

# ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

## 11. DOWODZENIE II

---

Przykłady dowodów:

### Przykład 1

1.	$(A \bullet D) \bullet B$	Zał.
2.	$C \equiv (A \bullet D)$	Zał.
3.	$A \bullet D$	•Elim 1
4.	$C$	$\equiv$ Elim 2, 3

### Przykład 2

1.	$A \bullet (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$B \equiv \sim D$	Zał.
4.	$A$	•Elim 1
5.	$B \equiv C$	•Elim 1
6.	$C$	$\rightarrow$ Elim 2, 4
7.	$B$	$\equiv$ Elim 5, 6
8.	$\sim D$	$\equiv$ Elim 3, 7

### Przykład 3

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	$A$	Zał.
3.	$D \vee A$	$\vee$ Wpr 2
4.	$(A \rightarrow C) \vee B$	$\vee$ Wpr 1
5.	$[(A \rightarrow C) \vee B] \bullet (D \vee A)$	•Wpr 4, 3

### Przykład 4.

1.	$(C \bullet D) \equiv (\sim A \vee B)$	Zał.
2.	$B$	Zał.
3.	$\sim A \vee B$	$\vee$ Wpr 2
4.	$C \bullet D$	$\equiv$ Elim 1, 3
5.	$C$	•Elim 4

### Przykład 5

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$C \rightarrow \sim B$	Zał.
3.	$C$	Zał.
4.	$\sim B$	$\rightarrow$ Elim 2, 3
5.	$A$	MTP 1, 4

### Przykład 6.

1.	$\sim A \vee \sim B$	Zał.
2.	$B \bullet \sim \sim B$	Zał.
3.	$\sim \sim B$	•Elim 2
4.	$\sim A$	MTP 1, 3

### Przykład 7

1.	$(S \vee O) \rightarrow B$	Zał.
2.	$B \rightarrow (P \vee W)$	Zał.
3.	$O \bullet \sim W$	Zał.
4.	$O$	•Elim 3
5.	$S \vee O$	$\vee$ Wpr 4
6.	$B$	$\rightarrow$ Elim 1, 5
7.	$P \vee W$	$\rightarrow$ Elim 2, 6
8.	$\sim W$	•Elim 3
9.	$P$	MTP 7, 8

1.	Jeżeli dostanę 17 lub 18 punktów na teście, to otrzymam ocenę bdb.	Zał.
2.	<i>Parafraza:</i> Jeżeli otrzymałem ocenę bdb, to [znaczy, że] albo przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji albo wkuję wszystkie możliwe dowody.	Zał.
3.	<u>Dostałem 18 punktów, a przecież nie wkuję wszystkich możliwych dowodów.</u>	Zał.
4.	Dostałem 18 punktów na teście.	•Elim 3
5.	Dostałem 17 lub 18 punktów na teście.	√Wpr 4
6.	Otrzymałem ocenę bdb.	→Elim 1, 5
7.	Albo przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji, albo wkuję wszystkie możliwe dowody na pamięć.	→Elim 2, 6
8.	Nie wkuję wszystkich możliwych dowodów.	•Elim 3
9.	Przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji.	MTP 7, 8

≡Elim.I. Uzupełnij brakujące informacje:

