

ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

10. DOWODZENIE I

- (1) Tomek nie jest zainteresowany Beatą; Staś natomiast bardzo chciałby się z nią umówić. (Zał.)
- (2) Beata umówi się ze Stasiem albo wtedy, gdy zostanie przewodniczącym samorządu albo, gdy się okaże, że Robert nie jest nią zainteresowany. (Zał.)
- (3) Staś zostanie przewodniczącym samorządu jeśli albo Cecylia nie umówi się z nim albo Paweł nie zostanie wybrany do samorządu. (Zał.)
- (4) Cecylia nie umówi się ze Stasiem chyba, że Beata zaprosi ją na imprezę. (Zał.)
- (5) Jeśli Tomek nie jest zainteresowany Beatą, to Beata nie zaprosi ani jego ani Cecylii na imprezę. (Zał.)
- (6) Beata nie zaprosi na imprezę ani Tomka ani Cecylii. (5), (1)
- (7) Cecylia nie umówi się ze Stasiem. (4), (6)
- (8) Staś zostanie przewodniczącym samorządu. (3), (7)
- (9) Beata umówi się ze Stasiem. (2), (8)

Przykłady dowodów omawiane w Temacie 7, ale nie przedstawione w nim w całości:

Przykład 5: Dowiedz, że $G \bullet [(A \rightarrow B) \rightarrow A]$

1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	Pr.
2.	$G \bullet H$	Pr.
3.	G	•Elim 2
4.	$G \bullet [(A \rightarrow B) \rightarrow A]$	•Wpr 3, 1

Przykład 6: Dowiedz, że $B \bullet C$

1.	$A \rightarrow B$	Pr.
2.	$A \bullet C$	Pr.
3.	C	•Elim 2
4.	A	•Elim 2
5.	B	\rightarrow Elim 1, 4
6.	$B \bullet C$	•Wpr 5, 3

Przykład 5: Dowiedz, że C

1.	$A \rightarrow B$	Pr.
2.	$(B \rightarrow C) \wedge A$	Pr.
3.	$B \rightarrow C$	•Elim 2
4.	A	•Elim 2
5.	B	\rightarrow Elim 1, 4
6.	C	\rightarrow Elim 3, 5

Przykład 6: Dowiedz, że C

1.	$A \bullet D$	Pr.
2.	$(B \rightarrow C) \bullet (A \rightarrow B)$	Pr.
3.	$B \rightarrow C$	•Elim 2
4.	$A \rightarrow B$	•Elim 2
5.	A	•Elim 1
6.	B	\rightarrow Elim 4, 5
7.	C	\rightarrow Elim 3, 6

Ćwiczenia na zastosowanie •Elim i •Wpr

•ElimWpr.I.

