									
4.																																																									
5.																																																									
6.																																																									
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$																																																								
1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.																																																							
2.																																																									
3.																																																									
4.																																																									
5.																																																									
6.																																																									
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$																																																								
<p>(e)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$G \equiv (A \vee B)$</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$G \equiv (A \vee B)$	Zał.		2.				3.				4.				5.				6.				7.	$G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$			<p>(f)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;">$C \vee (B \vee A)$</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 10%;"></td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 5px;"> </td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$C \vee (B \vee A)$	Zał.		2.				3.				4.				5.				6.				7.	$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$		
1.	$G \equiv (A \vee B)$	Zał.																																																							
2.																																																									
3.																																																									
4.																																																									
5.																																																									
6.																																																									
7.	$G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$																																																								
1.	$C \vee (B \vee A)$	Zał.																																																							
2.																																																									
3.																																																									
4.																																																									
5.																																																									
6.																																																									
7.	$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$																																																								

12.8. Dalsze przykłady dowodów

Przykład 6.

Dowiedź, że zdanie B wynika z następujących trzech przesłanek:

- | | | | |
|----|-----------------------------------|------|------------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Zał. | Dowieść: B |
| 2. | $B \rightarrow C$ | Zał. | |
| 3. | $(A \rightarrow C) \rightarrow B$ | Zał. | |

Zdanie B występuje we wszystkich trzech przesłankach. Wiemy jednakże od razu, że nie wyprowadzimy B z przesłanki 2 – B występuje tam w poprzedniku implikacji, a żadna reguła inferencji nie pozwala nam wyprowadzić poprzednika implikacji. Mamy zatem do dyspozycji dwie pozostałe przesłanki. Zastanówmy się nad przesłanką 1. Moglibyśmy wyprowadzić B, gdybyśmy mieli A, lecz A nie mamy. Co więcej, nie możemy A wyprowadzić, gdyż zdanie to występuje jedynie w przesłance 3, gdzie jest poprzednikiem implikacji, będącej z kolei poprzednikiem implikacji. Możemy wyciągnąć wniosek, że na pewno nie będziemy mogli wyprowadzić zdania B z przesłanki 1. Będziemy zatem musieli wykorzystać przesłankę 3, aby wyprowadzić B. Aby to zrobić, potrzebujemy implikacji $A \rightarrow C$, której jednak nie mamy.

Jak możemy otrzymać $A \rightarrow C$? Możemy próbować ją wyprowadzić stosując regułę \rightarrow Wpr. Musimy zatem skonstruować odpowiednią subderywację:

- | | | |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 2. | $B \rightarrow C$ | Zał. |
| 3. | $(A \rightarrow C) \rightarrow B$ | Zał. |
| 4. | A | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| | C | |
| | $A \rightarrow C$ | |
| | B | |

Naszym celem teraz jest wyprowadzić C w skonstruowanej właśnie subderywacji, co przy założeniu dodatkowym subderywacji jest bardzo proste – musimy dwukrotnie zastosować regułę \rightarrow Elim:

- | | | |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 2. | $B \rightarrow C$ | Zał. |
| 3. | $(A \rightarrow C) \rightarrow B$ | Zał. |
| 4. | A | Zał. (\rightarrow Wpr) |
| 5. | B | \rightarrow Elim 1,4 |
| 6. | C | \rightarrow Elim 2,5 |
| | $A \rightarrow C$ | |
| | B | |

Skoro z A wyprowadziliśmy C, możemy zamknąć subderywację i na linii dowodu macierzystego wprowadzić implikację $A \rightarrow C$, co jak pamiętamy było potrzebne, aby wyprowadzić B:

1.	$A \rightarrow B$	Zał.										
2.	$B \rightarrow C$	Zał.										
3.	$(A \rightarrow C) \rightarrow B$	Zał.										
4.	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding-bottom: 2px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 1,4</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">C</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 2,5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">$A \rightarrow C$</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowWpr 4-6</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">\rightarrowElim 3, 7</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	B	\rightarrow Elim 1,4	C	\rightarrow Elim 2,5	$A \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 4-6	B	\rightarrow Elim 3, 7	
A	Zał. (\rightarrow Wpr)											
B	\rightarrow Elim 1,4											
C	\rightarrow Elim 2,5											
$A \rightarrow C$	\rightarrow Wpr 4-6											
B	\rightarrow Elim 3, 7											

Przykład 7.