(a)	1. $C \equiv D$ Zał.	(b)	1. $C \equiv D$ Zał.
	2. $C$ Zał.		2. $D$ Zał.
	3. $D$ ≡Elim 1, 2		3. $C$ ≡Elim 1, 2
(c)	1. $B \equiv \sim D$ Zał.	(d)	1. $(C \vee A) \equiv B$ Zał.
	2. $\sim D$ Zał.		2. $C \vee A$ Zał.
	3. $B$ ≡Elim 1, 2		3. $B$ ≡Elim 1, 2
(e)	1. $A \equiv (D \bullet B)$ Zał.	(f)	1. $M \equiv \sim \sim N$ Zał.
	2. $D \bullet B$ Zał.		2. $\sim \sim N$ Zał.
	3. $A$ ≡Elim 1, 2		3. $M$ ≡Elim 1, 2
(g)	1. $\sim A \equiv \sim B$ Zał.	(h)	1. $A \bullet B$ Zał.
	2. $\sim A$ Zał.		2. $\sim C \equiv (A \bullet B)$ Zał.
	3. $\sim B$ ≡Elim 1, 2		3. $\sim C$ ≡Elim 1, 2
(i)	1. $(A \rightarrow B) \equiv (C \equiv D)$ Zał.	(j)	1. $A \equiv B$ Zał.
	2. $C \equiv D$ Zał.		2. $A$ Zał.
	3. $A \rightarrow B$ ≡Elim 1, 2		3. $B$ ≡Elim 1, 2
(k)	1. $A$ Zał.	(l)	1. $\sim A \equiv \sim C$ Zał.
	2. $(\sim D \equiv A) \bullet C$ Zał.		2. $\sim A \equiv D$ Zał.
	3. $\sim D \equiv A$ Zał.		3. $\sim C$ Zał.
	4. $\sim D$ ≡Elim 1,3		4. $\sim A$ ≡Elim 1, 3
(m)	1. $C$ Zał.	(n)	1. $\sim D \equiv \sim C$ Zał.
	2. $A$ Zał.		2. $A \equiv C$ Zał.
	3. $[A \equiv (A \equiv B)] \equiv C$ Zał.		3. $\sim C$ Zał.
	4. $A \equiv (A \equiv B)$ ≡Elim 1, 3		4. $\sim D$ ≡Elim 1, 3

(o)		
1.	$\sim(D \bullet A)$	Zał.
2.	$(\sim D \bullet A) \equiv C$	Zał.
3.	$\sim(D \bullet A) \equiv \sim C$	Zał.
4.	$\sim C$	$\equiv$ Elim 1,3

(p)		
1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	$B$	Zał.
4.	$A$	$\equiv$ Elim 1, 3

(q)		
1.	$(A \equiv B) \equiv C$	Zał.
2.	$\sim(B \equiv C)$	Zał.
3.	$A \equiv B$	Zał.
4.	$C$	$\equiv$ Elim 1, 3

(r)		
1.	$\sim A \equiv \sim C$	Zał.
2.	$A \equiv (D \rightarrow (A \equiv C))$	Zał.
3.	$D \rightarrow (A \equiv C)$	Zał.
4.	$A$	$\equiv$ Elim 2,3

**$\equiv$ Elim.II.** W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go, oraz uzasadnij krok ostatni:

(a)		
1.	$(A \equiv B) \bullet C$	Zał.
2.	$B$	Zał.
3.	$A \equiv B$	$\bullet$ Elim 1
4.	$A$	$\equiv$ Elim 2,3

(b)		
1.	$C \equiv B$	Zał.
2.	$B \bullet \sim A$	Zał.
3.	$B$	$\bullet$ Elim 2
4.	$C$	$\equiv$ Elim 1,3

(c)		
1.	$B \equiv C$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	Zał.
3.	$A$	Zał.
4.	$B$	$\rightarrow$ Elim 2,3
5.	$C$	$\equiv$ Elim 1,4

(d)		
1.	$C \rightarrow B$	Zał.
2.	$\sim A \equiv B$	Zał.
3.	$C$	Zał.
4.	$B$	$\rightarrow$ Elim 1,3
5.	$\sim A$	$\equiv$ Elim 2,4

(e)		
1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	$A$	Zał.
4.	$B$	$\equiv$ Elim 1,3
5.	$C$	$\equiv$ Elim 2,4

(f)		
1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	$C$	Zał.
4.	$B$	$\equiv$ Elim 2,3
5.	$A$	$\equiv$ Elim 1,4

**$\equiv$ Elim.III.** W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je, oraz uzasadnij krok ostatni:

(a)		
1.	$(A \equiv B) \bullet C$	Zał.
2.	$C \bullet A$	Zał.
3.	$A \equiv B$	$\bullet$ Elim 1
4.	$A$	$\bullet$ Elim 2
5.	$B$	$\equiv$ Elim 3,4

(b)		
1.	$(A \equiv B) \bullet C$	Zał.
2.	$B \bullet D$	Zał.
3.	$A \equiv B$	$\bullet$ Elim 1
4.	$B$	$\bullet$ Elim 2
5.	$A$	$\equiv$ Elim 3,4

(c)		
1.	$B \equiv C$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$A \bullet B$	Zał.
4.	$B$	$\bullet$ Elim 3
5.	$C$	$\equiv$ Elim 1,4
6.	$D$	$\equiv$ Elim 2,5