- (a)
- | | | |
|----|---------------|-----------|
| 1. | C | Pr. |
| 2. | D | Pr. |
| 3. | $C \bullet D$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $D \bullet C$ | •Wpr 2, 1 |
- (b)
- | | | |
|----|---------------|-----------|
| 1. | A | Pr. |
| 2. | B | Pr. |
| 3. | $A \bullet B$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $B \bullet A$ | •Wpr 2, 1 |
- (c)
- | | | |
|----|---------------------------|-----------|
| 1. | C | Pr. |
| 2. | $A \bullet B$ | Pr. |
| 3. | $C \bullet (A \bullet B)$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $(A \bullet B) \bullet C$ | •Wpr 2, 1 |
- (d)
- | | | |
|----|---|-----------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Pr. |
| 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. |
| 3. | $(A \rightarrow B) \bullet (C \rightarrow D)$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $(C \rightarrow D) \bullet (A \rightarrow B)$ | •Wpr 2, 1 |
- (e)
- | | | |
|----|-----------------------------|-----------|
| 1. | $\sim A$ | Pr. |
| 2. | $\sim\sim B$ | Pr. |
| 3. | $\sim A \bullet \sim\sim B$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $\sim\sim B \bullet \sim A$ | •Wpr 2, 1 |
- (f)
- | | | |
|----|-----------------------------|-----------|
| 1. | $C \vee A$ | Pr. |
| 2. | $\sim D$ | Pr. |
| 3. | $(C \vee A) \bullet \sim D$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $\sim D \bullet (C \vee A)$ | •Wpr 2, 1 |
- (g)
- | | | |
|----|--|-----------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \vee C$ | Pr. |
| 2. | D | Pr. |
| 3. | $[(A \rightarrow B) \vee C] \bullet D$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $D \bullet [(A \rightarrow B) \vee C]$ | •Wpr 2, 1 |
- (h)
- | | | |
|----|---------------------------|---------|
| 1. | $(A \bullet B) \bullet C$ | Pr. |
| 2. | $A \bullet B$ | Pr. |
| 3. | C | •Elim 1 |
| 4. | A | •Elim 2 |
- (i)
- | | | |
|----|--------------------|---------|
| 1. | $\sim A \bullet C$ | Pr. |
| 2. | $B \bullet \sim D$ | Pr. |
| 3. | $\sim A$ | •Elim 1 |
| 4. | C | •Elim 1 |
| 5. | B | •Elim 2 |
| 6. | $\sim D$ | •Elim 2 |
- (j)
- | | | |
|----|-------------------------------|---------|
| 1. | $(A \equiv B) \bullet C$ | Pr. |
| 2. | $(C \equiv D) \bullet \sim A$ | Pr. |
| 3. | C | •Elim 1 |
| 4. | $A \equiv B$ | •Elim 1 |
| 5. | $C \equiv D$ | •Elim 2 |
| 6. | $\sim A$ | •Elim 2 |
- (k)
- | | | |
|----|--|---------|
| 1. | $A \rightarrow (B \bullet C)$ | Pr. |
| 2. | $[(A \rightarrow D) \vee (A \rightarrow C)] \bullet B$ | Pr. |
| 3. | B | •Elim 2 |
- (l)
- | | | |
|----|---|---------|
| 1. | $(C \bullet A) \bullet B$ | Pr. |
| 2. | $[(B \equiv A) \vee (D \rightarrow A)] \bullet C$ | Pr. |
| 3. | C | •Elim 2 |

Ćwiczenia z dowodzenia (•Elim i •Wpr)

•ElimWpr.II.

(a)

1.	$C \bullet A$	Pr.
2.	B	Pr.
3.	A	•Elim 1
4.	$A \bullet B$	•Wpr 3, 2

(b)

1.	C	Pr.
2.	B	Pr.
3.	$B \bullet C$	•Wpr 2, 1
4.	$(B \bullet C) \bullet B$	•Wpr 3, 2

(c)

1.	$C \vee D$	Pr.
2.	B	Pr.
3.	$B \bullet (C \vee D)$	•Wpr 2, 1
4.	$[B \bullet (C \vee D)] \bullet B$	•Wpr 3, 2

(d)

1.	$\sim C$	Pr.
2.	$\sim D$	Pr.
3.	$\sim C \bullet \sim D$	•Wpr 1, 2
4.	$(\sim C \bullet \sim D) \bullet \sim C$	•Wpr 3, 1

(e)

1.	C	Pr.
2.	$A \bullet B$	Pr.
3.	A	•Elim 2
4.	$A \bullet C$	•Wpr 3, 1

(f)

1.	$C \bullet \sim D$	Pr.
2.	$A \rightarrow B$	Pr.
3.	$\sim D$	•Elim 1
4.	$\sim D \bullet (A \rightarrow B)$	•Wpr 3, 2

•ElimWpr.III.

(a)

1.	$A \bullet B$	Pr.
2.	$C \bullet D$	Pr.
3.	A	•Elim 1
4.	D	•Elim 2
5.	$A \bullet D$	•Wpr 3,4

(b)

1.	$(A \bullet B) \bullet C$	Pr.
2.	D	Pr.
3.	$A \bullet B$	•Elim 1
4.	A	•Elim 3
5.	$A \bullet D$	•Wpr 4,2

(c)

1.	$\sim C \bullet \sim D$	Pr.
2.	$A \rightarrow B$	Pr.
3.	$\sim D$	•Elim 1
4.	$\sim D \bullet (A \rightarrow B)$	•Wpr 3,2
5.	$[\sim D \bullet (A \rightarrow B)] \bullet \sim D$	•Wpr 4, 3

(d)

