

11. DOWODZENIE II: REGUŁY \equiv ELIM, \vee WPR, MTP

Cele i wprowadzenie

- Umiejętność stosowania reguł pierwotnych \equiv Elim, \vee Wpr oraz reguły wtórnej MTP
- Umiejętność przeprowadzania prostych dowodów z użyciem tych reguł

11.1. Reguła \equiv Elim (Reguła opuszczania równoważności)

Jeżeli w pewnym wierszu dowodu występuje (swobodnie) równoważność, a w innym wierszu dowodu występuje (swobodnie) jeden z jej członów, to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje pozostały jej człon.

$$\begin{array}{l|l} i. & p \equiv r \\ j. & p \\ \hline \triangleright & r \end{array} \quad \equiv\text{Elim } i, j$$

$$\begin{array}{l|l} i. & p \equiv r \\ j. & r \\ \hline \triangleright & p \end{array} \quad \equiv\text{Elim } i, j$$

Intuicje

Reguła \equiv Elim jest podobna do reguły \rightarrow Elim, choć w przeciwieństwie do reguły \rightarrow Elim ma dwie wersje. Wiąże się to z tym, że o równoważności „ p wtedy i tylko wtedy, gdy r ” można myśleć jako o koniunkcji implikacji „ p wtedy, gdy r ” ($r \rightarrow p$) oraz implikacji „ p tylko wtedy, gdy r ” ($p \rightarrow r$).

Odmienność reguły \equiv Elim – a zarazem jej intuicyjność – pokazuje również refleksja nad wartościami logicznymi. Jeżeli równoważność $p \equiv r$ jest prawdziwa, a jeden z jej członów (pierwszy lub drugi) jest również prawdziwy, to pozostały człon (odpowiednio: drugi lub pierwszy) musi mieć tę samą wartość logiczną, tj. musi być prawdziwy.

Wpiszcie brakujące wnioski:

Zofia dostanie ocenę celującą wtedy, ale tylko wtedy, gdy otrzyma 100% na teście.
Zofia dostała ocenę celującą.

Rafał dostanie ocenę celującą wtedy, ale tylko wtedy, gdy otrzyma 100% na teście.
Rafał otrzymał 100% na teście.



Porada babuni o regule \equiv Elim:

Nie mieszaj \equiv Elim z \rightarrow Elim


Stosowanie reguły \equiv Elim


Regułę \equiv Elim można tylko w *jeden sposób* (uwaga: druga wersja reguły \equiv Elim wymaga, aby dane były inne zdania):

$$\begin{array}{l|l} 1. & \sim A \equiv \sim(B \bullet C) & \text{Zał.} \\ 2. & \sim A & \text{Zał.} \\ \hline 3. & \sim(B \bullet C) & \equiv\text{Elim } 1,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1. & B \equiv (\sim B \vee A) & \text{Zał.} \\ 2. & \sim B \vee A & \text{Zał.} \\ \hline 3. & B & \equiv\text{Elim } 1,2 \end{array}$$

Nie wolno reguły \equiv Elim stosować do członów zdań:


$$\begin{array}{l|l} 1. & A \equiv B & \text{Zał.} \\ 2. & A \vee C & \text{Zał.} \\ \hline 3. & B & \equiv\text{Elim } 1,2 \end{array}$$


$$\begin{array}{l|l} 1. & (A \equiv B) \equiv D & \text{Zał.} \\ 2. & B & \text{Zał.} \\ \hline 3. & A & \equiv\text{Elim } 1,2 \end{array}$$

Ćwiczenia na zastosowanie reguły \equiv Elim

\equiv Elim.I. Uzupełnij brakujące informacje:

(a)

1.	$C \equiv D$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	\equiv Elim 1, 2

(b)

1.	$C \equiv D$	Zał.
2.	D	Zał.
3.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	\equiv Elim 1, 2

(c)

1.	$B \equiv \sim D$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	B	\equiv Elim 1, 2

(d)

1.	$(C \vee A) \equiv B$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	B	\equiv Elim 1, 2

(e)

1.	$A \equiv (D \bullet B)$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	A	\equiv Elim 1, 2

(f)

1.	$M \equiv \sim\sim N$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	M	\equiv Elim 1, 2

(g)

1.	$\sim A \equiv \sim B$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	$\sim B$	\equiv Elim 1, 2

(h)

1.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
2.	$\sim C \equiv (A \bullet B)$	Zał.
3.	$\sim C$	\equiv Elim 1, 2

(i)

1.	$(A \rightarrow B) \equiv (C \equiv D)$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	$A \rightarrow B$	\equiv Elim 1, 2

(j)

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
3.	B	\equiv Elim 1, 2

(k)

1.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
2.	$(\sim D \equiv A) \bullet C$	Zał.
3.	$\sim D \equiv A$	Zał.
4.	$\sim D$	

(l)

1.	$\sim A \equiv \sim C$	Zał.
2.	$\sim A \equiv D$	Zał.
3.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
4.	$\sim A$	\equiv Elim 1, 3

(m)

1.	C	Zał.
2.	A	Zał.
3.	$[A \equiv (A \equiv B)] \equiv C$	Zał.
4.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	\equiv Elim 1, 3

(n)

1.	$\sim D \equiv \sim C$	Zał.
2.	$A \equiv C$	Zał.
3.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	Zał.
4.	$\sim D$	\equiv Elim 1, 3

(o)

1.	$\sim(D \bullet A)$	Zał.
2.	$(\sim D \rightarrow A) \equiv C$	Zał.
3.	$\sim(D \bullet A) \equiv \sim C$	Zał.
4.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	\equiv Elim 1,3

(p)

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	B	Zał.
4.	<div style="background-color: #cccccc; height: 15px; width: 100%;"></div>	\equiv Elim 1,3

(q)

(r)

1.	$(A \equiv B) \equiv C$	Zał.
2.	$\sim(B \equiv C)$	Zał.
3.	<div style="background-color: #cccccc; height: 1em; width: 100%;"></div>	Zał.
4.	C	\equiv Elim 1, 3

1.	$\sim A \equiv \sim C$	Zał.
2.	$A \equiv (D \rightarrow (A \equiv C))$	Zał.
3.	<div style="background-color: #cccccc; height: 1em; width: 100%;"></div>	Zał.
4.	A	\equiv Elim 2,3

11.2. Przykłady dowodów

Każdy z następujących dowodów spróbujcie skonstruować samodzielnie.

Przykład 1.

1.	$(A \bullet D) \bullet B$	Zał.	Dowieść: C
2.	$C \equiv (A \bullet D)$	Zał.	
	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>		
	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>		
	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>		
	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>		

Zaczynamy, jak zwykle od analizy docelowej. Naszym celem jest wyprowadzenie zdania C , które jest pierwszym członem równoważności w wierszu 2. Znamy regułę, która pozwala na wyprowadzenie członu równoważności – jest to \equiv Elim. Moglibyśmy zastosować regułę \equiv Elim pod warunkiem, że dany byłby również swobodnie stojący drugi człon tej równoważności, tj. w naszym przypadku $A \bullet D$, którego jednak nie mamy.