Mówiliśmy wielokrotnie, że równoważność jakby zawiera w sobie dwie implikacje. Część tych intuicji możemy poprzeć następującym dowodem.

1.	$A \equiv B$	Zał.	Dowieść: $(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$

Nasz wniosek jest koniunkcją. Jediną dostępną tu strategią jest przygotowanie dowodu pod zastosowanie reguły \bullet Wpr – aby móc tę regułę zastosować musimy mieć swobodnie stojące oba człony: implikację $A \rightarrow B$ oraz implikację $B \rightarrow A$. Aby je otrzymać musimy skonstruować dwie - niezależne – subderywacje. Zaczniemy od próby uzyskania pierwszego członu – implikacji $A \rightarrow B$:

1.	$A \equiv B$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding-bottom: 2px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">$A \rightarrow B$</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	B	$A \rightarrow B$	
A	Zał. (\rightarrow Wpr)					
B	$A \rightarrow B$					

Widać wyraźnie, że otrzymanie implikacji $A \rightarrow B$ nie nastęrcza specjalnych trudności, oraz że otrzymanie drugiego członu przebiegnie analogicznie:

1.	$A \equiv B$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding-bottom: 2px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">\equivElim 1, 2</td> </tr> </table>	A	Zał. (\rightarrow Wpr)	B	\equiv Elim 1, 2	
A	Zał. (\rightarrow Wpr)					
B	\equiv Elim 1, 2					
3.	B	\equiv Elim 1, 2				
4.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Wpr 2-3				
5.	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding-bottom: 2px;">B</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (\rightarrowWpr)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 0 2px 10px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">\equivElim 1, 5</td> </tr> </table>	B	Zał. (\rightarrow Wpr)	A	\equiv Elim 1, 5	
B	Zał. (\rightarrow Wpr)					
A	\equiv Elim 1, 5					
6.	A	\equiv Elim 1, 5				
7.	$B \rightarrow A$	\rightarrow Wpr 5-6				
8.	$(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$	\bullet Wpr 4, 7				

12.9. Dowodzenie a subderywacje

Subderywacje stanowią dowody pomocnicze i jako takie wszystkie subderywacje muszą zostać zamknięte, a informacja w nich zawarta wyprowadzona do derywacji macierzystej za pomocą odpowiedniej konstrukcyjnej reguły inferencyjnej.

Weźmy za przykład dowód, który widzieliśmy już wyżej (Przykład 6). Z trzech przesłanek mamy wyprowadzić zdanie B. W normalnym przebiegu dowodu dochodzimy do kroku 5, gdzie wyprowadzamy B:

1.	A → B	Zał.
2.	B → C	Zał.
3.	(A → C) → B	Zał.
<hr/>		
4.	A	Zał. (→Wpr)
5.	B	→Elim 1,4

Nie możemy jednak uznać dowodu za w tym miejscu skończony.

Celem dowodzenia jest wyprowadzenie danego zdania na *głównej* linii derywacyjnej.

Powyższy dowód jest ukończony dopiero w kroku ósmym:

6.	C	→Elim 2,5
7.	A → C	→Wpr 4–6
8.	B	→Elim 3, 7

→Wpr.IV. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: $B \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.

(b) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	Zał.

(c) Dowieść, że: C

1.	$(A \rightarrow B) \equiv C$	Zał.
2.	$B \bullet D$	Zał.

(d) Dowieść, że: $\sim A \rightarrow [\sim B \rightarrow (C \bullet D)]$

1.	$C \vee A$	Zał.
2.	$D \vee B$	Zał.

(e) Dowieść, że: C

1.	$(A \rightarrow B) \equiv C$	Zał.
2.	$(A \rightarrow A) \rightarrow B$	Zał.

(f) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \bullet C)$

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	Zał.

(g) Dowieść, że: $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.

(h) Dowieść, że: $B \rightarrow (A \bullet C)$

1.	$A \bullet (B \rightarrow C)$	Zał.

(i) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	$C \bullet D$	Zał.

(j) Dowieść, że: $A \rightarrow (B \rightarrow (D \rightarrow C))$

1.	$C \bullet D$	Zał.

(k) Dowieść, że: $A \rightarrow (D \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$D \rightarrow B$	Zał.

(l) Dowieść, że: $(A \vee B) \rightarrow C$

1.	$(A \rightarrow C) \bullet \sim B$	Zał.
2.	$(B \vee C) \vee D$	Zał.