1.	$C \bullet \sim A$	Pr.
2.	D	Pr.
3.	$\sim A$	•Elim 1
4.	C	•Elim 1
5.	$\sim A \bullet C$	•Wpr 3,4

(e)

1.	$(A \bullet B) \bullet (C \bullet D)$	Pr.
2.	$\sim G$	Pr.
3.	$A \bullet B$	•Elim 1
4.	B	•Elim 3
5.	$\sim G \bullet B$	•Wpr 2,4

(f)

1.	A	Pr.
2.	B	Pr.
3.	$A \bullet B$	•Wpr 1,2
4.	$B \bullet A$	•Wpr 2,1
5.	$(A \bullet B) \bullet (B \bullet A)$	•Wpr 3,4

•ElimWpr.IV.

Uwaga! Każdy z poniższych dowodów można przeprowadzić na więcej niż jeden sposób. Poszczególne możliwe sposoby przeprowadzenia poniższych dowodów będą się różniły nie tyle ogólną strategią ich przeprowadzania – jak to może mieć miejsce w bardziej złożonych dowodach – lecz kolejnością poszczególnych kroków. Na przykład w dowodzie (a), swobodnie można zmienić kolejność np. kroków 3 i 4 – choć oczywiście nie można zmienić wzajemnej kolejności kroków 4 i 5.

(a) Dowiedz, że: $(A \bullet C) \bullet [C \bullet (C \bullet A)]$

1.	A	Zał.
2.	C	Zał.
3.	$A \bullet C$	•Wpr 1, 2
4.	$C \bullet A$	•Wpr 2, 1
5.	$C \bullet (C \bullet A)$	•Wpr 2,4
6.	$(A \bullet C) \bullet [C \bullet (C \bullet A)]$	•Wpr 3,5

(b) Dowiedz, że: $(B \bullet C) \bullet (A \equiv D)$

1.	$(A \bullet B) \bullet \sim C$	Zał
2.	$(C \bullet D) \bullet (A \equiv D)$	Zał.
3.	$A \bullet B$	•Elim. 1
4.	B	•Elim. 3
5.	$C \bullet D$	•Elim 2
6.	C	•Elim 5
7.	$B \bullet C$	•Wpr 4,6
8.	$A \equiv D$	•Elim 2
9.	$(B \bullet C) \bullet (A \equiv D)$	•Wpr 7,8

(c) Dowiedz, że: $[C \bullet (D \bullet (B \bullet A))] \bullet C$

1.	$A \bullet B$	Zał.
2.	$C \bullet D$	Zał.
3.	A	•Elim 1
4.	B	•Elim 1
5.	$B \bullet A$	•Wpr 4, 3
6.	C	•Elim 2
7.	D	•Elim 2
8.	$D \bullet (B \bullet A)$	•Wpr 7,5
9.	$C \bullet (D \bullet (B \bullet A))$	•Wpr 6, 8
10.	$[C \bullet (D \bullet (B \bullet A))] \bullet C$	•Wpr 9, 6

(d) Dowiedz, że: $[C \bullet (A \bullet C)] \bullet [(C \bullet A) \bullet C]$

1.	$C \bullet A$	Zał
2.	C	•Elim 1
3.	$(C \bullet A) \bullet C$	•Wpr 1, 2
4.	A	•Elim 1
5.	$A \bullet C$	•Wpr 4, 2
6.	$C \bullet (A \bullet C)$	•Wpr 2, 5
7.	$[C \bullet (A \bullet C)] \bullet [(C \bullet A) \bullet C]$	•Wpr 6, 3

Ćwiczenia na zastosowanie →Elim



1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	A	→Elim 1
3.	B	→Elim 1,2

Aby zastosować regułę →Elim trzeba mieć dwa swobodnie stojące zdania: implikację oraz jej poprzednik. Dopiero wówczas wolno zastosować →Elim. Błąd polegał tu na tym, że z implikacji wyprowadzono jej poprzednik. Nie jest to dozwolone przez →Elim i słusznie, gdyż zdarzają się prawdziwe implikacje o fałszywych poprzednik. Przykładem takiej implikacji jest np. „Jeżeli wygram 2mln złotych, to będę bogaty”. Zdanie to jest prawdziwe, nie wynika z niego jednak, że mówiący je wygrał 2mln złotych.