Musimy się zastanowić, jak otrzymać zdanie $A \bullet D$. Zdanie $A \bullet D$ jest koniunkcją. Zwykle otrzymywaliśmy koniunkcję łącząc ją z elementami za pomocą reguły \bullet Wpr. Tym razem jednakże nie mamy elementów do złączenia, natomiast cała koniunkcja $A \bullet D$ jest pierwszym członem koniunkcji w wierszu 1, możemy ją zatem uzyskać stosując regułę \bullet Elim:

3.	$A \bullet D$	\bullet Elim 1
----	---------------	------------------

Skoro mamy równoważność $C \equiv (A \bullet D)$ w wierszu 2 oraz jej drugi człon $A \bullet D$ w wierszu 3, to możemy wyprowadzić pierwszy człon tej równoważności, o którego wyprowadzenie w dowodzie chodziło:

4.	C	\equiv Elim 2, 3
----	-----	--------------------

Przykład 2.

1.	$A \bullet (B \equiv C)$	Zał.	Dowieść: $\sim D$
2.	$A \rightarrow C$	Zał.	
3.	$B \equiv \sim D$	Zał.	
	_____	_____	
	_____	_____	
	_____	_____	
	_____	_____	
	_____	_____	
	_____	_____	

Ponieważ będziemy musieli wykorzystać informację zawartą w przesłance 1 (pozostałe przesłanki to implikacja i równoważność, z którymi nie zrobimy nic bez jakiejś dodatkowej informacji), więc dostosujemy się do „rady Babuni” dla koniunkcji – zastosujemy regułę \bullet Elim:

4.	A	\bullet Elim 1
5.	$B \equiv C$	\bullet Elim 1

Teraz pomyślmy. Naszym celem jest wyprowadzenie zdania $\sim D$, które występuje tylko w przesłance 3, jako drugi człon równoważności $B \equiv \sim D$; będziemy mogli wyprowadzić zdanie $\sim D$ stosując regułę \equiv Elim, jeśli będziemy dysponowali pierwszym członem tej równoważności, tj. swobodnie stojącym zdaniem B, którego jednak nie mamy.

Jak wyprowadzić zdanie B? Poza zdaniem w wierszu 3, zdanie B występuje też w zdaniu w wierszu 5, gdzie jest pierwszym członem równoważności $B \equiv C$. (O wierszu 1 nie wspominamy, gdyż tam zdanie B występuje jako komponent członu koniunkcji; ponadto zdanie w wierszu 5 jest przecież właśnie wynikiem wyciągnięcia informacji ze zdania w wierszu 1, całość informacji dotyczącej zdania B, którą zawierało zdanie w wierszu 1 zawiera teraz zdanie w wierszu 5.) Stosując regułę \equiv Elim moglibyśmy wyprowadzić zdanie B, gdybyśmy mieli drugi człon równoważności $B \equiv C$, tj. swobodnie stojące zdanie C, którego nie mamy.

Jak wyprowadzić C? Poza wierszem 5, zdanie C występuje też w wierszu 2, gdzie jest następnikiem implikacji $A \rightarrow C$. Moglibyśmy więc wyprowadzić zdanie C stosując regułę \rightarrow Elim, jeśli mielibyśmy swobodnie stojący poprzednik tej implikacji, tj. zdanie A, które – na szczęście – mamy w wierszu 4.

Możemy zatem przystąpić do dalszej części dowodu – kierując się powyższym rozumowaniem. Zaczynamy od wyprowadzenia zdania C za pomocą reguły \rightarrow Elim zastosowanej do swobodnie stojącej implikacji $A \rightarrow C$ (wiersz 2) oraz swobodnie stojącego poprzednika tej implikacji, tj. zdania A (wiersz 4):

6.	C	\rightarrow Elim 2, 4
----	---	-------------------------

Ponieważ mamy już swobodnie stojące zdanie C (wiersz 6), możemy zastosować regułę \equiv Elim do tego zdania oraz do swobodnie stojącej równoważności $B \equiv C$ (wiersz 5), żeby wyprowadzić zdanie B:

7.	B	\equiv Elim 5, 6
----	---	--------------------

Ponieważ mamy już swobodnie stojące zdanie B (wiersz 7), możemy zastosować regułę \equiv Elim jeszcze raz tym razem do swobodnie stojącej równoważności $B \equiv \sim D$ (wiersz 3), żeby wyprowadzić wniosek, o którego wyprowadzenie chodziło w dowodzie:

8.	$\sim D$	\equiv Elim 3, 7
----	----------	--------------------

Ćwiczenia na dowodzenia z regułą \equiv Elim

\equiv Elim.II. W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go, oraz uzasadnij krok ostatni:

<p>(a)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">(A \equiv B) \bullet C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	(A \equiv B) \bullet C	Zał.		2.	B	Zał.		3.				4.	A			<p>(b)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">C \equiv B</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B \bullet \simA</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	C \equiv B	Zał.		2.	B \bullet \sim A	Zał.		3.				4.	C		
1.	(A \equiv B) \bullet C	Zał.																															
2.	B	Zał.																															
3.																																	
4.	A																																
1.	C \equiv B	Zał.																															
2.	B \bullet \sim A	Zał.																															
3.																																	
4.	C																																

<p>(c)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">B \equiv C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A \rightarrow B</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	B \equiv C	Zał.		2.	A \rightarrow B	Zał.		3.	A	Zał.		4.				5.	C			<p>(d)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">C \rightarrow B</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">\simA \equiv B</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">\simA</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	C \rightarrow B	Zał.		2.	\sim A \equiv B	Zał.		3.	C	Zał.		4.				5.	\sim A		
1.	B \equiv C	Zał.																																							
2.	A \rightarrow B	Zał.																																							
3.	A	Zał.																																							
4.																																									
5.	C																																								
1.	C \rightarrow B	Zał.																																							
2.	\sim A \equiv B	Zał.																																							
3.	C	Zał.																																							
4.																																									
5.	\sim A																																								

<p>(e)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">A \equiv B</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B \equiv C</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	A \equiv B	Zał.		2.	B \equiv C	Zał.		3.	A	Zał.		4.				5.	C			<p>(f)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">A \equiv B</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B \equiv C</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	A \equiv B	Zał.		2.	B \equiv C	Zał.		3.	C	Zał.		4.				5.	A		
1.	A \equiv B	Zał.																																							
2.	B \equiv C	Zał.																																							
3.	A	Zał.																																							
4.																																									
5.	C																																								
1.	A \equiv B	Zał.																																							
2.	B \equiv C	Zał.																																							
3.	C	Zał.																																							
4.																																									
5.	A																																								

\equiv Elim.III. W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je, oraz uzasadnij krok ostatni:

<p>(a)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">(A \equiv B) \bullet C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C \bullet A</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	(A \equiv B) \bullet C	Zał.		2.	C \bullet A	Zał.		3.				4.				5.	B			<p>(b)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">(A \equiv B) \bullet C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B \bullet D</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	(A \equiv B) \bullet C	Zał.		2.	B \bullet D	Zał.		3.				4.				5.	A		
1.	(A \equiv B) \bullet C	Zał.																																							
2.	C \bullet A	Zał.																																							
3.																																									
4.																																									
5.	B																																								
1.	(A \equiv B) \bullet C	Zał.																																							
2.	B \bullet D	Zał.																																							
3.																																									
4.																																									
5.	A																																								

<p>(c)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">B \equiv C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">C \equiv D</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A \bullet B</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">D</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	B \equiv C	Zał.		2.	C \equiv D	Zał.		3.	A \bullet B	Zał.		4.				5.				6.	D			<p>(d)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">B \equiv C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A \equiv B</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">D \bullet C</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	B \equiv C	Zał.		2.	A \equiv B	Zał.		3.	D \bullet C	Zał.		4.				5.				6.	A		
1.	B \equiv C	Zał.																																															
2.	C \equiv D	Zał.																																															
3.	A \bullet B	Zał.																																															
4.																																																	
5.																																																	
6.	D																																																
1.	B \equiv C	Zał.																																															
2.	A \equiv B	Zał.																																															
3.	D \bullet C	Zał.																																															
4.																																																	
5.																																																	
6.	A																																																