(d)		
1.	$B \equiv C$	Zał.
2.	$A \equiv B$	Zał.
3.	$D \bullet C$	Zał.
4.	$C$	$\bullet$ Elim 3
5.	$B$	$\equiv$ Elim 1,4
6.	$A$	$\equiv$ Elim 2,5

(e)		
1.	$B \equiv C$	Zał.
2.	$(A \rightarrow C) \bullet C$	Zał.
3.	$A \equiv B$	Zał.
4.	$C$	•Elim 2
5.	$B$	$\equiv$ Elim 1,4
6.	$A$	$\equiv$ Elim 3,5

(f)		
1.	$(A \equiv B) \equiv (\sim C \bullet A)$	Zał.
2.	$\sim C$	Zał.
3.	$A$	Zał.
4.	$\sim C \bullet A$	•Wpr 2,3
5.	$A \equiv B$	$\equiv$ Elim 1,4
6.	$B$	$\equiv$ Elim 3,5

**$\equiv$ Elim.IV.** Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: C

1.	$A \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \equiv B$	Zał.
3.	$A$	Zał.
4.	$B$	$\equiv$ Elim 2,3
5.	$B \equiv C$	$\equiv$ Elim 1,3
6.	$C$	$\equiv$ Elim 4,5

(b) Dowieść, że: A

1.	$(A \equiv B) \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	$C$	Zał.
4.	$B$	$\equiv$ Elim 2,3
5.	$A \equiv B$	$\equiv$ Elim 1,2
6.	$A$	$\equiv$ Elim 4,5

(c) Dowieść, że: C

1.	$B \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow (B \bullet D)$	Zał.
3.	$A$	Zał.
4.	$B \bullet D$	$\rightarrow$ Elim 2,3
5.	$B$	•Elim 4
6.	$B \equiv C$	$\equiv$ Elim 1,5
7.	$C$	$\equiv$ Elim 5,6

(d) Dowieść, że:  $B \bullet D$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$A \bullet C$	Zał.
4.	$A$	•Elim 3
5.	$B$	$\equiv$ Elim 1,4
6.	$C$	•Elim 3
7.	$D$	$\equiv$ Elim 2,6
8.	$B \bullet D$	•Wpr 5,7

Dowieść, że:  $A \bullet C$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$B \bullet D$	Zał.
4.	$B$	•Elim 3
5.	$A$	$\equiv$ Elim 1,4
6.	$D$	•Elim 3
7.	$C$	$\equiv$ Elim 2,6
8.	$A \bullet C$	•Wpr 5,7

Dowieść, że: H

1.	$(\sim A \bullet C) \equiv (B \vee C)$	Zał.
2.	$H \equiv (B \vee C)$	Zał.
3.	$(\sim A \bullet D) \bullet C$	Zał.
4.	$\sim A \bullet D$	•Elim 3
5.	$C$	•Elim 3
6.	$\sim A$	•Elim 4
7.	$\sim A \bullet C$	•Wpr 6,5
8.	$B \vee C$	$\equiv$ Elim 1, 7
9.	$H$	$\equiv$ Elim 2,8

### Ćwiczenia na zastosowanie reguły $\vee$ Wpr

$\vee$ Wpr.I.a. Zastosuj regułę  $\vee$ Wpr dodając zdanie B:

(a)		
1.	$A$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$A \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$B \vee A$	$\vee$ Wpr 1

(b)		
1.	$A$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$(A \rightarrow C) \vee B$	$\vee$ Wpr 2
4.	$B \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ Wpr 2

(c)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	$(B \rightarrow B) \vee B$	$\vee$ Wpr 2
4.	$B \vee (B \rightarrow B)$	$\vee$ Wpr 2

(d)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	$\sim B \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$B \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1

(e)

1.	$B$	Zał.
2.	$A \vee C$	Zał.
3.	$B \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$B \vee (A \vee C)$	$\vee$ Wpr 2
5.	$(A \vee C) \vee B$	$\vee$ Wpr 2

(f)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$A \equiv C$	Zał.
3.	$\sim A \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$B \vee \sim A$	$\vee$ Wpr 1
5.	$B \vee (A \equiv C)$	$\vee$ Wpr 2
6.	$(A \equiv C) \vee B$	$\vee$ Wpr 2

**$\vee$ Wpr.I.b.** Zastosuj regułę  $\vee$ Wpr dodając zdanie  $\sim B$ :

(a)