→Elim.I.

(a)

1.	$C \rightarrow D$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	D	→Elim 1, 2

(b)

1.	$\sim A \rightarrow D$	Zał.
2.	$\sim A$	Zał.
3.	D	→Elim 1, 2

(c)

1.	$B \rightarrow \sim D$	Zał.
2.	B	Zał.
3.	$\sim D$	→Elim 1, 2

(d)

1.	$(C \vee A) \rightarrow B$	Zał.
2.	$C \vee A$	Zał.
3.	B	→Elim 1, 2

(e)

1.	$A \rightarrow (D \bullet B)$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	$D \bullet B$	→Elim 1, 2

(f)

1.	$M \rightarrow \sim \sim N$	Zał.
2.	M	Zał.
3.	$\sim \sim N$	→Elim 1, 2

(g)

1.	$C \rightarrow D$	Zał.
2.	C	Zał.
3.	D	→Elim 1, 2

(h)

1.	$\sim C$	Zał.
2.	$\sim C \rightarrow (A \bullet B)$	Zał.
3.	$A \bullet B$	→Elim 1, 2

(i)

1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	Zał.
3.	$C \rightarrow D$	→Elim 1, 2

(j)

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee B)$	Zał.
3.	$A \vee B$	→Elim 1, 2

lub: $[(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow (C \rightarrow D)$

(k)

1.	$\sim A \rightarrow \sim C$	Zał.
2.	$\sim A \rightarrow D$	Zał.
3.	$\sim A$	Zał.
4.	$\sim C$	→Elim 1, 3

(l)

1.	$\sim D$	Zał.
2.	$(\sim D \rightarrow A) \bullet C$	Zał.
3.	$\sim D \rightarrow A$	Zał.
4.	A	→Elim 1, 3

lub: $[\sim A \rightarrow \sim C] \rightarrow \sim C$

(m)

1.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	$[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow B$	Zał.
4.	B	→Elim 1, 3

(n)

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$A \vee C$	Zał.
3.	A	Zał.
4.	B	→Elim 1, 3

Lub: $[[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow B] \rightarrow B$

(o)	1. $\sim D \rightarrow \sim C$	Zał.
	2. $A \equiv C$	Zał.
	3. $\sim D$	Zał.
	4. $\sim C$	\rightarrow Elim 1, 3

Lub: $(\sim D \rightarrow \sim C) \rightarrow \sim C$

(p)	1. $\sim(D \bullet A)$	Zał.
	2. $(\sim D \rightarrow A) \rightarrow C$	Zał.
	3. $\sim(D \bullet A) \rightarrow \sim C$	Zał.
	4. $\sim C$	\rightarrow Elim 1,3

(q)	1. $A \rightarrow B$	Zał.
	2. $B \rightarrow C$	Zał.
	3. A	Zał.
	4. B	\rightarrow Elim 1, 3

Lub: $(A \rightarrow B) \rightarrow B$

(r)	1. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$	Zał.
	2. $\sim(B \vee C)$	Zał.
	3. $A \rightarrow B$	Zał.
	4. C	\rightarrow Elim 1, 3

(s)	1. $\sim A \rightarrow \sim C$	Zał.
	2. $A \rightarrow (D \rightarrow (A \rightarrow C))$	Zał.
	3. A	Zał.
	4. $D \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow Elim 2,3

(t)	1. $\sim A \rightarrow \sim C$	Zał.
	2. $A \vee \sim D$	Zał.
	3. $(A \vee \sim D) \rightarrow (\sim D \bullet \sim B)$	Zał.
	4. $\sim D \bullet \sim B$	\rightarrow Elim 2,3

Lub: $[(A \vee \sim D) \rightarrow (\sim D \bullet \sim B)] \rightarrow (\sim D \bullet \sim B)$

Ćwiczenia m.in. na rozpoznawanie swobodnie stojących zdań

Uważnie przyjrzyj się następującym zastosowaniom wprowadzonych reguł inferencji. Uzasadnij kroki prawidłowe, skreślić nieprawidłowe.