<p>(e)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">B \equiv C</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">(A \rightarrow C) \bullet C</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A \equiv B</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	B \equiv C	Zał.		2.	(A \rightarrow C) \bullet C	Zał.		3.	A \equiv B	Zał.		4.				5.				6.	A			<p>(f)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black;">(A \equiv B) \equiv (\simC \bullet A)</td> <td style="width: 10%; text-align: right;">Zał.</td> <td style="width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">\simC</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">A</td> <td style="text-align: right;">Zał.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc;"></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black;">B</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	1.	(A \equiv B) \equiv (\sim C \bullet A)	Zał.		2.	\sim C	Zał.		3.	A	Zał.		4.				5.				6.	B		
1.	B \equiv C	Zał.																																															
2.	(A \rightarrow C) \bullet C	Zał.																																															
3.	A \equiv B	Zał.																																															
4.																																																	
5.																																																	
6.	A																																																
1.	(A \equiv B) \equiv (\sim C \bullet A)	Zał.																																															
2.	\sim C	Zał.																																															
3.	A	Zał.																																															
4.																																																	
5.																																																	
6.	B																																																

≡Elim.IV. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: C

1.	$A \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \equiv B$	Zał.
3.	A	Zał.

(b) Dowieść, że: A

1.	$(A \equiv B) \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	C	Zał.

(c) Dowieść, że: C

1.	$B \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow (B \bullet D)$	Zał.
3.	A	Zał.

(d) Dowieść, że: $B \bullet D$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$A \bullet C$	Zał.

(e) Dowieść, że: $A \bullet C$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$B \bullet D$	Zał.

(f) Dowieść, że: H

1.	$(\sim A \bullet C) \equiv (B \vee C)$	Zał.
2.	$H \equiv (B \vee C)$	Zał.
3.	$(\sim A \bullet D) \bullet C$	Zał.

11.3. Reguła \vee Wpr (Reguła wprowadzania alternatywy, Reguła dodawania)

Jeżeli w pewnym wierszu dowodu występuje (swobodnie) zdanie p , to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje alternatywa, której członem jest zdanie p .

$$\begin{array}{l|l} i. & p \\ \hline \triangleright & p \vee r \quad \vee\text{Wpr } i \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} i. & p \\ \hline \triangleright & r \vee p \quad \vee\text{Wpr } i \end{array}$$

Intuicje

Załóżmy, że zdanie B jest prawdziwe. Czy następujące zdania są prawdziwe?

- | | | |
|---|---------------------------------|--------------------------------|
| $B \vee \sim C$ | <input type="radio"/> prawdziwe | <input type="radio"/> fałszywe |
| $B \vee \sim(C \bullet B)$ | <input type="radio"/> prawdziwe | <input type="radio"/> fałszywe |
| $B \vee \sim[\sim A \vee \sim(B \rightarrow \sim C)]$ | <input type="radio"/> prawdziwe | <input type="radio"/> fałszywe |
| $C \vee B$ | <input type="radio"/> prawdziwe | <input type="radio"/> fałszywe |
| $[\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim\sim(C \vee A)] \vee B$ | <input type="radio"/> prawdziwe | <input type="radio"/> fałszywe |

Mam nadzieję, że odpowiedzieliście, że każde z tych zdań jest prawdziwe. A wiemy to z pewnością ponieważ wiemy, że jeżeli zdanie B jest prawdziwe, to prawdziwa jest *każda* alternatywa, której członem jest zdanie B. Ta zależność między prawdziwością członu alternatywy a prawdziwością alternatywy stanowi właśnie uzasadnienie dla reguły \vee Wpr.

W wypadku reguły \vee Wpr nie należy się oszukiwać i sugerować, że jest ona regułą intuicyjną. Jej zastosowania wydają nam się właśnie wysoce nieintuicyjne, choć przyciśnięci do muru powyższym rozumowaniem powiedzielibyśmy inaczej. Na wszelki wypadek samodzielnie przekonajcie się, czy poniższe wnioskowania wydają się Wam intuicyjne:

Teoria Einsteina jest prawdziwa.
Teoria Einsteina lub teoria Newtona jest prawdziwa.

Będzie padać deszcz.
Będzie padać deszcz lub będzie świecić słońce.

Mam wrażenie, że wnioskowania te nie wydają się Wam intuicyjne. Warto jednak zwrócić uwagę, że ich nieintuicyjność *nie* bierze się stąd, że wydają się Wam *nieprawidłowe*. Przecież – po chwili refleksji – przyznamy, że we wnioskowaniach tych wniosek nie może być fałszywy, *jeżeli* przesłanka jest prawdziwa! Wydają się nam jednak nieintuicyjne, gdyż trudno nam sobie wyobrazić, dlaczego ktoś, kto wie już, że p , chciałby «rozmyślać» tę wiedzę w alternatywę „ p lub coś tam”. Okazuje się jednak, że reguła \vee Wpr jest niezbędna dla uchwycenia mnóstwa prawidłowych wnioskowań, a my stosujemy ją po prostu intuicyjnie nie zdając sobie z niej sprawy. Oto przykład.

Dlaczego reguła \vee Wpr jest użyteczna?

Rozważmy następujące wnioskowanie, którego prawdziwość jest tak bezsporna, że pozwolę Wam wpisać wniosek:

Jeżeli Jaś otrzyma 99 lub 100 punktów na teście z matematyki, to otrzyma ocenę celującą.
Jaś otrzymał 99 punktów na teście z matematyki.

Po symbolizacji:

$(D \vee S) \rightarrow C$

D

C

C: Jaś otrzyma ocenę celującą z matematyki.

D: Jaś otrzyma 99 punktów na teście z matematyki.

S: Jaś otrzyma 100 punktów na teście z matematyki.

Spróbujmy wykazać prawdziwość tego rozumowania za pomocą dowodu:

1.	$(D \vee S) \rightarrow C$	Zał.	Dowieść: C
2.	D	Zał.	

Aby wyprowadzić zdanie C musielibyśmy zastosować regułę \rightarrow Elim do implikacji $(D \vee S) \rightarrow C$ w wierszu 1; a moglibyśmy to zrobić, o ile mielibyśmy swobodnie stojący poprzednik tej implikacji, tj. musielibyśmy mieć wolno stojące zdanie $D \vee S$. Tego zdania jednak nie mamy. Możemy je jednak wyprowadzić korzystając właśnie z reguły \vee Wpr, ponieważ mamy człon tej alternatywy, tj. zdanie D.

3. | $D \vee S$ \vee Wpr 2

Zwróćmy uwagę, że w tym kontekście rozumowanie oparte na regule \vee Wpr nie wzbudza żadnych intuicyjnych wątpliwości. Wiemy, że jeżeli Jaś otrzyma 99 lub 100 punktów na teście z matematyki, to otrzyma ocenę celującą. Skoro Jaś otrzymał 99 punktów, to prawdziwy jest poprzednik danej nam implikacji: „Jaś otrzymał 99 lub 100 punktów na teście z matematyki”. Możemy zatem wyciągnąć wniosek, który bez wahania wyciągamy, nie zdając sobie sprawy, ile zawdzięczamy regule \vee Wpr:

4. | C \rightarrow Elim 1, 3

Dlaczego reguła \vee Wpr jest kłopotliwa

Właściwą odpowiedzią na pytanie, dlaczego reguła \vee Wpr, już znacie, ale warto to sobie jeszcze raz uświadomić. Reguła \vee Wpr pozwala na dołączenie *dowolnego* zdania jako drugiego członu alternatywy do zdania, które już mamy. Niech dane będą dwie przesłanki:

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał.