1.	$A$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$A \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$\sim B \vee A$	$\vee$ Wpr 1

(b)

1.	$A$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$(A \rightarrow C) \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 2
4.	$\sim B \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ Wpr 2

(c)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$A \equiv C$	Zał.
3.	$\sim A \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$\sim B \vee \sim A$	$\vee$ Wpr 1

(d)

1.	$B$	Zał.
2.	$A \vee C$	Zał.
3.	$B \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$\sim B \vee B$	$\vee$ Wpr 1

(e)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	$\sim B \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1

(f)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	$(B \rightarrow B) \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 2
4.	$\sim B \vee (B \rightarrow B)$	$\vee$ Wpr 2

**$\vee$ Wpr.I.c.** Zastosuj regułę  $\vee$ Wpr dodając zdanie  $\sim B \equiv A$ :

(a)

1.	$A$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$A \vee (\sim B \equiv A)$	$\vee$ Wpr 1
4.	$(\sim B \equiv A) \vee A$	$\vee$ Wpr 1

(b)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$A \equiv C$	Zał.
3.	$\sim A \vee (\sim B \equiv A)$	$\vee$ Wpr 1
4.	$(\sim B \equiv A) \vee \sim A$	$\vee$ Wpr 1

(c)

1.	$A$	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	$(A \rightarrow C) \vee (\sim B \equiv A)$	$\vee$ Wpr 2
4.	$(\sim B \equiv A) \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ Wpr 2

(d)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	$(B \rightarrow B) \vee (\sim B \equiv A)$	$\vee$ Wpr 2
4.	$(\sim B \equiv A) \vee (B \rightarrow B)$	$\vee$ Wpr 2

## Ćwiczenia na dowodzenia z regułą $\vee$ Wpr

**$\vee$ Wpr.II.** W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go, oraz uzasadnij krok ostatni:

(a)

1.	A	Zał.
2.	$(A \vee B) \rightarrow C$	Zał.
3.	$A \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	C	$\rightarrow$ Elim 2,3

(b)

1.	$(D \vee \sim B) \rightarrow A$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	$D \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 2
4.	A	$\rightarrow$ Elim 1,3

(c)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$(A \vee \sim B) \rightarrow C$	Zał.
3.	$A \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1
4.	C	$\rightarrow$ Elim 2,3

(d)

1.	$(C \vee \sim B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	$C \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$\sim A \vee \sim B$	$\rightarrow$ Elim 1,3

(e)

1.	A	Zał.
2.	$D \equiv (A \vee C)$	Zał.
3.	$A \vee C$	$\vee$ Wpr 1
4.	D	$\equiv$ Elim 2,3

(f)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$C \equiv (\sim A \vee \sim B)$	Zał.
3.	$\sim A \vee \sim B$	$\vee$ Wpr 1
4.	C	$\equiv$ Elim 2,3

(g)

1.	$(B \vee A) \equiv (C \vee D)$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	$B \vee A$	$\vee$ Wpr 2
4.	$C \vee D$	$\equiv$ Elim 1,3

(h)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	$C \vee A$	$\vee$ Wpr 2
4.	$(C \vee A) \vee (C \vee D)$	$\vee$ Wpr 3

(i)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	$C \vee D$	$\vee$ Wpr 2
4.	$B \vee (C \vee D)$	$\vee$ Wpr 3

(j)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	$C \vee B$	$\vee$ Wpr 2
4.	$(C \vee B) \vee D$	$\vee$ Wpr 3

**$\vee$ Wpr.III.** W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je, oraz uzasadnij krok ostatni:

(a)

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$(A \vee C) \rightarrow D$	Zał.
3.	A	$\bullet$ Elim 1
4.	$A \vee C$	$\vee$ Wpr 3
5.	D	$\rightarrow$ Elim 2,4

(b)

1.	$\sim D \equiv (A \vee C)$	Zał.
2.	$C \bullet B$	Zał.
3.	C	$\bullet$ Elim 2
4.	$A \vee C$	$\vee$ Wpr 3
5.	$\sim D$	$\equiv$ Elim 1, 4

(c)

1.	A	Zał.
2.	C	Zał.
3.	$A \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$D \vee C$	$\vee$ Wpr 2
5.	$(A \vee B) \bullet (D \vee C)$	$\bullet$ Wpr 3, 4

(d)