- (a)
- | | | |
|----|----------------------------|-------------------------|
| 1. | $(C \vee A) \rightarrow D$ | Zał. |
| 2. | $C \vee A$ | Zał. |
| 3. | D | \rightarrow Elim 1, 2 |
- (b)
- | | | |
|----|----------------------------|------|
| 1. | $C \vee (A \rightarrow D)$ | Zał. |
| 2. | A | Zał. |
| 3. | D | XXXX |
- (c)
- | | | |
|----|-------------------|------|
| 1. | $C \rightarrow D$ | Pr. |
| 2. | $C \bullet A$ | Pr. |
| 3. | D | XXXX |
- (d)
- | | | |
|----|-------------------|------|
| 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Pr. |
| 3. | B | XXXX |
- (e)
- | | | |
|----|------------------------|-------------------------|
| 1. | $\sim C$ | Pr. |
| 2. | $\sim C \rightarrow D$ | Pr. |
| 3. | D | \rightarrow Elim 1, 2 |
- (f)
- | | | |
|----|-------------------------------|------|
| 1. | $(B \rightarrow C) \bullet D$ | Pr. |
| 2. | B | Pr. |
| 3. | C | XXXX |
- (g)
- | | | |
|----|---------------------------|------------------|
| 1. | $B \rightarrow C$ | Pr. |
| 2. | $A \bullet (B \bullet C)$ | Pr. |
| 3. | A | \bullet Elim 2 |
| 4. | C | XXXX |
- (h)
- | | | |
|----|-------------------|------|
| 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Pr. |
| 3. | B | XXXX |
| 4. | $B \bullet D$ | XXXX |
- (i)
- | | | |
|----|---------------------------|------|
| 1. | $(A \bullet B) \bullet C$ | Pr. |
| 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. |
| 3. | A | XXXX |
| 4. | B | XXXX |
- (j)
- | | | |
|----|-------------------|-------------------------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Pr. |
| 2. | $C \bullet A$ | Pr. |
| 3. | A | \bullet Elim 2 |
| 4. | B | \rightarrow Elim 1, 3 |
- (k)
- | | | |
|----|-------------------|------|
| 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. |
| 2. | A | XXXX |
- (l)
- | | | |
|----|---------------------------|------------------|
| 1. | $(A \bullet C) \bullet C$ | Pr. |
| 2. | C | \bullet Elim 1 |
- (m)
- | | | |
|----|------------------------|------|
| 1. | $(A \bullet B) \vee C$ | Pr. |
| 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. |
| 3. | A | XXXX |
| 4. | $B \vee C$ | XXXX |
- (n)
- | | | |
|----|------------------------|------------------|
| 1. | $\sim C \bullet B$ | Pr. |
| 2. | $\sim C \rightarrow D$ | Pr. |
| 3. | $\sim C$ | \bullet Elim 1 |
| 4. | B | \bullet Elim 1 |
- (o)
- | | | |
|----|------------------------------------|------|
| 1. | $\sim(A \bullet B)$ | Pr. |
| 2. | $\sim A \rightarrow (D \bullet C)$ | Pr. |
| 3. | $\sim A$ | XXXX |
| 4. | $D \bullet C$ | XXXX |
- (p)
- | | | |
|----|---------------------------------|------------------|
| 1. | $\sim\sim C \bullet \sim\sim A$ | Pr. |
| 2. | $C \rightarrow (D \vee B)$ | Pr. |
| 3. | $\sim\sim C$ | \bullet Elim 1 |
| 4. | $D \vee B$ | XXXX |
- (q)
- | | | |
|----|--|------|
| 1. | $(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Pr. |
| 2. | D | Pr. |
| 3. | $A \rightarrow C$ | XXXX |
| 4. | A | XXXX |
- (r)
- | | | |
|----|--|------|
| 1. | $(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Pr. |
| 2. | $(A \bullet B) \vee D$ | Pr. |
| 3. | $A \rightarrow C$ | XXXX |
| 4. | C | XXXX |

Ćwiczenia z dowodzenia (\rightarrow Elim)

\rightarrow Elim.II.

