

10. DOWODZENIE I: REGUŁY • WPR, • ELIM, →ELIM

Wprowadzenie

Żaden z tematów w podstawowym kursie logiki nie jest ani tak trudny jak dowodzenie, ani tak użyteczny jak dowodzenie w systemie dedukcji naturalnej. Jednocześnie – jak w żadnym dotąd temacie – jesteście zdani wyłącznie na siebie i na *Samouczek*, a przede wszystkim na ćwiczenia w nim zawarte. Musicie wykonać je *wszystkie*, w dodatku musicie je wykonywać w momencie, w którym są podane. Nie wolno pofolgować przyzwyczajeniom z czytania innych rozdziałów – najpierw przeczytać całość, ogarnąć ją myślowo, a potem przejść przez temat jeszcze raz. Po pierwsze, zanudzić się czytając całość, a po drugie wyda się Wam to takie proste, że sięgnięcie po *Samouczek* tuż przed egzaminem, po to tylko by egzamin oblać po nieprzespanej, skąpanej zimnym potem, nocy. Z dowodzeniem nie mają kłopotów wyłącznie umysły formalne, a tych jest bardzo mało. Większość studentów o średniej bdb ma kłopoty z dowodzeniem. Do nauki dowodzenia należy podchodzić z pogodą ducha, z wiarą w swoje siły – ale jednocześnie i w moje ostrzeżenia – oraz z zapałem do systematycznej pracy. Należy ćwiczyć trochę codziennie.

Na umiejętność dowodzenia składają się dwie umiejętności:

- (a) umiejętność stosowania formalnych reguł wnioskowania
- (b) umiejętność myślenia strategicznego

Paradoksalnie źródłem trudności w nauczaniu się dowodzenia jest to co – wydawać by się mogło – najprostsze, a mianowicie umiejętność stosowania reguł inferencji. Komputery z łatwością bezbłędnie stosują reguły inferencji, a z dowodzeniem mają kłopoty, bo trudniej nauczyć je myślenia strategicznego. Ludzie natomiast świetnie sobie radzą z myśleniem strategicznym, trudno się jest im natomiast zmobilizować do sztywnego stosowania reguł wnioskowania. Gdyby nie ta trudność, to można byłoby systemy dowodzenia w dedukcji naturalnej sprzedawać tak, jak sprzedaje się gry strategiczne!

Jednym z zadań *Samouczka* jest pomóc Wam w opanowaniu głównie tej pierwszej umiejętności. Dla każdej wprowadzanej reguły inferencji będziecie musieli wykonać ćwiczenia, które pozwolą Wam wykształcić sobie „mentalny schemat” takiej reguły. Bez wykształcenia takiego schematu nie nauczycie się dowodzić. Aby umieć przeprowadzać dowody trzeba dosłownie widzieć struktury logiczne i legalne (tj. dozwolone przez reguły) ruchy.

Cele

- Umiejętność zastosowania reguł •Wpr, •Elim, →Elim
- Umiejętność przeprowadzania prostych dowodów z użyciem reguł •Wpr, •Elim, →Elim

10.1. Dowodzenie jako uporządkowane rozumowanie

Dowodzenie nie jest niczym innym niż rozumowaniem, a dowód jest zapisem kolejnych kroków myślowych. Zobaczmy to na przykładach.

Przykład 1

Jeżeli Ania zda logikę, to jej chłopak Tomek zaprosi ją albo do greckiej albo do francuskiej restauracji. Tomek zapowiedział, że nie zaprosi jej do francuskiej restauracji, jeśli będzie oglądała dużo TV. Jeśli Ania będzie dobrze przygotowana, to zda logikę, a będzie dobrze przygotowana – jeśli będzie się dużo uczyć. Ania dużo się uczyła, ale też oglądała dużo TV.

Czy Tomek zaprosi Anię do restauracji? A jeśli tak, to do której? – Oczywiście, do greckiej. Jak do tej odpowiedzi dochodzimy można zrekonstruować w formie „dowodopodobnej”:

- | | |
|---|----------|
| (1) Jeżeli Ania zda logikę, to jej chłopak Tomek zaprosi ją albo do greckiej albo do francuskiej restauracji. | (Zał.) |
| (2) Tomek nie zaprosi Ani do francuskiej restauracji, jeśli Ania oglądała dużo TV. | (Zał.) |
| (3) Ania zda logikę – jeśli będzie dobrze przygotowana, a będzie dobrze przygotowana – jeśli będzie się dużo uczyć. | (Zał.) |
| (4) Ania dużo się uczyła, ale też oglądała dużo TV. | (Zał.) |
| (5) Ania będzie dobrze przygotowana. | (3), (4) |
| (6) Ania zda logikę. | (3), (5) |
| (7) Tomek zaprosi Anię albo do greckiej albo do francuskiej restauracji. | (1), (6) |
| (8) Tomek nie zaprosi Ani do restauracji francuskiej. | (2), (4) |
| (9) Tomek zaprosi Anię do restauracji greckiej. | (7), (8) |