1.	A	Zał.
2.	$A \rightarrow [(A \vee B) \rightarrow D]$	Zał.
3.	$(A \vee B) \rightarrow D$	$\rightarrow$ Elim 1, 2
4.	$A \vee B$	$\vee$ Wpr 1
5.	D	$\rightarrow$ Elim 3,4

(e)

1.	$(C \vee A) \rightarrow [D \equiv (C \vee A)]$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	$C \vee A$	$\vee$ Wpr 2
4.	$D \equiv (C \vee A)$	$\rightarrow$ Elim 1, 3
5.	D	$\equiv$ Elim 3, 4

(f)

1.	A	Zał.
2.	$(C \vee A) \rightarrow B$	Zał.
3.	$C \vee A$	$\vee$ Wpr 1
4.	B	$\rightarrow$ Elim 2, 3
5.	$B \vee C$	$\vee$ Wpr 4

**$\vee$ Wpr.IV.** Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że:  $\sim C$

1.	$(A \vee B) \rightarrow D$	Zał.
2.	$(\sim E \vee D) \rightarrow \sim C$	Zał.
3.	A	Zał.
4.	$A \vee B$	$\vee$ Wpr 3
5.	D	$\rightarrow$ Elim 1,4
6.	$\sim E \vee D$	$\vee$ Wpr 5
7.	$\sim C$	$\rightarrow$ Elim 2, 6

(b) Dowieść, że:  $[(A \vee B) \vee C] \bullet (D \vee A)$

1.	A	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	$A \vee B$	$\vee$ Wpr 1
4.	$(A \vee B) \vee C$	$\vee$ Wpr 3
5.	$D \vee A$	$\vee$ Wpr 1
6.	$[(A \vee B) \vee C] \bullet (D \vee A)$	$\bullet$ Wpr 4,5

### Ćwiczenia na zastosowanie reguły MTP

**MTP.I.** Uzupełnij brakujące informacje:

(a)

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	A	MTP 1,2

(b)

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$\sim A$	Zał.
3.	B	MTP 1,2

(c)

1.	$C \vee B$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	C	MTP 1,2

(d)

1.	$\sim A \vee \sim B$	Zał.
2.	$\sim \sim B$	Zał.
3.	$\sim A$	MTP 1,2

(e)

1.	$\sim A \vee (B \bullet C)$	Zał.
2.	$\sim (B \bullet C)$	Zał.
3.	$\sim A$	MTP 1,2

(f)

1.	$(A \rightarrow C) \vee B$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	$A \rightarrow C$	MTP 1,2

(g)

1.	$A \vee \sim B$	Zał.
2.	$\sim \sim B$	Zał.
3.	A	MTP 1,2

(h)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$\sim \sim B \vee A$	Zał.
3.	$\sim \sim B$	MTP 1,2

### Ćwiczenia na dowodzenia z regułą MTP

**MTP.II.** W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go, oraz uzasadnij krok ostatni:

(a)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>\sim D</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>(C \vee D) \vee D</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>C \vee D</math></td><td>MTP 1,2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>C</math></td><td>MTP 1,3</td></tr> </table>	1.	$\sim D$	Zał.	2.	$(C \vee D) \vee D$	Zał.	3.	$C \vee D$	MTP 1,2	4.	$C$	MTP 1,3	(b)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>\sim A \bullet \sim B</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>B \vee D</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>\sim B</math></td><td><math>\bullet</math>Elim 1</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>D</math></td><td>MTP 2,3</td></tr> </table>	1.	$\sim A \bullet \sim B$	Zał.	2.	$B \vee D$	Zał.	3.	$\sim B$	$\bullet$ Elim 1	4.	$D$	MTP 2,3
1.	$\sim D$	Zał.																									
2.	$(C \vee D) \vee D$	Zał.																									
3.	$C \vee D$	MTP 1,2																									
4.	$C$	MTP 1,3																									
1.	$\sim A \bullet \sim B$	Zał.																									
2.	$B \vee D$	Zał.																									
3.	$\sim B$	$\bullet$ Elim 1																									
4.	$D$	MTP 2,3																									
(c)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>\sim B</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim B \rightarrow (A \vee B)</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>A \vee B</math></td><td><math>\rightarrow</math>Elim 1,2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>A</math></td><td>MTP 1,3</td></tr> </table>	1.	$\sim B$	Zał.	2.	$\sim B \rightarrow (A \vee B)$	Zał.	3.	$A \vee B$	$\rightarrow$ Elim 1,2	4.	$A$	MTP 1,3	(d)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>(\sim B \vee \sim A) \equiv \sim \sim A</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim \sim A</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>\sim B \vee \sim A</math></td><td><math>\equiv</math>Elim 1, 2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>\sim B</math></td><td>MTP 2,3</td></tr> </table>	1.	$(\sim B \vee \sim A) \equiv \sim \sim A$	Zał.	2.	$\sim \sim A$	Zał.	3.	$\sim B \vee \sim A$	$\equiv$ Elim 1, 2	4.	$\sim B$	MTP 2,3
1.	$\sim B$	Zał.																									
2.	$\sim B \rightarrow (A \vee B)$	Zał.																									
3.	$A \vee B$	$\rightarrow$ Elim 1,2																									
4.	$A$	MTP 1,3																									
1.	$(\sim B \vee \sim A) \equiv \sim \sim A$	Zał.																									
2.	$\sim \sim A$	Zał.																									
3.	$\sim B \vee \sim A$	$\equiv$ Elim 1, 2																									
4.	$\sim B$	MTP 2,3																									