- (a)
- | | | |
|----|-------------------------------|------------------------|
| 1. | $(B \rightarrow A) \bullet C$ | Zał. |
| 2. | B | Zał. |
| 3. | $B \rightarrow A$ | \bullet Elim 1 |
| 4. | A | \rightarrow Elim 2,3 |
- (b)
- | | | |
|----|-------------------------------|------------------------|
| 1. | $(C \rightarrow B) \bullet A$ | Zał. |
| 2. | C | Zał. |
| 3. | $C \rightarrow B$ | \bullet Elim 1 |
| 4. | B | \rightarrow Elim 2,3 |
- (c)
- | | | |
|----|-------------------|------------------------|
| 1. | $B \rightarrow C$ | Zał. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 3. | A | Zał. |
| 4. | B | \rightarrow Elim 2,3 |
| 5. | C | \rightarrow Elim 1,4 |
- (d)
- | | | |
|----|------------------------|------------------------|
| 1. | $B \rightarrow \sim C$ | Zał. |
| 2. | $\sim A \rightarrow B$ | Zał. |
| 3. | $\sim A$ | Zał. |
| 4. | B | \rightarrow Elim 2,3 |
| 5. | $\sim C$ | \rightarrow Elim 1,4 |
- (e)
- | | | |
|----|-----------------------------|------------------------|
| 1. | $\sim A \rightarrow \sim B$ | Zał. |
| 2. | $\sim B \rightarrow \sim C$ | Zał. |
| 3. | $\sim A$ | Zał. |
| 4. | $\sim B$ | \rightarrow Elim 1,3 |
| 5. | $\sim C$ | \rightarrow Elim 2,4 |
- (f)
- | | | |
|----|----------------------------|------------------------|
| 1. | $A \rightarrow (B \vee D)$ | Zał. |
| 2. | $(B \vee D) \rightarrow C$ | Zał. |
| 3. | A | Zał. |
| 4. | $B \vee D$ | \rightarrow Elim 1,3 |
| 5. | C | \rightarrow Elim 2,4 |
- (g)
- | | | |
|----|-------------------------------|-------------------------|
| 1. | $(A \bullet B) \rightarrow C$ | Zał. |
| 2. | A | Zał. |
| 3. | B | Zał. |
| 4. | $A \bullet B$ | \bullet Wpr. 2, 3 |
| 5. | C | \rightarrow Elim 1, 4 |
- (h)
- | | | |
|----|---|-------------------------|
| 1. | $(D \vee A) \rightarrow \sim C$ | Zał. |
| 2. | $(\sim D \bullet A) \rightarrow (D \vee A)$ | Zał. |
| 3. | $\sim D \bullet A$ | Zał. |
| 4. | $D \vee A$ | \rightarrow Elim 2, 3 |
| 5. | $\sim C$ | \rightarrow Elim 1, 4 |
- (i)
- | | | |
|----|-------------------------------|-------------------------|
| 1. | $(C \bullet A) \rightarrow D$ | Zał. |
| 2. | $D \bullet (C \bullet A)$ | Zał. |
| 3. | $C \bullet A$ | \bullet Elim 2 |
| 4. | D | \rightarrow Elim 1, 3 |
- (j)
- | | | |
|----|-----------------------------------|------------------------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ | Zał. |
| 2. | $(A \rightarrow B) \bullet D$ | Zał. |
| 3. | $A \rightarrow B$ | \bullet Elim. 2 |
| 4. | C | \rightarrow Elim 1,3 |
- (k)
- | | | |
|----|---|--------------------------|
| 1. | $A \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow D]$ | Zał. |
| 2. | A | Zał. |
| 3. | $B \rightarrow C$ | Zał. |
| 4. | $(B \rightarrow C) \rightarrow D$ | \rightarrow Elim. 1, 2 |
| 5. | D | \rightarrow Elim. 3, 4 |
- (l)
- | | | |
|----|---|------------------------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ | Zał. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 3. | A | Zał. |
| 4. | $A \rightarrow C$ | \rightarrow Elim 1,2 |
| 5. | C | \rightarrow Elim 3,4 |

→Elim.III.