‘(Zał.)’ jest skrótem od ‘Założenie’ i zaznacza te zdania, które są nam dane, które – przyjmujemy – są prawdziwe. W powyższej historyjce dane są nam cztery założenia, z których potem kolejno wyciągamy wnioski (tzw. wnioski pośrednie: kroki (5)-(7)) aż do wniosku ostatecznego (8). Pierwszy wniosek pośredni (5), że Ania będzie dobrze przygotowana, wyciągamy odwołując się do przesłanki (4), z której wynika, że Ania dużo się uczyła, oraz przesłanki (3), z której wynika, że jeżeli Ania się dużo uczyła, to będzie dobrze przygotowana. Kolejny wniosek (6), że Ania zda logikę, wynika z tego, że (5) Ania będzie dobrze przygotowana, oraz z tego, co wynika z przesłanki (3), a mianowicie, że jeżeli Ania będzie dobrze przygotowana, to zda logikę. Wiemy już, że (6) Ania zda logikę, oraz że (1) jeżeli zda logikę, to jej chłopak Tomek zaprosi ją albo do greckiej albo do francuskiej restauracji, więc możemy wyciągnąć kolejny wniosek pośredni, a mianowicie (7), że Tomek zaprosi ją albo do greckiej albo do francuskiej restauracji. Skądinąd wiemy, że (8) Tomek nie zaprosi Ani do restauracji francuskiej, ponieważ zgodnie z przesłanką (2) Tomek nie zaprosi Ani do francuskiej restauracji, jeśli Ania oglądała dużo TV, a zgodnie z przesłanką (4) Ania oglądała dużo TV. Skoro więc wiemy, że (7) Tomek zaprosi Anię albo do greckiej albo do francuskiej restauracji oraz że (8) Tomek nie zaprosi Ani do restauracji francuskiej, to wiemy w takim razie, że (9) zaprosi ją do restauracji greckiej.

Cały tok rozumowania jest «logiczny». Zastosowany przez nas wyżej zapis ma również zastępować przeprowadzony właśnie *explicitie* tok rozumowania. Temu właśnie służą uzasadnienia każdego kroku, które odwołują do wierszy dowodu, z których trzeba skorzystać w przeprowadzaniu danego kroku.

Przykład 2

Ujęcie rozumowania w formę „dowodopodobną” nie tylko pomaga je zrekonstruować i unaocznic, lecz czasem pomaga nam w samym rozumowaniu. Dzieje się tak często wówczas, gdy mamy do czynienia z tekstem powikłanym, a w szczególności niezbyt logicznie ułożonym, jak np. ten:

Tomek nie jest zainteresowany Beatą; Staś natomiast bardzo chciałby się z nią umówić. Beata umówi się ze Stasiem albo wtedy, gdy zostanie przewodniczącym samorządu, albo gdy się okaże, że Robert nie jest nią zainteresowany. Staś zostanie przewodniczącym samorządu, jeśli albo Cecylia nie umówi się z nim, albo Paweł nie zostanie wybrany do samorządu. Cecylia nie umówi się ze Stasiem, chyba że Beata zaprosi ją na imprezę. Jeśli Tomek nie jest zainteresowany Beatą, to Beata nie zaprosi ani jego ani Cecylii na imprezę.

Czy Beata umówi się ze Stasiem? Zrekonstruujmy:

- (1) Tomek nie jest zainteresowany Beatą; Staś natomiast bardzo chciałby się z nią umówić. (Zał.)
- (2) Beata umówi się ze Stasiem albo wtedy, gdy zostanie przewodniczącym samorządu, albo gdy się okaże, że Robert nie jest nią zainteresowany. (Zał.)
- (3) Staś zostanie przewodniczącym samorządu, jeśli albo Cecylia nie umówi się z nim, albo Paweł nie zostanie wybrany do samorządu. (Zał.)
- (4) Cecylia nie umówi się ze Stasiem, chyba że Beata zaprosi ją na imprezę. (Zał.)
- (5) Jeśli Tomek nie jest zainteresowany Beatą, to Beata nie zaprosi ani jego ani Cecylii na imprezę. (Zał.)
- (6) _____
- (7) _____
- (8) _____
- (9) _____
- (10) _____
- (11) _____

Spróbujcie samodzielnie wyprowadzić wniosek, nie zapominając o „uzasadnieniach”, tj. o zaznaczeniu, z którego wiersza korzystaliście. Odpowiedzi znajdziecie w *Rozwiązaniach*.

Każdy krok rozumowania w dowodzie jest albo założeniem, albo jest *uzasadniony* jako wniosek wynikający z wcześniejszych kroków w dowodzie. Różnica między powyższymi strukturami „dowodopodobnymi” a dowodami formalnymi polega na tym, że w dowodach formalnych ściśle określa się, które kroki są dozwolone za pomocą tzw. *reguł wnioskowania* lub *inferencji*. Reguły te są regułami logicznie prawidłowego wnioskowania – ich zastosowanie gwarantuje, że nigdy nie wyprowadzimy fałszywego wniosku z prawdziwych przesłanek. Cała trudność w dowodzeniu polega na tym, aby się wdrożyć w konsekwentne stosowanie tych reguł.

Czy wiesz, że . . .

Istnieją dwa rodzaje systemów dowodzenia: systemy aksjomatyczne i systemy dedukcji naturalnej.

Systemy aksjomatyczne wyróżniają pewne tautologie (aksjomaty), z których starają się wyprowadzić resztę tautologii za pomocą minimalnej ilości reguł. Aksjomatyzacja logiki zdań zaproponowana przez Jana Łukasiewicza np. wyróżnia trzy aksjomaty:

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \\ (\alpha &\rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \\ (\sim\alpha &\rightarrow \sim\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

Pod zmienne α , β , γ można podstawiać dowolne (i dowolnie złożone) schematy zdaniowe na mocy tzw. reguły podstawiania. Jediną dodatkową regułą jest tzw. reguła odrywania, czyni *modus ponens* (niżej omawiana jako reguła \rightarrow Elim). Systemy aksjomatyczne są niezwykle eleganckie i ważne z logicznego punktu widzenia. W praktyce jednak są bardzo trudne do stosowania.