**MTP.III.** W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je, oraz uzasadnij krok ostatni:

(a)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>\sim D \equiv (A \vee D)</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim D \bullet B</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>\sim D</math></td><td><math>\bullet</math>Elim 2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>A \vee D</math></td><td><math>\equiv</math>Elim 1,3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>5.</td><td><math>A</math></td><td>MTP 3,4</td></tr> </table>	1.	$\sim D \equiv (A \vee D)$	Zał.	2.	$\sim D \bullet B$	Zał.	3.	$\sim D$	$\bullet$ Elim 2	4.	$A \vee D$	$\equiv$ Elim 1,3	5.	$A$	MTP 3,4	(b)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>[\sim A \rightarrow (D \vee A)] \vee A</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim A</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>\sim A \rightarrow (D \vee A)</math></td><td>MTP 1,2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>D \vee A</math></td><td><math>\rightarrow</math>Elim 2,3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>5.</td><td><math>D</math></td><td>MTP 2,4</td></tr> </table>	1.	$[\sim A \rightarrow (D \vee A)] \vee A$	Zał.	2.	$\sim A$	Zał.	3.	$\sim A \rightarrow (D \vee A)$	MTP 1,2	4.	$D \vee A$	$\rightarrow$ Elim 2,3	5.	$D$	MTP 2,4
1.	$\sim D \equiv (A \vee D)$	Zał.																															
2.	$\sim D \bullet B$	Zał.																															
3.	$\sim D$	$\bullet$ Elim 2																															
4.	$A \vee D$	$\equiv$ Elim 1,3																															
5.	$A$	MTP 3,4																															
1.	$[\sim A \rightarrow (D \vee A)] \vee A$	Zał.																															
2.	$\sim A$	Zał.																															
3.	$\sim A \rightarrow (D \vee A)$	MTP 1,2																															
4.	$D \vee A$	$\rightarrow$ Elim 2,3																															
5.	$D$	MTP 2,4																															
(c)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>[(A \vee B) \vee C] \vee C</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim C \bullet \sim B</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>\sim C</math></td><td><math>\bullet</math>Elim 2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>(A \vee B) \vee C</math></td><td>MTP 1,3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>5.</td><td><math>A \vee B</math></td><td>MTP 3,4</td></tr> </table>	1.	$[(A \vee B) \vee C] \vee C$	Zał.	2.	$\sim C \bullet \sim B$	Zał.	3.	$\sim C$	$\bullet$ Elim 2	4.	$(A \vee B) \vee C$	MTP 1,3	5.	$A \vee B$	MTP 3,4	(d)	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>B \vee (A \vee B)</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim B</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>3.</td><td><math>A \vee B</math></td><td>MTP 1,2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>A</math></td><td>MTP 2,3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>5.</td><td><math>D \vee A</math></td><td><math>\vee</math>Wpr 4</td></tr> </table>	1.	$B \vee (A \vee B)$	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.	$A \vee B$	MTP 1,2	4.	$A$	MTP 2,3	5.	$D \vee A$	$\vee$ Wpr 4
1.	$[(A \vee B) \vee C] \vee C$	Zał.																															
2.	$\sim C \bullet \sim B$	Zał.																															
3.	$\sim C$	$\bullet$ Elim 2																															
4.	$(A \vee B) \vee C$	MTP 1,3																															
5.	$A \vee B$	MTP 3,4																															
1.	$B \vee (A \vee B)$	Zał.																															
2.	$\sim B$	Zał.																															
3.	$A \vee B$	MTP 1,2																															
4.	$A$	MTP 2,3																															
5.	$D \vee A$	$\vee$ Wpr 4																															