(a)			
1.	$(A \rightarrow B) \bullet C$	Zał.	
2.	$C \bullet A$	Zał.	
3.	$A \rightarrow B$	•Elim 1	
4.	A	•Elim 2	
5.	B	→Elim 3,4	
(b)			
1.	$A \rightarrow B$	Zał.	
2.	$C \bullet (A \bullet D)$	Zał.	
3.	$A \bullet D$	•Elim 2	
4.	A	•Elim 3	
5.	B	→Elim 1,4	
(c)			
1.	$B \rightarrow C$	Zał.	
2.	$C \rightarrow D$	Zał.	
3.	$A \bullet B$	Zał.	
4.	B	•Elim 3	
5.	C	→Elim 1,4	
6.	D	→Elim 2,5	
(d)			
1.	$B \rightarrow C$	Zał.	
2.	$A \rightarrow B$	Zał.	
3.	A	Zał.	
4.	B	→Elim 2,3	
5.	C	→Elim 1,4	
6.	$B \bullet C$	•Wpr 4,5	
(e)			
1.	$C \rightarrow A$	Zał.	
2.	$(A \rightarrow C) \bullet C$	Zał.	
3.	$A \rightarrow B$	Zał.	
4.	C	•Elim 2	
5.	A	→Elim 1,4	
6.	B	→Elim 3,5	
(f)			
1.	$(\sim A \bullet \sim B) \rightarrow (\sim B \rightarrow C)$	Zał.	
2.	$\sim B$	Zał.	
3.	$\sim A$	Zał.	
4.	$\sim A \bullet \sim B$	•Wpr 3,2	
5.	$\sim B \rightarrow C$	→Elim 1,4	
6.	C	→Elim 2,5	
(g)			
1.	$A \rightarrow [A \rightarrow (A \rightarrow C)]$	Zał.	
2.	A	Zał.	
3.	$A \rightarrow (A \rightarrow C)$	→Elim 1, 2	
4.	$A \rightarrow C$	→Elim 2,3	
5.	C	→Elim 2,4	
(h)			
1.	$(A \bullet B) \rightarrow (C \bullet D)$	Zał.	
2.	$(A \bullet B) \bullet G$	Zał.	
3.	$A \bullet B$	•Elim 2	
4.	$C \bullet D$	→Elim. 1, 3	
5.	D	•Elim. 4	
(i)			
1.	$(K \rightarrow L) \rightarrow (K \rightarrow M)$	Zał.	
2.	$K \rightarrow L$	Zał.	
3.	K	Zał.	
4.	$K \rightarrow M$	→Elim 1,2	
5.	M	→Elim 3,4	
6.	$K \bullet M$	•Wpr 3, 5	
(j)			
1.	$K \rightarrow [(L \rightarrow M) \rightarrow N]$	Zał.	
2.	K	Zał.	
3.	$L \rightarrow M$	Zał.	
4.	$(L \rightarrow M) \rightarrow N$	→Elim. 1, 2	
5.	N	→Elim. 3, 4	
6.	$(L \rightarrow M) \bullet N$	•Wpr. 3, 5	

•ElimWpr.IV.

(a) Dowiedz, że: C

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	Zał.
3.	A	Zał.
4.	B	\rightarrow Elim 2,3
5.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1,3
6.	C	\rightarrow Elim 4,5

(b) Dowiedz, że: A

1.	$(\sim C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	Zał.
2.	$\sim C$	Zał.
3.	$\sim C \rightarrow B$	Zał.
4.	B	\rightarrow Elim 2,3
5.	$B \rightarrow A$	\rightarrow Elim 1,3
6.	A	\rightarrow Elim 4,5

(c) Dowiedz, że: C

1.	$B \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow (B \bullet D)$	Zał.
3.	A	Zał.
4.	$B \bullet D$	\rightarrow Elim 2,3
5.	B	•Elim 4
6.	$B \rightarrow C$	\rightarrow Elim 1,5
7.	C	\rightarrow Elim 5,6

(d) Dowiedz, że: $A \bullet C$

1.	$(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	$A \rightarrow B$	•Elim 1
4.	B	\rightarrow Elim 2,3
5.	$B \rightarrow C$	•Elim 1
6.	C	\rightarrow Elim 4,5
7.	$A \bullet C$	•Wpr 2, 6

(e) Dowiedz, że: $B \bullet D$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$C \rightarrow D$	Zał.
3.	$A \bullet C$	Zał.
4.	A	•Elim 3
5.	B	\rightarrow Elim 1,4
6.	C	•Elim 3
7.	D	\rightarrow Elim 2,6
8.	$B \bullet D$	•Wpr 5,7