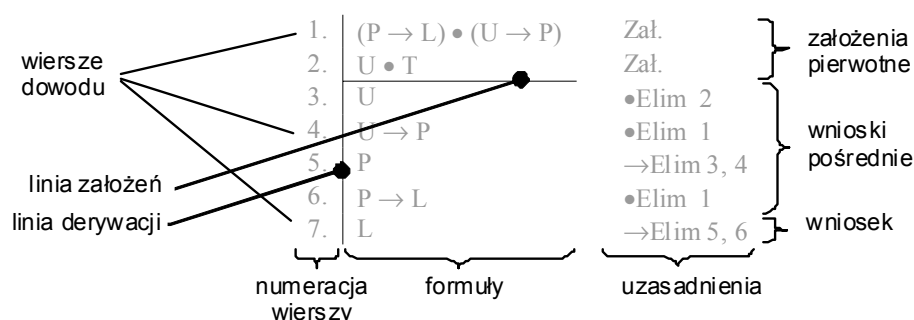
Właśnie dlatego powstały systemy dedukcji naturalnej. Jeden z twórców systemów dedukcji naturalnej, Stanisław Jaśkowski, rozpoczął swe badania w odpowiedzi na pytanie postawione przez swego nauczyciela, Jana Łukasiewicza, który zwrócił uwagę, że systemy aksjomatyczne nie oddają rzeczywistej praktyki dowodzenia przez matematyków. Systemy dedukcji naturalnej nie wprowadzają żadnych aksjomatów, lecz jedynie reguły dowodzenia, które można wykorzystać również do dowodzenia tautologii. Pierwsze systemy dedukcji naturalnej zostały niezależnie odkryte przez Stanisława Jaśkowskiego właśnie oraz Gerharda Gentzena, którzy opublikowali swoje pierwsze prace w tym zakresie w 1934 roku. Od tego czasu powstało bardzo wiele systemów dedukcji naturalnej. Różnią się one przyjmowanymi regułami, a także metodami (w tym graficznymi) reprezentacji dowodów.

10.2. System dedukcji naturalnej SD (Bergman, Moore, Nelson, 1998)

Przedstawiany system dedukcji naturalnej SD pochodzi z podręcznika *The Logic Book* napisanego przez Bergman, Moore i Nelson. Jest to jeden z systemów dedukcji naturalnej „w stylu Fitcha”, czyli opierającego się na graficznej reprezentacji dowodów. Graficzna forma reprezentacji dowodów nie jest jednak oryginalnym pomysłem Fitcha. Była to pierwsza metoda reprezentacji dowodów przyjęta przez Jaśkowskiego, który stosował nie tyle pionowe kreski, co ramki, w które ujmowane były derywacji i subderywacje.

10.2.1. Dowód w systemie SD

Dowód w systemie SD może wyglądać np. jak na Rys. 1:



Rys. 1.

System SD stosuje graficzny zapis dowodzenia, który bardzo ułatwia stosowanie tzw. konstrukcyjnych reguł inferencji, które poznamy później. Na razie zapis graficzny sprowadza się do dwóch elementów:

linii dowodu (linia dowodowa, linia derywacyjna), która jest pionową kreską zaznaczającą tok rozumowania składający się na dany dowód – ważne jest to, aby zarówno przesłanki (założenia pierwotne, wiersze 1-4 na Rys. 1), jak i wniosek (ostatni wiersz dowodu, wiersz 9 na Rys. 1) znajdowały się przy tej samej linii dowodu;

linii założeń, która jest poziomą kreską odgradzającą założenia od wniosków z nich wyciąganych.

Zapis dowodu składa się z ciągu następujących po sobie, kolejno numerowanych wierszy. W każdym wierszu występują trzy elementy: kolejny numer, formuła wyprowadzana w danym kroku, oraz uzasadnienie tejże.

Dowodem w systemie SD jest skończony ciąg formuł (logiki zdań), w którym każda formuła jest albo założeniem (pierwotnym lub dodatkowym) albo jest uzasadniona przez jedną z reguł systemu SD.

Formułę α **można udowodnić** w systemie SD w oparciu o założenia $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, zawsze i tylko wtedy, gdy w systemie SD istnieje dowód o założeniach pierwotnych $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, a α występuje w zasięgu tych założeń (tj. przy głównej linii dowodowej).

O innych niż główne linie dowodowych mówić będziemy w Temacie 11. Na razie do czynienia mamy tylko z głównymi liniami dowodowymi.

10.2.2. Pierwotne reguły inferencyjne systemu SD

W systemie SD występuje jednaście reguł inferencji – po dwie reguły dla każdego spójnika logicznego (reguły wprowadzania i eliminacji) oraz reguła powtarzania R:

- Reguły dla koniunkcji: •Wpr, •Elim
- Reguły dla implikacji: →Wpr, →Elim
- Reguły dla równoważności: ≡Wpr, ≡Elim
- Reguły dla alternatywy: ∨Wpr, ∨Elim
- Reguły dla negacji: ~Wpr, ~Elim
- Reguła reiteracji: R

10.3. Reguła •Elim (Reguła opuszczania koniunkcji, Symplicifikacja)

Jeżeli we wcześniejszym wierszu dowodu występuje (swobodnie) koniunkcja $p \bullet r$, to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje jeden z członów tej koniunkcji.

$$\begin{array}{l|l} i. & p \bullet r \\ \triangleright & p \end{array} \quad \bullet\text{Elim } i$$

$$\begin{array}{l|l} i. & p \bullet r \\ \triangleright & r \end{array} \quad \bullet\text{Elim } i$$

Intuicje

Reguła •Elim jest jedną z najbardziej intuicyjnych reguł. O jej intuicyjności można się przekonać przyglądając się np. jej zastosowaniu w języku naturalnym. Oceńcie, czy poniższe rozumowania są prawidłowe:

Alicja jest piękna, ale i wredna.

Alicja jest wredna.

Zarówno teoria Freuda jak i teoria Junga jest fałszywa.

Teoria Freuda jest fałszywa.

Oczywiście oba rozumowania są logicznie prawidłowe. To nie znaczy – przypominam – że wniosek jest prawdziwy, lecz tylko, że wniosek nie może być fałszywy, jeżeli przesłanki są prawdziwe. Oba są też przykładami zastosowania reguły •Elim. Zwróćcie uwagę, że pierwsze rozumowanie – o Alicji – jest przykładem zastosowania drugiej wersji •Elim (tej z prawej strony ramki), a drugie rozumowanie – o Freudzie – jest przykładem zastosowania pierwszej wersji reguły •Elim.