**MTP.IV.** Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: B	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>C</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim A \equiv (\sim D \vee C)</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td><math>(C \vee D) \rightarrow (A \vee B)</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>C \vee D</math></td><td><math>\vee</math>Wpr 1</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>5.</td><td><math>A \vee B</math></td><td><math>\rightarrow</math>Elim 3,4</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>6.</td><td><math>\sim D \vee C</math></td><td><math>\vee</math>Wpr 1</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>7.</td><td><math>\sim A</math></td><td><math>\equiv</math>Elim 2,6</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>8.</td><td><math>B</math></td><td>MTP 5, 7</td></tr> </table>	1.	$C$	Zał.	2.	$\sim A \equiv (\sim D \vee C)$	Zał.	3.	$(C \vee D) \rightarrow (A \vee B)$	Zał.	4.	$C \vee D$	$\vee$ Wpr 1	5.	$A \vee B$	$\rightarrow$ Elim 3,4	6.	$\sim D \vee C$	$\vee$ Wpr 1	7.	$\sim A$	$\equiv$ Elim 2,6	8.	$B$	MTP 5, 7	(b) Dowieść, że: $\sim B$	<table border="0"> <tr><td>1.</td><td><math>(D \vee A) \vee [A \vee (\sim B \vee A)]</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td><math>\sim A \rightarrow \sim(D \vee A)</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td><math>\sim A \bullet C</math></td><td>Zał.</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>4.</td><td><math>\sim A</math></td><td><math>\bullet</math>Elim 3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>5.</td><td><math>\sim(D \vee A)</math></td><td><math>\rightarrow</math>Elim 2, 4</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>6.</td><td><math>A \vee (\sim B \vee A)</math></td><td>MTP 1, 5</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>7.</td><td><math>\sim B \vee A</math></td><td>MTP 6, 4</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>8.</td><td><math>\sim B</math></td><td>MTP 7, 4</td></tr> </table>	1.	$(D \vee A) \vee [A \vee (\sim B \vee A)]$	Zał.	2.	$\sim A \rightarrow \sim(D \vee A)$	Zał.	3.	$\sim A \bullet C$	Zał.	4.	$\sim A$	$\bullet$ Elim 3	5.	$\sim(D \vee A)$	$\rightarrow$ Elim 2, 4	6.	$A \vee (\sim B \vee A)$	MTP 1, 5	7.	$\sim B \vee A$	MTP 6, 4	8.	$\sim B$	MTP 7, 4
1.	$C$	Zał.																																																	
2.	$\sim A \equiv (\sim D \vee C)$	Zał.																																																	
3.	$(C \vee D) \rightarrow (A \vee B)$	Zał.																																																	
4.	$C \vee D$	$\vee$ Wpr 1																																																	
5.	$A \vee B$	$\rightarrow$ Elim 3,4																																																	
6.	$\sim D \vee C$	$\vee$ Wpr 1																																																	
7.	$\sim A$	$\equiv$ Elim 2,6																																																	
8.	$B$	MTP 5, 7																																																	
1.	$(D \vee A) \vee [A \vee (\sim B \vee A)]$	Zał.																																																	
2.	$\sim A \rightarrow \sim(D \vee A)$	Zał.																																																	
3.	$\sim A \bullet C$	Zał.																																																	
4.	$\sim A$	$\bullet$ Elim 3																																																	
5.	$\sim(D \vee A)$	$\rightarrow$ Elim 2, 4																																																	
6.	$A \vee (\sim B \vee A)$	MTP 1, 5																																																	
7.	$\sim B \vee A$	MTP 6, 4																																																	
8.	$\sim B$	MTP 7, 4																																																	

**MTP.V.a.** Dokonaj symbolizacji następującego wnioskowania, a następnie dowiedz jego prawdziwości. Zastanów się, czy porządek kroków w dowodzie odpowiada porządkowi rozumowania intuicyjnego.