Czy wolno dołączyć zdanie $\sim A$ do przesłanki 2? Tak (por. wiersz 3, niżej). A do przesłanki pierwszej? Też (por. wiersz 4, niżej). A czy wolno dołączyć do przesłanki 1 chorobliwie wyglądające zdanie $[\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim\sim(C \vee A)] \bullet \sim[\sim(\sim D \equiv \sim B)] \bullet \sim\sim(\sim D \vee \sim(C \vee \sim B))$? Tak (por. wiersz 5, niżej). A do przesłanki drugiej? Też (por. wiersz 6, niżej).

3.	$A \vee \sim A$	\vee Wpr 2
4.	$\sim A \vee (A \rightarrow C)$	\vee Wpr 1
5.	$\{[\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim\sim(C \vee A)] \bullet \sim[\sim(\sim D \equiv \sim B)] \bullet \sim\sim(\sim D \vee \sim(C \vee \sim B))]\} \vee A$	\vee Wpr 1
6.	$(A \rightarrow C) \vee \{[\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim\sim(C \vee A)] \bullet \sim[\sim(\sim D \equiv \sim B)] \bullet \sim\sim(\sim D \vee \sim(C \vee \sim B))]\}$	\vee Wpr 2

Dozwolone są w tej sytuacji powyższe kroki, jak i tryliony innych. W dowodzeniu zawsze musicie dążyć do celu! Nigdy nie należy podejmować kroku tylko dlatego, że wolno! Inaczej zginiecie pod ciężarem nieskończonej ilości bezsensownych – ale dozwolonych – kroczków.



Porada babuni o regule \vee Wpr:

Nigdy nie stosuj \vee Wpr, chyba że dobrze wiesz, co chcesz zrobić z wyprowadzonym za jej pomocą zdaniem.

Zwróćcie uwagę, że powyżej nie powiedziane zostało, co z przesłanek 1 i 2 ma niby wynikać. Jeżeli chodzi o to aby dowieść, że C , to można to zrobić w jednym kroku. Jeżeli chodzi o to żeby dowieść, że $C \bullet A$, to można to zrobić w dwóch krokach. Ale może chodzić o to, aby dowieść, że $[(A \rightarrow C) \vee B] \bullet (D \vee A)$. Spróbujmy:

Przykład 3

1.	$A \rightarrow C$	Zał.	Dowieść: $[(A \rightarrow C) \vee B] \bullet (D \vee A)$
2.	A	Zał.	

Nasz wniosek jest koniunkcją i będziemy go mogli wyprowadzić za pomocą reguły \bullet Wpr, o ile będziemy dysponowali swobodnie stojącymi członami: z jednej strony alternatywą $(A \rightarrow C) \vee B$, a z drugiej strony alternatywą $D \vee A$. Zastanówmy się kolejno, jak je otrzymać?

Moglibyśmy otrzymać alternatywę $D \vee A$ za pomocą reguły \vee Wpr, gdyby dany nam był swobodnie stojący jeden z członów tej alternatywy: albo zdanie D, albo zdanie A. Istotnie mamy zdanie A swobodnie stojące w wierszu 2, a ponieważ reguła \vee Wpr mówi, że możemy dołączyć jako pozostały człon alternatywy dowolne zdanie do zdania A, więc pozwala *również* na dodanie zdania D, tak aby uzyskać zdanie:

3.	$D \vee A$	\vee Wpr 2
----	------------	--------------

Chwila refleksji wystarczy, żeby sobie uświadomić, iż reguła \vee Wpr pozwoli również na wyprowadzenie zdania $(A \rightarrow C) \vee B$. Mamy przecież jeden z członów tej alternatywy. Nie mamy jej drugiego członu (zdania B), ale mamy jej pierwszy człon (zdanie $A \rightarrow C$), stojące swobodnie w wierszu 1. Wolno nam zatem dołączyć nowy wiersz dowodu, w którym zdanie $A \rightarrow C$ będzie pierwszym członem alternatywy, a drugim jej członem będzie dowolne zdanie, w szczególności zaś to, którego potrzebujemy w tym dowodzie, a mianowicie zdanie B:

4.	$(A \rightarrow C) \vee B$	\vee Wpr 1
----	----------------------------	--------------

Ostatni krok to zastosowanie reguły \bullet Wpr do dwóch właśnie uzyskanych alternatyw:

5.	$[(A \rightarrow C) \vee B] \bullet (D \vee A)$	\bullet Wpr 4, 3
----	---	--------------------

Stosowanie reguły \vee Wpr

Regułę \vee Wpr można stosować na *nieograniczoną ilość sposobów* – lecz gdy już zdecydujemy co ma być dodanym członem alternatywy reguła może być zastosowana dwojako. W poniższym przypadku do zdania $\sim A$, zdecydowaliśmy się dodać zdanie $D \equiv C$:

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$(D \equiv C) \vee \sim A$	\vee Wpr 1
3.	$\sim A \vee (D \equiv C)$	\vee Wpr 1

Nie wolno reguły \vee Wpr stosować do członów zdań:



1.	$\sim A$	Zał.
2.	$\sim(A \vee (D \equiv C))$	\vee Wpr 1



1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$(A \vee C) \bullet B$	\vee Wpr 1

Ćwiczenia na zastosowanie reguły \vee Wpr

\vee Wpr.I.a. Zastosuj regułę \vee Wpr dodając zdanie B:

(a)

1.	A	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 1

(b)

1.	A	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 2
4.	_____	\vee Wpr 2

(c)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 2
4.	_____	\vee Wpr 2

(d)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 1

(e)

1.	B	Zał.
2.	$A \vee C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 2
5.	_____	\vee Wpr 2

(f)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$A \equiv C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 1
5.	_____	\vee Wpr 2
6.	_____	\vee Wpr 2

\vee Wpr.I.b. Zastosuj regułę \vee Wpr dodając zdanie $\sim B$:

(a)

1.	A	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 1

(b)

1.	A	Zał.
2.	$A \rightarrow C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 2
4.	_____	\vee Wpr 2

(c)

1.	$\sim A$	Zał.
2.	$A \equiv C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 1

(d)

1.	B	Zał.
2.	$A \vee C$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1
4.	_____	\vee Wpr 1

(e)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 1

(f)

1.	$\sim B$	Zał.
2.	$B \rightarrow B$	Zał.
3.	_____	\vee Wpr 2
4.	_____	\vee Wpr 2

\forall Wpr.I.c. Zastosuj regułę \forall Wpr dodając zdanie $\sim B \equiv A$:

<p>(a)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \rightarrow C</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 1</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 1</td></tr> </table>	1.	A	Zał.	2.	A \rightarrow C	Zał.	3.	_____	\forall Wpr 1	4.	_____	\forall Wpr 1	<p>(b)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim A$</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \equiv C</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 1</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 1</td></tr> </table>	1.	$\sim A$	Zał.	2.	A \equiv C	Zał.	3.	_____	\forall Wpr 1	4.	_____	\forall Wpr 1
1.	A	Zał.																							
2.	A \rightarrow C	Zał.																							
3.	_____	\forall Wpr 1																							
4.	_____	\forall Wpr 1																							
1.	$\sim A$	Zał.																							
2.	A \equiv C	Zał.																							
3.	_____	\forall Wpr 1																							
4.	_____	\forall Wpr 1																							
<p>(c)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A \rightarrow C</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 2</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 2</td></tr> </table>	1.	A	Zał.	2.	A \rightarrow C	Zał.	3.	_____	\forall Wpr 2	4.	_____	\forall Wpr 2	<p>(d)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">$\sim B$</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">B \rightarrow B</td><td style="padding-left: 20px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 2</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">_____</td><td style="padding-left: 20px;">\forallWpr 2</td></tr> </table>	1.	$\sim B$	Zał.	2.	B \rightarrow B	Zał.	3.	_____	\forall Wpr 2	4.	_____	\forall Wpr 2
1.	A	Zał.																							
2.	A \rightarrow C	Zał.																							
3.	_____	\forall Wpr 2																							
4.	_____	\forall Wpr 2																							
1.	$\sim B$	Zał.																							
2.	B \rightarrow B	Zał.																							
3.	_____	\forall Wpr 2																							
4.	_____	\forall Wpr 2																							

11.4. Jeszcze jeden przykład dowodu z regułą \forall Wpr

Jeden przykład dowodu stosującego regułę \forall Wpr widzieliśmy. Przeróbmy jeszcze jeden. Jak zwykle spróbujcie go skonstruować samodzielnie.

Przykład 4.

1.	(C \bullet D) \equiv ($\sim A \vee B$)	Zał.	Dowieść: C
2.	B	Zał.	
	_____	_____	
	_____	_____	
	_____	_____	
	_____	_____	

Naszym celem jest wyprowadzenie swobodnie stojącego zdania C, które jest członem koniunkcji będącej z kolei członem równoważności z wiersza 1. Jeśli uda nam się wyprowadzić koniunkcję C \bullet D, otrzymanie C jest proste – zastosujemy \bullet Elim. Musimy się tylko zastanowić:

Jak otrzymać zdanie C \bullet D? Zauważyliśmy już, że jest to pierwszy człon równoważności. Gdybyśmy mieli drugi jej człon, tj. $\sim A \vee B$, wówczas moglibyśmy zastosować regułę \equiv Elim.

Jak zatem otrzymać zdanie $\sim A \vee B$? Zdanie $\sim A \vee B$ jest alternatywą – moglibyśmy ją uzyskać stosując regułę \vee Wpr, gdybyśmy mieli którykolwiek z jej członów, i – na szczęście – drugi jej człon, zdanie B występuje swobodnie w wierszu 2. Do zdanie B z wiersza 2 na mocy reguły \vee Wpr możemy dodać dowolne zdanie, w szczególności możemy dodać zdanie $\sim A$, gdyż potrzebujemy alternatywy $\sim A \vee B$:

3. | $\sim A \vee B$ \vee Wpr 2

Mamy teraz równoważność (C \bullet D) \equiv ($\sim A \vee B$) w wierszu 1 oraz drugi jej człon ($\sim A \vee B$) w wierszu 3, możemy zatem wyprowadzić pierwszy człon tej równoważności za pomocą reguły \equiv Elim:

4. | C \bullet D \equiv Elim 1, 3

Teraz pozostaje zastosowanie reguły \bullet Elim, aby uzyskać żądany wniosek:

5. | C \bullet Elim 4

Ćwiczenia na dowodzenia z regułą \vee Wpr

\vee Wpr.II. W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go, oraz uzasadnij krok ostatni:

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--------------------------------|------|----|---------------------------------|------|----|--|--|----|---------------------|--|---|----|--|------|----|---------------------------------|------|----|--|--|----|------------------------------|--|
| <p>(a)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$(A \vee B) \rightarrow C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | A | Zał. | 2. | $(A \vee B) \rightarrow C$ | Zał. | 3. | | | 4. | C | | <p>(b)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(D \vee \sim B) \rightarrow A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$\sim B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>A</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(D \vee \sim B) \rightarrow A$ | Zał. | 2. | $\sim B$ | Zał. | 3. | | | 4. | A | |
| 1. | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $(A \vee B) \rightarrow C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $(D \vee \sim B) \rightarrow A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $\sim B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(c)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$(A \vee \sim B) \rightarrow C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim B$ | Zał. | 2. | $(A \vee \sim B) \rightarrow C$ | Zał. | 3. | | | 4. | C | | <p>(d)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(C \vee \sim B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>C</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$\sim A \vee \sim B$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(C \vee \sim B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$ | Zał. | 2. | C | Zał. | 3. | | | 4. | $\sim A \vee \sim B$ | |
| 1. | $\sim B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $(A \vee \sim B) \rightarrow C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $(C \vee \sim B) \rightarrow (\sim A \vee \sim B)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | C | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $\sim A \vee \sim B$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(e)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$D \equiv (A \vee C)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>D</td><td></td></tr> </table> | 1. | A | Zał. | 2. | $D \equiv (A \vee C)$ | Zał. | 3. | | | 4. | D | | <p>(f)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \equiv (\sim A \vee \sim B)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim B$ | Zał. | 2. | $C \equiv (\sim A \vee \sim B)$ | Zał. | 3. | | | 4. | C | |
| 1. | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $D \equiv (A \vee C)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | D | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $\sim B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \equiv (\sim A \vee \sim B)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(g)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(B \vee A) \equiv (C \vee D)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$C \vee D$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(B \vee A) \equiv (C \vee D)$ | Zał. | 2. | A | Zał. | 3. | | | 4. | $C \vee D$ | | <p>(h)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>C</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$(C \vee A) \vee (C \vee D)$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim A$ | Zał. | 2. | C | Zał. | 3. | | | 4. | $(C \vee A) \vee (C \vee D)$ | |
| 1. | $(B \vee A) \equiv (C \vee D)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $C \vee D$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $\sim A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | C | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $(C \vee A) \vee (C \vee D)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(i)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>C</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$B \vee (C \vee D)$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim A$ | Zał. | 2. | C | Zał. | 3. | | | 4. | $B \vee (C \vee D)$ | | <p>(j)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>C</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$(C \vee B) \vee D$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim A$ | Zał. | 2. | C | Zał. | 3. | | | 4. | $(C \vee B) \vee D$ | |
| 1. | $\sim A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | C | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $B \vee (C \vee D)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $\sim A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | C | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $(C \vee B) \vee D$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Wpr.III. W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je, oraz uzasadnij krok ostatni:

<p>(a)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A • B</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">(A ∨ C) → D</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">D</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	A • B	Zał.	2.	(A ∨ C) → D	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	D	_____	<p>(b)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim D \equiv (A \vee C)$</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">C • B</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim D$</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	$\sim D \equiv (A \vee C)$	Zał.	2.	C • B	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	$\sim D$	_____
1.	A • B	Zał.																													
2.	(A ∨ C) → D	Zał.																													
3.	_____	_____																													
4.	_____	_____																													
5.	D	_____																													
1.	$\sim D \equiv (A \vee C)$	Zał.																													
2.	C • B	Zał.																													
3.	_____	_____																													
4.	_____	_____																													
5.	$\sim D$	_____																													
<p>(c)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">C</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">(A ∨ B) • (D ∨ C)</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	A	Zał.	2.	C	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	(A ∨ B) • (D ∨ C)	_____	<p>(d)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A → [(A ∨ B) → D]</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">D</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	A	Zał.	2.	A → [(A ∨ B) → D]	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	D	_____
1.	A	Zał.																													
2.	C	Zał.																													
3.	_____	_____																													
4.	_____	_____																													
5.	(A ∨ B) • (D ∨ C)	_____																													
1.	A	Zał.																													
2.	A → [(A ∨ B) → D]	Zał.																													
3.	_____	_____																													
4.	_____	_____																													
5.	D	_____																													
<p>(e)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">(C ∨ A) → [D ≡ (C ∨ A)]</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">D</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	(C ∨ A) → [D ≡ (C ∨ A)]	Zał.	2.	A	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	D	_____	<p>(f)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">(C ∨ A) → B</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">B ∨ C</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	A	Zał.	2.	(C ∨ A) → B	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	B ∨ C	_____
1.	(C ∨ A) → [D ≡ (C ∨ A)]	Zał.																													
2.	A	Zał.																													
3.	_____	_____																													
4.	_____	_____																													
5.	D	_____																													
1.	A	Zał.																													
2.	(C ∨ A) → B	Zał.																													
3.	_____	_____																													
4.	_____	_____																													
5.	B ∨ C	_____																													