Można w prosty sposób wykazać prawidłowość rozumowania opartego na regule •Elim odwołując się do naszej wiedzy na temat wartości logicznych koniunkcji. Jeżeli wiemy, że koniunkcja jest prawdziwa, to wiemy również, że dowolny jej człon jest prawdziwy.

Stosowanie reguły •Elim


Regułę •Elim można zastosować do koniunkcji zawsze i tylko na *dwa sposoby* – można wyprowadzić albo jej pierwszy człon, albo jej drugi człon, np:

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.
2.	A	•Elim 1
3.	$B \bullet C$	•Elim 1

Nie wolno natomiast wyprowadzić „podczłonów”, tj. członów członów:



1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.
2.	B	•Elim 1
3.	C	•Elim 1



1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	•Elim 1
3.	$A \rightarrow C$	•Elim 1

•Elim pozwala nam na wyprowadzenie członu danej koniunkcji, ale $A \bullet (B \bullet C)$ ma tylko dwa człony: A oraz $(B \bullet C)$ – ani B ani C nie są zatem członami koniunkcji $A \bullet (B \bullet C)$. Oczywiście zdania B i C są członami drugiego członu tej koniunkcji. Zdania te możemy zatem wyprowadzić lecz tylko przez podwójne zastosowanie •Elim:

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.	Należy zwrócić uwagę, że kroki 3 i 4 są wynikiem zastosowania reguły
2.	$B \bullet C$	•Elim 1	•Elim do wiersza 2, a nie do wiersza 1.
3.	B	•Elim 2	
4.	C	•Elim 2	

10.4. Reguła •Wpr (Reguła wprowadzania koniunkcji, Koniunkcja)

Jeżeli w pewnym wcześniejszym wierszu dowodu występuje (swobodnie) zdanie p oraz w innym wcześniejszym wierszu dowodu występuje (swobodnie) zdanie r , to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje ich koniunkcja $p \bullet r$.

$i.$	p	
$j.$	r	
➤	$p \bullet r$	•Wpr i, j

Intuicje

Reguła •Wpr jest również niezwykle intuicyjna – jeżeli wiemy, że dwa zdania są prawdziwe, to wiemy również, że ich koniunkcja jest prawdziwa. O jej intuicyjności można się przekonać przyglądając się np. jej zastosowaniu w języku naturalnym:

Ala dostała kota.
Ala dostała psa.

Ala dostała psa i kota.

Jeśli jutro będzie padać deszcz, to pójdę do kina.
Jeśli jutro będzie padać śnieg, to pójdę na sanki.

Jeśli jutro będzie padać deszcz, to pójdę do kina, a jeśli będzie padać śnieg, to pójdę na sanki.

Reguła •Wpr z pewnością zachowuje prawdziwość przesłanek: jeżeli obie przesłanki są prawdziwe, to ich koniunkcja *musi* być prawdziwa.


Stosowanie reguły •Wpr

Regułę •Wpr można zastosować do każdych dwóch swobodnie stojących zdań – zawsze i tylko na *dwa sposoby*:

- | | | |
|----|------------------------|----------------------------|
| 1. | $A \vee B$ | Zał. |
| 2. | C | Zał. |
| 3. | $(A \vee B) \bullet C$ | •Wpr 1, 2 |
| 4. | $C \bullet (A \vee B)$ | •Wpr 2, 1 (lub: •Wpr 1, 2) |

Uwaga! Można – choć nie jest to niezbędne – stosować konwencję rejestrowania kolejności dołączania członów koniunkcji przez odpowiednie zapisanie w uzasadnieniu danego kroku numerów wierszy, na których znajdują się te człony. Według tej konwencji wyrażenie kształtu ‘•Wpr 2, 1’ znaczy tyle, co ‘Reguła •Wpr uzasadnia dołączenie koniunkcji, której pierwszym członem jest zdanie z wiersza 2, a drugim członem zdanie z wiersza 1’.

Nie wolno natomiast reguły •Wpr stosować do członów zdań:

- 
- | | | |
|----|---------------|----------|
| 1. | $A \bullet B$ | Zał. |
| 2. | C | Zał. |
| 3. | $B \bullet C$ | •Wpr 1,2 |
| 4. | $C \bullet A$ | •Wpr 2,1 |

Ćwiczenia na zastosowanie •Elim i •Wpr

•ElimWpr.I. Uzupełnij brakujące informacje:

- (a)
- | | | | |
|----|---------------|-----|--|
| 1. | C | Pr. | |
| 2. | D | Pr. | |
| 3. | $C \bullet D$ | | |
| 4. | $D \bullet C$ | | |
- (b)
- | | | | |
|----|---|-----|-----------|
| 1. | A | Pr. | |
| 2. | B | Pr. | |
| 3. | | | •Wpr 1, 2 |
| 4. | | | •Wpr 2, 1 |
- (c)
- | | | | |
|----|---------------|-----|-----------|
| 1. | C | Pr. | |
| 2. | $A \bullet B$ | Pr. | |
| 3. | | | •Wpr 1, 2 |
| 4. | | | •Wpr 2, 1 |
- (d)
- | | | | |
|----|---|-----|-----------|
| 1. | | Pr. | |
| 2. | | Pr. | |
| 3. | $(A \rightarrow B) \bullet (C \rightarrow D)$ | | •Wpr 1, 2 |
| 4. | | | •Wpr 2, 1 |
- (e)
- | | | | |
|----|----------|-----|-----------|
| 1. | $\sim A$ | Pr. | |
| 2. | $\sim B$ | Pr. | |
| 3. | | | •Wpr 1, 2 |
| 4. | | | •Wpr 2, 1 |
- (f)
- | | | | |
|----|-----------------------------|-----|-----------|
| 1. | | Pr. | |
| 2. | | Pr. | |
| 3. | $(C \vee A) \bullet \sim D$ | | •Wpr 1, 2 |
| 4. | | | •Wpr 2, 1 |
- (g)
- | | | | |
|----|----------------------------|-----|-----------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \vee C$ | Pr. | |
| 2. | D | Pr. | |
| 3. | | | •Wpr 1, 2 |
| 4. | | | •Wpr 2, 1 |
- (h)
- | | | | |
|----|---------------------------|-----|--|
| 1. | $(A \bullet B) \bullet C$ | Pr. | |
| 2. | $A \bullet B$ | Pr. | |
| 3. | C | | |
| 4. | A | | |
- (i)
- | | | | |
|----|--------------------|-----|---------|
| 1. | $\sim A \bullet C$ | Pr. | |
| 2. | $B \bullet \sim D$ | Pr. | |
| 3. | | | •Elim 1 |
| 4. | | | •Elim 1 |
| 5. | | | •Elim 2 |
| 6. | | | •Elim 2 |
- (j)
- | | | | |
|----|-------------------------------|-----|---------|
| 1. | $(A \equiv B) \bullet C$ | Pr. | |
| 2. | $(C \equiv D) \bullet \sim A$ | Pr. | |
| 3. | | | •Elim 1 |
| 4. | | | •Elim 1 |
| 5. | | | •Elim 2 |
| 6. | | | •Elim 2 |
- (k)
- | | | | |
|----|--|-----|--|
| 1. | $A \rightarrow (B \bullet C)$ | Pr. | |
| 2. | $[(A \rightarrow D) \vee (A \rightarrow C)] \bullet B$ | Pr. | |
| 3. | B | | |
- (l)
- | | | | |
|----|---|-----|--|
| 1. | $(C \bullet A) \bullet B$ | Pr. | |
| 2. | $[(B \equiv A) \vee (D \rightarrow A)] \bullet C$ | Pr. | |
| 3. | C | | |

10.5. Przykłady dowodów

Przykład 3: Dowiedz, że $A \bullet (B \bullet C)$ w oparciu o trzy przesłanki: A, B i C

Zaczynamy od „przygotowania dowodu”: narysowania linii dowodowej, wpisania oraz ponumerowania założeń, podkreślenia ich linią założeń, oraz uzasadnienia jako założeń. Na boku wpisujemy zdanie, które mamy wyprowadzić, aby zdanie to mieć cały czas „na oku”. Spróbujcie samodzielnie skonstruować ten dowód w miejscu podanym niżej, a następnie zweryfikujcie, czy dobrze wykonaliście zadanie.

1.	A	Zał.	Dowiedź: $A \bullet (B \bullet C)$
2.	B	Zał.	
3.	C	Zał.	
<hr/>			

W większości dowodów musimy zastosować myślenie strategiczne.

Jedną z najważniejszych strategii dowodzenia jest *strategia analizy docelowej*:

- musimy się zastanowić, jaka reguła inferencji pozwoliłaby nam na wyprowadzenie zdania docelowego,
- musimy się zastanowić, jakie zdania byłyby potrzebne do zastosowania tej reguły,
- musimy stwierdzić, czy te zdania są nam dostępne: jeśli tak, to przechodzimy do dowodu; jeśli nie, to musimy się zastanowić jak je uzyskać.

Przeprowadźmy zatem taką analizę docelową.

- Naszym celem jest wyprowadzić zdanie $A \bullet (B \bullet C)$, a więc musimy wyprowadzić pewną koniunkcję. Regułą, która pozwala na wyprowadzenie koniunkcji jest \bullet Wpr.
- Aby uzasadnić wyprowadzenie koniunkcji $A \bullet (B \bullet C)$ za pomocą \bullet Wpr, musimy mieć oba jej człony, czyli zdania A oraz $B \bullet C$.
- Jeden z jej członów (mianowicie zdanie A) występuje swobodnie w wierszu 1, drugiego członu (zdania $B \bullet C$) nie mamy, więc musimy się zastanowić:

Jak uzyskać zdanie $B \bullet C$? I ponownie:

- Zdanie $B \bullet C$ jest koniunkcją, więc najprawdopodobniej możemy ją uzyskać stosując regułę \bullet Wpr.
- (b-c) Potrzebne są oba człony koniunkcji, tj. zdanie B (które mamy w wierszu 2) oraz zdanie C (które mamy w wierszu 3).

Możemy zatem przystąpić do dowodu – zaczynając od końca (zakreślone zostają te zdania, które są używane do wyprowadzenia wniosku w danym kroku):

1.	A	Zał.	Dowiedź: $A \bullet (B \bullet C)$
2.	B	Zał.	
3.	C	Zał.	
4.	$B \bullet C$	\bullet Wpr 2, 3	

A następnie:

1.	A	Zał.	Dowiedź: $A \bullet (B \bullet C)$
2.	B	Zał.	
3.	C	Zał.	
4.	$B \bullet C$	\bullet Wpr 2,3	
5.	$A \bullet (B \bullet C)$	\bullet Wpr 1,4 c.b.d.o.	

Wyrażenie ‘c.b.d.o.’ jest skrótem od ‘co było do okazania’.

Przykład 4: Dowiedz, że $(A \bullet B) \bullet C$ w oparciu o jedną przesłankę: $A \bullet (B \bullet C)$

Zaczynamy od przygotowania dowodu. Spróbuj przeprowadzić go samodzielnie

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.	Dowiedź: $(A \bullet B) \bullet C$
----	---------------------------	------	------------------------------------

Naszym celem jest wyprowadzić koniunkcję $(A \bullet B) \bullet C$. Aby uzasadnić dołączenie koniunkcji $(A \bullet B) \bullet C$ za pomocą reguły \bullet Wpr, musimy mieć oba jej człony tej koniunkcji, tj. $A \bullet B$ oraz C . Żaden z tych członów nie występuje jednak samodzielnie w naszym dowodzie.