1.	$L \rightarrow (G \vee F)$	Zał.	Jeżeli Ania zda logikę, to jej chłopak Tomek zaprosi ją albo do greckiej albo do francuskiej restauracji.
2.	$T \rightarrow \sim F$	Zał.	Jeżeli Ania oglądała dużo TV, to Tomek nie zaprosi jej do francuskiej restauracji.
3.	$(P \rightarrow L) \bullet (U \rightarrow P)$	Zał.	Jeżeli Ania będzie dobrze przygotowana, to zda logikę; a jeżeli Ania będzie się dużo uczyć, to będzie dobrze przygotowana.
4.	$U \bullet T$	Zał.	Ania dużo się uczyła, ale też oglądała dużo TV.
5.	$U$	•Elim 4	Ania dużo się uczyła.
6.	$U \rightarrow P$	•Elim 3	Jeżeli Ania będzie się dużo uczyć, to będzie dobrze przygotowana.
7.	$P$	$\rightarrow$ Elim 5, 6	Ania będzie dobrze przygotowana.
8.	$P \rightarrow L$	•Elim 3	Jeżeli Ania będzie dobrze przygotowana, to zda logikę.
9.	$L$	$\rightarrow$ Elim 7,8	Ania zda logikę.
10.	$G \vee F$	$\rightarrow$ Elim 1, 9	Tomek zaprosi Anię albo do greckiej albo do francuskiej restauracji.
11.	$T$	•Elim 4	Ania oglądała dużo TV.
12.	$\sim F$	$\rightarrow$ Elim 2, 11	Tomek nie zaprosi Ani do francuskiej restauracji.
13.	$G$	MTP 10, 12	Tomek zaprosi Anię do greckiej restauracji.

**MTP.V.b.** Dokonaj symbolizacji następującego wnioskowania, a następnie dowiedz jego prawdziwości. Zastanów się, czy porządek kroków w dowodzie odpowiada porządkowi rozumowania intuicyjnego.

1.	$\sim T \bullet S$	Zał.	Tomek nie jest zainteresowany Beatą; Staś natomiast bardzo chciałby się z nią umówić.
2.	$(P \vee \sim R) \rightarrow U$	Zał.	Jeżeli albo Staś zostanie przewodniczącym samorządu albo Robert nie będzie zainteresowany Beatą, to Beata umówi się ze Stasiem.
3.	$(\sim C \vee \sim L) \rightarrow P$	Zał.	Jeżeli albo Cecylia nie umówi się ze Stasiem albo Paweł nie zostanie wybrany do samorządu, to Staś zostanie przewodniczącym samorządu.
4.	$B \vee \sim C$	Zał.	Albo Beata zaprosi Cecylię na imprezę, albo Cecylia nie umówi się ze Stasiem.
5.	$\sim T \rightarrow (\sim E \bullet \sim B)$	Zał.	Jeżeli Tomek nie jest zainteresowany Beatą, to Beata nie zaprosi ani jego ani Cecylii na imprezę.
6.	$\sim T$	•Elim 1	Tomek nie jest zainteresowany Beatą.
7.	$\sim E \bullet \sim B$	$\rightarrow$ Elim 5,6	Beata nie zaprosi na imprezę ani Tomka ani Cecylii.
8.	$\sim B$	•Elim 7	Beata nie zaprosi Cecylii na imprezę.
9.	$\sim C$	MTP 4,8	Cecylia nie umówi się ze Stasiem.
10.	$\sim C \vee \sim L$	$\vee$ Wpr 9	Albo Cecylia nie umówi się ze Stasiem albo Paweł nie zostanie wybrany do samorządu.
11.	$P$	$\rightarrow$ Elim 3,10	Staś zostanie przewodniczącym samorządu.
12.	$P \vee \sim R$	$\vee$ Wpr 11	Albo Staś zostanie przewodniczącym samorządu albo Robert nie będzie zainteresowany Beatą.
13.	$U$	$\rightarrow$ Elim 2, 12	Beata umówi się ze Stasiem.

Przesłankę 4 można oddać również jako implikację. W takim wypadku dowód przebiegnie podobnie – różnić się będą tylko dwa kroki:

4.	$\sim B \rightarrow \sim C$	Zał.
...		
9.	$\sim C$	$\rightarrow$ Elim 4, 8