(f) Dowiedz, że: $\sim D$

1.	$(A \bullet C) \rightarrow (B \vee C)$	Zał.
2.	$(B \vee C) \rightarrow \sim D$	Zał.
3.	$(A \bullet B) \bullet C$	Zał.
4.	$A \bullet B$	•Elim 3
5.	C	•Elim 3
6.	A	•Elim 4
7.	$A \bullet C$	•Wpr 6,5
8.	$B \vee C$	\rightarrow Elim 1, 7
9.	$\sim D$	\rightarrow Elim 2,8

(g) Dowiedz, że: D

1.	$(B \bullet A) \rightarrow D$	Zał.
2.	$(A \bullet C) \bullet B$	Zał.
3.	B	•Elim 2
4.	$A \bullet C$	•Elim 2
5.	A	•Elim 4
6.	$B \bullet A$	•Wpr 3,5
7.	D	\rightarrow Elim 1,6

(h) Dowiedz, że: $[(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow C)] \bullet (A \rightarrow B)$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$B \rightarrow C$	Zał.
3.	$(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow C)$	•Wpr 1,2
4.	$[(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow C)] \bullet (A \rightarrow B)$	•Wpr 3,1

(i) Dowiedz, że: A

1.	$B \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]$	Zał.
2.	B	Zał.
3.	$B \rightarrow (B \rightarrow A)$	\rightarrow Elim 1, 2
4.	$B \rightarrow A$	\rightarrow Elim 2,3
5.	A	\rightarrow Elim 2,4

(j) Dowiedz, że: D

1.	$(B \vee C) \rightarrow (A \bullet D)$	Zał.
2.	$(B \vee C) \bullet A$	Zał.
3.	$B \vee C$	•Elim 2
4.	$A \bullet D$	\rightarrow Elim. 1, 3
5.	D	•Elim. 4

(k) Dowiedz, że: $(C \bullet D) \bullet (A \vee B)$

1.	$(A \vee B) \rightarrow C$	Zał.
2.	$D \rightarrow (A \vee B)$	Zał.
3.	D	Zał.
<hr/>		
4.	$A \vee B$	\rightarrow Elim 2,3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	$C \bullet D$	\bullet Wpr 3, 5
7.	$(C \bullet D) \bullet (A \vee B)$	\bullet Wpr 4, 6

(l) Dowiedz, że: $B \bullet C$

1.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Zał.
2.	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	Zał.
3.	A	Zał.
<hr/>		
4.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Elim 1,3
5.	C	\rightarrow Elim 2,4
6.	B	\rightarrow Elim 3,4
7.	$B \bullet C$	\bullet Wpr 5, 6

(m) Dowiedz, że: $(A \bullet B) \bullet C$

1.	$(A \vee B) \rightarrow C$	Zał.
2.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Zał.
3.	$(A \vee B) \bullet A$	Zał.
<hr/>		
4.	$A \vee B$	\bullet Elim 3
5.	C	\rightarrow Elim 1,4
6.	A	\bullet Elim 3
7.	$A \rightarrow B$	\rightarrow Elim 2, 6
8.	B	\rightarrow Elim 6,7
9.	$A \bullet B$	\bullet Wpr 6, 8
10.	$(A \bullet B) \bullet C$	\bullet Wpr 9,5

(n) Dowiedz, że: $M \bullet N$

1.	$(A \bullet B) \rightarrow [(L \rightarrow M) \rightarrow N]$	Zał.
2.	$A \bullet (L \rightarrow M)$	Zał.
3.	$L \bullet B$	Zał.
<hr/>		
4.	A	\bullet Elim 2
5.	B	\bullet Elim 3
6.	$A \bullet B$	\bullet Wpr. 4, 5
7.	$(L \rightarrow M) \rightarrow N$	\rightarrow Elim. 1, 6
8.	$L \rightarrow M$	\bullet Elim 2
9.	N	\rightarrow Elim 7,8
10.	L	\bullet Elim 3
11.	M	\rightarrow Elim 8,10
12.	$M \bullet N$	\bullet Wpr 9, 11