Przyjrzyjmy się temu, co mamy. Mamy do jedną przesłankę, która jest koniunkcją, więc powinniśmy zastosować regułę \bullet Elim, aby wydobyć zawarte w niej informacje.



Porada babuni o regule \bullet Elim:

Jeśli dana jest koniunkcja, a musisz skorzystać z informacji w niej zawartej — stosuj \bullet Elim!

W dowodzeniu warto korzystać z reguł heurystycznych, które określać będziemy mianem „porad babuni”. Należy je stosować z umiarem i rozwagą, ale w momentach, w których tracimy nadzieję na to, że będziemy w stanie dowód przeprowadzić, warto o nich pamiętać. W naszym przypadku, nie mamy nic do stracenia, gdyż koniunkcja w wierszu 1 jest jedynym naszym założeniem – musimy zastosować regułę \bullet Elim i zobaczymy, co będzie dalej.

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.	Dowiedź: $(A \bullet B) \bullet C$
2.	A	\bullet Elim 1	
3.	$B \bullet C$	\bullet Elim 1	

Naszymi celami pośrednimi jest otrzymanie $A \bullet B$ oraz C . Już teraz widzimy, że dotychczasowe kroki nie wystarczą. C możemy uzyskać z wiersza 3 przez zastosowanie reguły \bullet Elim raz jeszcze:

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.	Dowiedź: $(A \bullet B) \bullet C$
2.	A	\bullet Elim 1	
3.	$B \bullet C$	\bullet Elim 1	
4.	C	\bullet Elim 3	

Natomiast, aby uzyskać $A \bullet B$, będziemy musieli użyć reguły \bullet Wpr, a do tego potrzebujemy obu swobodnie stojących członów tej koniunkcji, tj. A oraz B . Zdanie A występuje już swobodnie w wierszu 2. Natomiast zdanie B możemy wyprowadzić z wiersza 3:

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.	Dowiedź: $(A \bullet B) \bullet C$
2.	A	\bullet Elim 1	
3.	$B \bullet C$	\bullet Elim 1	
4.	C	\bullet Elim 3	
5.	B	\bullet Elim 3	

W ten sposób koniunkcja z wiersza 1 została rozłożona na zdania atomowe, które możemy złożyć, tak aby uzyskać koniunkcję docelową. Zaczynamy od dołączenia pierwszego członu koniunkcji docelowej $A \bullet B$:

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.		Dowiedź: $(A \bullet B) \bullet C$
2.	A	•Elim 1		
3.	$B \bullet C$	•Elim 1		
4.	C	•Elim 3		
5.	B	•Elim 3		
6.	$A \bullet B$	•Wpr 2, 5		

A następnie wyprowadzamy już wniosek ostateczny – mamy obydwaj jego człony: zdanie $A \bullet B$ występuje swobodnie w wierszu 6, a zdanie C występuje swobodnie w wierszu 4:

1.	$A \bullet (B \bullet C)$	Zał.		Dowiedź: $(A \bullet B) \bullet C$
2.	A	•Elim 1		
3.	$B \bullet C$	•Elim 1		
4.	C	•Elim 3		
5.	B	•Elim 3		
6.	$A \bullet B$	•Wpr 2, 5		
7.	$(A \bullet B) \bullet C$	•Wpr. 6, 4	c.b.d.o	

Przykład 5: Dowiedź, że $G \bullet [(A \rightarrow B) \rightarrow A]$ w oparciu o dwie przesłanki: $[(A \rightarrow B) \rightarrow A]$ oraz $G \bullet H$

Głównym celem bieżącego przykładu jest przekonanie Was, że nie wolno się dać zastraszyć symbolom.

1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	Zał.		Dowiedź: $G \bullet [(A \rightarrow B) \rightarrow A]$
2.	$G \bullet H$	Zał		

Zaczynamy, jak zwykle od analizy docelowej. Naszym celem jest wyprowadzenie koniunkcji $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \bullet G$, którą moglibyśmy uzyskać przez zastosowanie reguły •Wpr. Potrzebne do tego byłyby oba jej człony, tj. G oraz $(A \rightarrow B) \rightarrow A$. Zdanie G możemy go łatwo wyprowadzić z wiersza 2. Natomiast zdanie $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ występuje już swobodnie w wierszu 1! Uzupełnijcie brakujące kroki w powyższym dowodzie.

Czy wiesz, że ...

Według teorii filozoficznych wywodzących się od amerykańskiego filozofa Wilfrida Sellarsa (1912-1989) umiejętność opanowania związków logicznych, w jakie wchodzi nasze myślenie jest warunkiem koniecznym myślenia.

Możemy sobie wyobrazić papugę, która wypowiada zdanie „Jabłko jest czerwone” zawsze i tylko wtedy, gdy pokazujemy jej czerwone jabłko. Otóż w ujęciu Sellarsa nie możemy papudze przypisać przekonania, że jabłko jest czerwone dopóki nie będzie ona w stanie właściwie rozpoznać związków logicznych, w jakie to przekonanie wchodzi. Papuga taka musiałaby umieć wyciągnąć m.in. wnioski, że pewne owoce są czerwone, że jabłka mają kolor itd.

Ujęcie Sellarsa pokazuje też, że umiejętność wyprowadzania wniosków jest kluczowa dla rozwoju sztucznej inteligencji. Rozwój systemów dowodzenia, a także rozmaitych logik bliżej odzwierciedlających nasze formy wnioskowania, jest jednym z ważniejszych zagadnień badawczych w tej dziedzinie.