Wpr.IV. Skonstruuj następujące dowody:

<p>(a) Dowieść, że: $\sim C$</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">(A ∨ B) → D</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">(∼E ∨ D) → ∼C</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">6.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">7.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">8.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">9.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">10.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	(A ∨ B) → D	Zał.	2.	(∼E ∨ D) → ∼C	Zał.	3.	A	Zał.	4.	_____	_____	5.	_____	_____	6.	_____	_____	7.	_____	_____	8.	_____	_____	9.	_____	_____	10.	_____	_____	<p>(b) Dowieść, że: $[(A \vee B) \vee C] \bullet (D \vee A)$</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">A</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">2.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">$\sim B$</td><td style="padding-left: 10px;">Zał.</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">3.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">4.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">5.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">6.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">7.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">8.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">9.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> <tr><td style="text-align: right;">10.</td><td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">_____</td><td style="padding-left: 10px;">_____</td></tr> </table>	1.	A	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.	_____	_____	4.	_____	_____	5.	_____	_____	6.	_____	_____	7.	_____	_____	8.	_____	_____	9.	_____	_____	10.	_____	_____
1.	(A ∨ B) → D	Zał.																																																											
2.	(∼E ∨ D) → ∼C	Zał.																																																											
3.	A	Zał.																																																											
4.	_____	_____																																																											
5.	_____	_____																																																											
6.	_____	_____																																																											
7.	_____	_____																																																											
8.	_____	_____																																																											
9.	_____	_____																																																											
10.	_____	_____																																																											
1.	A	Zał.																																																											
2.	$\sim B$	Zał.																																																											
3.	_____	_____																																																											
4.	_____	_____																																																											
5.	_____	_____																																																											
6.	_____	_____																																																											
7.	_____	_____																																																											
8.	_____	_____																																																											
9.	_____	_____																																																											
10.	_____	_____																																																											

11.5. Reguła wtórna MTP (*modus tollendo ponens*)

Pozwolimy sobie teraz przerwać nasz ciąg uczenia się reguł pierwotnych systemu SD i wprowadzimy jedną, bardzo użyteczną regułę wtórną, a mianowicie regułę MTP pozwalającą nam na wykorzystanie informacji zawartej w alternatywie. W temacie 10 wykazemy, że reguła MTP jest regułą wtórną, tj. że wszystkie kroki wnioskowania, na które pozwala reguła MTP można uzasadnić wyłącznie za pomocą reguł pierwotnych systemu SD. Tymczasem jednak pozwolimy sobie na stosowanie reguły MTP:

Jeżeli w pewnym wierszu dowodu występuje (swobodnie) alternatywa, a w innym wierszu dowodu występuje (swobodnie) negacja jednego jej członu, to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje pozostały członek tej alternatywy.

$$\begin{array}{l|l} i. & p \vee r \\ j. & \sim p \\ \hline \triangleright & r \end{array} \quad \text{MTP } i, j$$

$$\begin{array}{l|l} i. & p \vee r \\ j. & \sim r \\ \hline \triangleright & p \end{array} \quad \text{MTP } i, j$$

Intuicje

O intuicyjności reguły MTP nie trzeba nikogo przekonywać. Proszę wpisać wnioski w następujących rozumowaniach, a przekonają się Państwo sami:

W stołówce podadzą na deser albo lody, albo budyni.
Niestety nie podali lodów.

Alicja może zdawać egzamin w formie albo pisemnej albo ustnej.
Alicja musiała być w pracy i przepadły jej wszystkie terminy ustnych egzaminów.

Stosowanie reguły MTP

Regułę MTP można tylko w *jeden sposób* (uwaga: druga wersja reguły MTP wymaga, aby dane były inne zdania):

$$\begin{array}{l|l} 1. & A \vee B & \text{Zał.} \\ 2. & \sim A & \text{Zał.} \\ \hline 3. & B & \text{MTP } 1, 2 \end{array}$$

Ponieważ reguła wymaga, aby oprócz alternatywy, dany był też *zanegowany* jeden z jej członów, warto się zastanowić nad tym, jak stosować się będzie reguła MTP do alternatyw, których członów są zanegowane. Spróbujcie zastosować regułę MTP do poniższych przykładów – uzupełniając brakujące informacje:

$$\begin{array}{l|l} 1. & D \vee \sim C & \text{Zał.} \\ 2. & \sim D & \text{Zał.} \\ \hline 3. & & \text{MTP } 1, 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1. & D \vee \sim C & \text{Zał.} \\ 2. & & \text{Zał.} \\ \hline 3. & D & \text{MTP } 1, 2 \end{array}$$

Mamy do czynienia z alternatywą, której pierwszym członem jest zdanie proste D, a drugim członem negacja $\sim C$. Gdy dane jest jeszcze zdanie $\sim D$, to możemy zastosować regułę MTP, gdyż negacja $\sim D$

jest negacją pierwszego członu alternatywy $D \vee \sim C$, a w takim wypadku reguła MTP pozwala nam na wyprowadzenie drugiego członu alternatywy, czyli negacji $\sim C$.

W drugim wypadku, dana jest ponownie alternatywa $D \vee \sim C$, lecz tym razem MTP została zastosowana tak, że wyprowadzony został pierwszy jej człon, a mianowicie D. Brakuje tu informacji dotyczącej tego, co jeszcze musiało być dane. Aby wyprowadzić pierwszy człon alternatywy, musieliśmy mieć negację drugiego członu tej alternatywy. Drugim członem alternatywy $D \vee \sim C$ jest zdanie $\sim C$, którego negacją jest zdanie $\sim\sim C$. W wierszu 2 drugiego dowodu brakuje zatem zdania $\sim\sim C$.

Jednym z częstych błędów jest przypuszczenie, że reguła MTP jest prawidłowo zastosowana w obydwu przypadkach niżej przedstawionych:

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1. $A \vee \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2. $\sim\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3. A</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 1, 2</td> </tr> </table>	1. $A \vee \sim B$	Zał.	2. $\sim\sim B$	Zał.	3. A	MTP 1, 2		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1. $A \vee \sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2. B</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3. A</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 1, 2</td> </tr> </table>	1. $A \vee \sim B$	Zał.	2. B	Zał.	3. A	MTP 1, 2
1. $A \vee \sim B$	Zał.													
2. $\sim\sim B$	Zał.													
3. A	MTP 1, 2													
1. $A \vee \sim B$	Zał.													
2. B	Zał.													
3. A	MTP 1, 2													



W przypadku drugim zastosowanie reguły MTP nie jest jednak uprawnione. Zdanie B nie stanowi bowiem negacji zdania $\sim B$. Musimy pamiętać bowiem, że reguły inferencyjne są regułami syntaktycznymi – dostępna im jest jedynie struktura syntaktyczna formuł (a więc to z jakim symbolem są złożone), a nie ich znaczenie. Oczywiście wnioskowanie, że A na podstawie przesłanek $A \vee \sim B$ oraz B jest wnioskowaniem prawidłowym – będziemy się o tym mogli przekonać nieco później, jak już skompletujemy nasze reguły wnioskowania.