Ćwiczenia z dowodzenia (•Elim i •Wpr)

•ElimWpr.II. W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Należy uzupełnić brakujący krok, uzasadnić go, oraz uzasadnić krok ostatni:

(a)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$C \bullet A$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>B</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td>$A \bullet B$</td><td></td></tr> </table>	1.	$C \bullet A$	Pr.	2.	B	Pr.	3.			4.	$A \bullet B$		(b)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">C</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>B</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td>$(B \bullet C) \bullet B$</td><td></td></tr> </table>	1.	C	Pr.	2.	B	Pr.	3.			4.	$(B \bullet C) \bullet B$	
1.	$C \bullet A$	Pr.																									
2.	B	Pr.																									
3.																											
4.	$A \bullet B$																										
1.	C	Pr.																									
2.	B	Pr.																									
3.																											
4.	$(B \bullet C) \bullet B$																										
(c)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$C \vee D$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>B</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td>$[B \bullet (C \vee D)] \bullet B$</td><td></td></tr> </table>	1.	$C \vee D$	Pr.	2.	B	Pr.	3.			4.	$[B \bullet (C \vee D)] \bullet B$		(d)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$\sim C$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$\sim D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td>$(\sim C \bullet \sim D) \bullet \sim C$</td><td></td></tr> </table>	1.	$\sim C$	Pr.	2.	$\sim D$	Pr.	3.			4.	$(\sim C \bullet \sim D) \bullet \sim C$	
1.	$C \vee D$	Pr.																									
2.	B	Pr.																									
3.																											
4.	$[B \bullet (C \vee D)] \bullet B$																										
1.	$\sim C$	Pr.																									
2.	$\sim D$	Pr.																									
3.																											
4.	$(\sim C \bullet \sim D) \bullet \sim C$																										
(e)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">C</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$A \bullet B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td>$A \bullet C$</td><td></td></tr> </table>	1.	C	Pr.	2.	$A \bullet B$	Pr.	3.			4.	$A \bullet C$		(f)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$C \bullet \sim D$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td>$\sim D \bullet (A \rightarrow B)$</td><td></td></tr> </table>	1.	$C \bullet \sim D$	Pr.	2.	$A \rightarrow B$	Pr.	3.			4.	$\sim D \bullet (A \rightarrow B)$	
1.	C	Pr.																									
2.	$A \bullet B$	Pr.																									
3.																											
4.	$A \bullet C$																										
1.	$C \bullet \sim D$	Pr.																									
2.	$A \rightarrow B$	Pr.																									
3.																											
4.	$\sim D \bullet (A \rightarrow B)$																										

•ElimWpr.III. W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Należy uzupełnić brakujący krok, uzasadnić go, oraz uzasadnić krok ostatni:

(a)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$A \bullet B$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \bullet D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>5.</td><td>$A \bullet D$</td><td></td></tr> </table>	1.	$A \bullet B$	Pr.	2.	$C \bullet D$	Pr.	3.			4.			5.	$A \bullet D$		(b)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$(A \bullet B) \bullet C$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>D</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>5.</td><td>$A \bullet D$</td><td></td></tr> </table>	1.	$(A \bullet B) \bullet C$	Pr.	2.	D	Pr.	3.			4.			5.	$A \bullet D$	
1.	$A \bullet B$	Pr.																															
2.	$C \bullet D$	Pr.																															
3.																																	
4.																																	
5.	$A \bullet D$																																
1.	$(A \bullet B) \bullet C$	Pr.																															
2.	D	Pr.																															
3.																																	
4.																																	
5.	$A \bullet D$																																
(c)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$\sim C \bullet \sim D$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>5.</td><td>$[\sim D \bullet (A \rightarrow B)] \bullet \sim D$</td><td></td></tr> </table>	1.	$\sim C \bullet \sim D$	Pr.	2.	$A \rightarrow B$	Pr.	3.			4.			5.	$[\sim D \bullet (A \rightarrow B)] \bullet \sim D$		(d)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$C \bullet \sim A$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>D</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>5.</td><td>$\sim A \bullet C$</td><td></td></tr> </table>	1.	$C \bullet \sim A$	Pr.	2.	D	Pr.	3.			4.			5.	$\sim A \bullet C$	
1.	$\sim C \bullet \sim D$	Pr.																															
2.	$A \rightarrow B$	Pr.																															
3.																																	
4.																																	
5.	$[\sim D \bullet (A \rightarrow B)] \bullet \sim D$																																
1.	$C \bullet \sim A$	Pr.																															
2.	D	Pr.																															
3.																																	
4.																																	
5.	$\sim A \bullet C$																																
(e)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">$(A \bullet B) \bullet (C \bullet D)$</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$\sim G$</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>5.</td><td>$\sim G \bullet B$</td><td></td></tr> </table>	1.	$(A \bullet B) \bullet (C \bullet D)$	Pr.	2.	$\sim G$	Pr.	3.			4.			5.	$\sim G \bullet B$		(f)	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="width: 5%;">1.</td><td style="width: 70%;">A</td><td style="width: 25%;">Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>B</td><td>Pr.</td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>3.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>4.</td><td></td><td></td></tr> <tr style="background-color: #cccccc;"><td>5.</td><td>$(A \bullet B) \bullet (B \bullet A)$</td><td></td></tr> </table>	1.	A	Pr.	2.	B	Pr.	3.			4.			5.	$(A \bullet B) \bullet (B \bullet A)$	
1.	$(A \bullet B) \bullet (C \bullet D)$	Pr.																															
2.	$\sim G$	Pr.																															
3.																																	
4.																																	
5.	$\sim G \bullet B$																																
1.	A	Pr.																															
2.	B	Pr.																															
3.																																	
4.																																	
5.	$(A \bullet B) \bullet (B \bullet A)$																																

10.6. Reguła \rightarrow Elim (Reguła opuszczania implikacji, *modus ponendo ponens*, reguła odrywania)

Jeżeli w pewnym wcześniejszym wierszu dowodu występuje (swobodnie) implikacja $p \rightarrow r$ oraz w innym wcześniejszym wierszu dowodu występuje (swobodnie) jej poprzednik p , to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje jej następnik r .