Porada babuni o regule MTP:

Uważaj na negacje!

Jak zwykle nie wolno reguły MTP stosować do członów zdań:

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1. $A \vee (B \vee C)$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2. $\sim B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3. C</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 1, 2</td> </tr> </table>	1. $A \vee (B \vee C)$	Zał.	2. $\sim B$	Zał.	3. C	MTP 1, 2		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1. $A \vee B$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2. $\sim A \equiv C$</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3. B</td> <td style="padding-left: 10px;">MTP 1, 2</td> </tr> </table>	1. $A \vee B$	Zał.	2. $\sim A \equiv C$	Zał.	3. B	MTP 1, 2	
1. $A \vee (B \vee C)$	Zał.														
2. $\sim B$	Zał.														
3. C	MTP 1, 2														
1. $A \vee B$	Zał.														
2. $\sim A \equiv C$	Zał.														
3. B	MTP 1, 2														

Czy wiesz, że ...

Pionierzy badań nad sztuczną inteligencją A. Newell, J.C. Shaw and H.A. Simon stworzyli program, *Logic Theorist*, którego zadaniem było dowodzenie twierdzeń. Nie jest to zadanie banalne, gdyż proces dowodzenia nie jest algorytmizowalny.

Programowi *Logic Theorist* udało się dowieść 38 z pierwszych 52 twierdzeń przedstawionych przez B. Russella i A.N. Whiteheada w *Principia Mathematica*. W przypadku jednego twierdzenia dowód przedstawiony przez program *Logic Theorist* był elegantszy niż dowód podanych przez sławnych logików. Trzej autorzy pośpiesznie napisali krótki artykuł, opisujący otrzymany dowód, dopisując do swych nazwisk czwartego autora: *Logic Theorist*. Był to pierwszy artykuł, którego współautorem była maszyna. Niestety redakcja artykuł się nie ukazał – redaktor prestiżowego czasopisma *The Journal of Symbolic Logic* odrzucił artykuł.

Na podstawie: J. Weizenbaum, *Computer Power and Human Reason* (San Francisco: W.H. Freeman, 1976)

Ćwiczenia na zastosowanie reguły MTP

MTP.I. Uzupełnij brakujące informacje:

(a)	1. $A \vee B$	Zał.	
	2. $\sim B$	Zał.	
	3. _____	MTP 1,2	

(b)	1. $A \vee B$	Zał.	
	2. _____	Zał.	
	3. B	MTP 1,2	

(c)	1. _____	Zał.	
	2. $\sim B$	Zał.	
	3. C	MTP 1,2	

(d)	1. $\sim A \vee \sim B$	Zał.	
	2. _____	Zał.	
	3. $\sim A$	MTP 1,2	

(e)	1. _____	Zał.	
	2. $\sim(B \bullet C)$	Zał.	
	3. $\sim A$	MTP 1,2	

(f)	1. $(A \rightarrow C) \vee B$	Zał.	
	2. $\sim B$	Zał.	
	3. _____	MTP 1,2	

(g)	1. $A \vee \sim B$	Zał.	
	2. _____	Zał.	
	3. A	MTP 1,2	

(h)	1. $\sim A$	Zał.	
	2. _____	Zał.	
	3. $\sim \sim B$	MTP 1,2	

11.6. Przykłady dowodów z zastosowaniem reguły MTP

Przykład 5.

1.	$A \vee B$	Zał.	
2.	$C \rightarrow \sim B$	Zał.	
3.	C	Zał.	

Dowieść: A

Naszym celem jest wyprowadzenie swobodnie stojącego zdania A, które jest pierwszym członem alternatywy z wiersza 1. Moglibyśmy wyprowadzić zdanie A, gdybyśmy mieli negację drugiego członu alternatywy $A \vee B$, tj. gdybyśmy mieli $\sim B$.

Zdanie $\sim B$ jest następnikiem implikacji z wiersza 2, a zatem moglibyśmy je wyprowadzić stosując \rightarrow Elim, gdybyśmy mieli poprzednik tej implikacji, tj. C, który rzeczywiście mamy w wierszu 3:

4.	$\sim B$	\rightarrow Elim 2, 3	
----	----------	-------------------------	--

Mamy teraz alternatywę $A \vee B$ swobodnie stojącą w wierszu 1 oraz negację jej drugiego członu, tj. swobodnie stojące zdanie $\sim B$, w wierszu 4, możemy zatem zastosować regułę MTP i wyprowadzić pierwszy człon tej alternatywy:

5.	A	MTP 1, 4	
----	-----	----------	--

Przykład 6.

1.	$\sim A \vee \sim B$	Zał.	Dowieść: $\sim A$
2.	$B \bullet \sim \sim B$	Zał.	

Naszym celem jest wyprowadzenie zdania $\sim A$, które jest pierwszym członem alternatywy w wierszu 1. Moglibyśmy wyprowadzić $\sim A$, gdybyśmy mieli negacją drugiego członu tej alternatywy. Ponieważ drugim członem alternatywy $\sim A \vee \sim B$ jest zdanie $\sim B$, to negacją drugiego członu tej alternatywy będzie zdanie $\sim \sim B$. Zdanie $\sim \sim B$ nie występuje w dowodzie swobodnie, ale możemy je wyprowadzić z wiersza 2 stosując regułę \bullet Elim:

3.	$\sim \sim B$	\bullet Elim 2
----	---------------	------------------

Mamy teraz alternatywę $\sim A \vee \sim B$ swobodnie stojącą w wierszu 1 oraz negację jej drugiego członu, tj. swobodnie stojące zdanie $\sim \sim B$, w wierszu 3, możemy zatem zastosować regułę MTP i wyprowadzić pierwszy człon tej alternatywy:

4.	$\sim A$	MTP 1, 3
----	----------	----------

Uwaga! Aby móc zastosować regułę MTP nie wystarczyłoby wyprowadzenie zdania B, gdyż zdanie B nie jest negacją zdania $\sim B$.

Przykład 7.

Spróbujcie dowieść prawdziwości następującego rozumowania:

Jeżeli dostanę 17 lub 18 punktów na teście, to otrzymam ocenę bdb. Otrzymam ocenę bdb tylko jeśli albo przyswoję sobie regułę wprowadzania implikacji albo wkuję wszystkie możliwe dowody na pamięć. Dostałem 18 punktów, a przecież nie można wkuć wszystkich możliwych dowodów na pamięć, więc: B: Otrzymam bdb
O: Dostanę osiemnaście punktów
P: Przyswoję sobie \rightarrow Wpr
S: Dostanę siedemnaście punktów
W: Wkuję wszystkie dowody

Przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji.

1.	$(S \vee O) \rightarrow B$	Zał.	Dowieść: P
2.	$B \rightarrow (P \vee W)$	Zał.	
3.	$O \bullet \sim W$	Zał.	

Naszym celem jest wyprowadzenie zdania P. Zdanie P jest pierwszym członem alternatywy $P \vee W$ znajdującej się w następniku implikacji z wiersza 2. Aby wyprowadzić P musimy najpierw wyprowadzić alternatywę, co moglibyśmy prosto uczynić (za pomocą reguły \rightarrow Elim), gdybyśmy mieli poprzednik implikacji $B \rightarrow (P \vee W)$, czyli gdybyśmy mieli swobodnie stojące zdanie B. Jedynym sposobem na otrzymanie zdania B jest zastosowanie reguły \rightarrow Elim do implikacji z wiersza 1, ale do tego potrzebujemy swobodnie występującego poprzednika tej implikacji, tj. zdania $S \vee O$, którego nie mamy. Ponieważ zdanie $S \vee O$ jest alternatywą, więc możemy je łatwo otrzymać przez zastosowanie

reguły \vee Wpr, o ile mamy któryś z członów tej alternatywy. Ani S ani O nie występują swobodnie w dowodzie, ale możemy wyprowadzić O z wiersza 3 stosując regułę \bullet Elim. Wykonajmy zatem wyżej obmyślane kroki:

4. $\left| \begin{array}{l} O \\ \bullet\text{Elim 3} \end{array} \right.$

Do zdania O możemy dodać dowolne zdanie, a w szczególności zdanie S, tak aby otrzymać alternatywę $S \vee O$:

5. $\left| \begin{array}{l} S \vee O \\ \vee\text{Wpr 4} \end{array} \right.$

Mamy teraz implikację $(S \vee O) \rightarrow B$ w wierszu 1 oraz jej poprzednik $S \vee O$ w wierszu 5, więc możemy zastosować regułę \rightarrow Elim:

6. $\left| \begin{array}{l} B \\ \rightarrow\text{Elim 1, 5} \end{array} \right.$

Mamy teraz implikację $B \rightarrow (P \vee W)$ w wierszu 2 oraz jej poprzednik B w wierszu 6, więc możemy zastosować regułę \rightarrow Elim:

7. $\left| \begin{array}{l} P \vee W \\ \rightarrow\text{Elim 2, 6} \end{array} \right.$

Przypomnijmy sobie, że chodzi nam o wyprowadzenie zdania P. Zdanie P jest pierwszym członem alternatywy $P \vee W$ z wiersza 7. Moglibyśmy wyprowadzić P za pomocą reguły MTP, gdybyśmy mieli negację drugiego członu tej alternatywy, czyli swobodnie stojące zdanie $\sim W$. Zdania tego nie mamy, możemy je jednak wyprowadzić z koniunkcji w wierszu 3:

8. $\left| \begin{array}{l} \sim W \\ \bullet\text{Elim 3} \end{array} \right.$
 9. $\left| \begin{array}{l} P \\ \text{MTP 7, 8} \end{array} \right.$

Jako ćwiczenie warto wykonać kroki, które wykonywaliśmy w tym dowodzie na symbolach, na zdaniach języka naturalnego. Ćwiczenie to powinno pokazać, że właśnie skonstruowany przez nas dowód nie odbiega od naturalnego toku myślenia, choć miejscami wyda się nam zbyt drobiazgowy:

1.	Jeżeli dostanę 17 lub 18 punktów na teście, to otrzymam ocenę bdb.	Zał.
2.	Otrzymam ocenę bdb tylko jeśli albo przyswoję sobie regułę wprowadzania implikacji albo wkuję wszystkie możliwe dowody na pamięć. <i>Parafraza:</i> Jeżeli otrzymałem ocenę bdb, to [znaczy, że] albo przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji albo wkulem wszystkie możliwe dowody.	Zał.
3.	Dostałem 18 punktów, a przecież nie wkulem wszystkich możliwych dowodów.	Zał.
4.		\bullet Elim 3
5.		\vee Wpr 4
6.		\rightarrow Elim 1, 5
7.		\rightarrow Elim 2, 6
8.		\bullet Elim 3
9.	Przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji.	MTP 7, 8

Ćwiczenia na dowodzenia z regułą MTP

MTP.II. W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go, oraz uzasadnij krok ostatni:

<p>(a)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim D$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$(C \vee D) \vee D$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">C</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$\sim D$	Zał.	2.	$(C \vee D) \vee D$	Zał.	3.			4.	C		<p>(b)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim A \bullet \sim B$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$B \vee D$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">D</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$\sim A \bullet \sim B$	Zał.	2.	$B \vee D$	Zał.	3.			4.	D	
1.	$\sim D$	Zał.																							
2.	$(C \vee D) \vee D$	Zał.																							
3.																									
4.	C																								
1.	$\sim A \bullet \sim B$	Zał.																							
2.	$B \vee D$	Zał.																							
3.																									
4.	D																								
<p>(c)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim B$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim B \rightarrow (A \vee B)$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">A</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$\sim B$	Zał.	2.	$\sim B \rightarrow (A \vee B)$	Zał.	3.			4.	A		<p>(d)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$(\sim B \vee \sim A) \equiv \sim \sim A$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim \sim A$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">$\sim B$</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$(\sim B \vee \sim A) \equiv \sim \sim A$	Zał.	2.	$\sim \sim A$	Zał.	3.			4.	$\sim B$	
1.	$\sim B$	Zał.																							
2.	$\sim B \rightarrow (A \vee B)$	Zał.																							
3.																									
4.	A																								
1.	$(\sim B \vee \sim A) \equiv \sim \sim A$	Zał.																							
2.	$\sim \sim A$	Zał.																							
3.																									
4.	$\sim B$																								

MTP.III. W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je, oraz uzasadnij krok ostatni:

<p>(a)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim D \equiv (A \vee D)$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim D \bullet B$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">A</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$\sim D \equiv (A \vee D)$	Zał.	2.	$\sim D \bullet B$	Zał.	3.			4.			5.	A		<p>(b)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$[\sim A \rightarrow (D \vee A)] \vee A$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim A$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">D</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$[\sim A \rightarrow (D \vee A)] \vee A$	Zał.	2.	$\sim A$	Zał.	3.			4.			5.	D	
1.	$\sim D \equiv (A \vee D)$	Zał.																													
2.	$\sim D \bullet B$	Zał.																													
3.																															
4.																															
5.	A																														
1.	$[\sim A \rightarrow (D \vee A)] \vee A$	Zał.																													
2.	$\sim A$	Zał.																													
3.																															
4.																															
5.	D																														
<p>(c)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$[(A \vee B) \vee C] \vee C$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim C \bullet \sim B$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">$A \vee B$</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$[(A \vee B) \vee C] \vee C$	Zał.	2.	$\sim C \bullet \sim B$	Zał.	3.			4.			5.	$A \vee B$		<p>(d)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="width: 65%; border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$B \vee (A \vee B)$</td> <td style="width: 30%; text-align: left;">Zał.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$\sim B$</td> <td>Zał.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;"></td> <td></td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; background-color: #cccccc; padding-right: 5px;">$D \vee A$</td> <td></td> </tr> </table>	1.	$B \vee (A \vee B)$	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.			4.			5.	$D \vee A$	
1.	$[(A \vee B) \vee C] \vee C$	Zał.																													
2.	$\sim C \bullet \sim B$	Zał.																													
3.																															
4.																															
5.	$A \vee B$																														
1.	$B \vee (A \vee B)$	Zał.																													
2.	$\sim B$	Zał.																													
3.																															
4.																															
5.	$D \vee A$																														

MTP.IV. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowieść, że: B

1.	C	Zał.
2.	$\sim A \equiv (\sim D \vee C)$	Zał.
3.	$(C \vee D) \rightarrow (A \vee B)$	Zał.

(b) Dowieść, że: $\sim B$

1.	$(D \vee A) \vee [A \vee (\sim B \vee A)]$	Zał.
2.	$\sim A \rightarrow \sim(D \vee A)$	Zał.
3.	$\sim A \bullet C$	Zał.