<i>i.</i>	$p \rightarrow r$	
<i>j.</i>	p	
\triangleright	r	\rightarrow Elim <i>i, j</i>

Intuicje

Reguła \rightarrow Elim jest chyba najslawniejszą z reguł inferencji. Jako jedyna zresztą jest stosowana również w systemach aksjomatycznych, które wprowadzają minimalną ilość reguł wnioskowania. Reguła ta niewątpliwie zachowuje prawdziwość przesłanek – jeżeli implikacja o prawdziwym poprzedniku sama jest prawdziwa, to jej następnik musi być prawdziwy.

O intuicyjności reguły \rightarrow Elim nie trzeba nikogo przekonywać. Wpiszcie wnioski w następujących rozumowaniach, a przekonacie się sami:

Jeśli wreszcie zdam maturę, to Zuzia przestanie się mnie wstydzić.
No i... zdałem maturę!

Jeżeli się rozpada, to Ala nie pójdzie ani na spacer z psem ani do kina.
Niestety rozpadało się.

Stosowanie reguły \rightarrow Elim

Regułę \rightarrow Elim stosować można tylko w *jeden sposób*:

1.	$\sim A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.
2.	$\sim A$	Zał.
3.	$B \bullet C$	\rightarrow Elim 1,2

Nie wolno reguły \rightarrow Elim stosować do członów zdań:

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$A \vee B$	Zał.
3.	B	\rightarrow Elim 1,2



1.	$(A \rightarrow B) \equiv D$	Zał.
2.	A	Zał.
3.	B	\rightarrow Elim 1,2



Ćwiczenia na zastosowanie \rightarrow Elim

Czy znajdziecie błąd w następującym dowodzie? Skreślcie nieprawidłowy krok – odpowiedź znajdziecie w *Rozwiązaniach*.

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	A	\rightarrow Elim 1
3.	B	\rightarrow Elim 1,2



→Elim.I. Uzupełnij brakujące informacje:


- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|---|---|------|----|--|------------------------|------|----|--|---|------------|--|----|----------|----------------------------|--|----|--|---------------------|------|----|--|--|------------|----|--|------------------------|------|----|--|----------|------------|
| <p>(a)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$C \rightarrow D$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>C</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $C \rightarrow D$ | Zał. | 2. | | C | Zał. | 3. | | _____ | →Elim 1, 2 | <p>(b)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$\sim A \rightarrow D$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$\sim A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $\sim A \rightarrow D$ | Zał. | 2. | | $\sim A$ | Zał. | 3. | | _____ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | |
| 1. | | $C \rightarrow D$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | C | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $\sim A \rightarrow D$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $\sim A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(c)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>B</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$\sim D$</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | _____ | Zał. | 2. | | B | Zał. | 3. | | $\sim D$ | →Elim 1, 2 | <p>(d)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$(C \vee A) \rightarrow B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>B</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $(C \vee A) \rightarrow B$ | Zał. | 2. | | _____ | Zał. | 3. | | B | →Elim 1, 2 | | | | | | | | |
| 1. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | B | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $\sim D$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $(C \vee A) \rightarrow B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | B | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(e)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$A \rightarrow (D \bullet B)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $A \rightarrow (D \bullet B)$ | Zał. | 2. | | A | Zał. | 3. | | _____ | →Elim 1, 2 | <p>(f)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>M</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$\sim \sim N$</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | _____ | Zał. | 2. | | M | Zał. | 3. | | $\sim \sim N$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | |
| 1. | | $A \rightarrow (D \bullet B)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | M | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $\sim \sim N$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(g)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>C</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>D</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | _____ | Zał. | 2. | | C | Zał. | 3. | | D | →Elim 1, 2 | <p>(h)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$\sim C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$A \bullet B$</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $\sim C$ | Zał. | 2. | | _____ | Zał. | 3. | | $A \bullet B$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | |
| 1. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | C | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | D | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $\sim C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $A \bullet B$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(i)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$C \rightarrow D$</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$ | Zał. | 2. | | _____ | Zał. | 3. | | $C \rightarrow D$ | →Elim 1, 2 | <p>(j)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$A \vee B$</td><td>→Elim 1, 2</td></tr> </table> | 1. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | 2. | | _____ | Zał. | 3. | | $A \vee B$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | |
| 1. | | $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $C \rightarrow D$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $A \vee B$ | →Elim 1, 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(k)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$\sim A \rightarrow \sim C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$\sim A \rightarrow D$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>$\sim C$</td><td>→Elim 1, 3</td></tr> </table> | 1. | | $\sim A \rightarrow \sim C$ | Zał. | 2. | | $\sim A \rightarrow D$ | Zał. | 3. | | _____ | Zał. | 4. | | $\sim C$ | →Elim 1, 3 | <p>(l)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$\sim D$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$(\sim D \rightarrow A) \bullet C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$\sim D \rightarrow A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>_____</td><td>→Elim 1,3</td></tr> </table> | 1. | | $\sim D$ | Zał. | 2. | | $(\sim D \rightarrow A) \bullet C$ | Zał. | 3. | | $\sim D \rightarrow A$ | Zał. | 4. | | _____ | →Elim 1,3 |
| 1. | | $\sim A \rightarrow \sim C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $\sim A \rightarrow D$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | $\sim C$ | →Elim 1, 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $\sim D$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $(\sim D \rightarrow A) \bullet C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $\sim D \rightarrow A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | _____ | →Elim 1,3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(m)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>B</td><td>→Elim 1, 3</td></tr> </table> | 1. | | _____ | Zał. | 2. | | A | Zał. | 3. | | $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow B$ | Zał. | 4. | | B | →Elim 1, 3 | <p>(n)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$A \vee C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>B</td><td>_____</td></tr> </table> | 1. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | 2. | | $A \vee C$ | Zał. | 3. | | A | Zał. | 4. | | B | _____ |
| 1. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | B | →Elim 1, 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $A \vee C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | B | _____ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(o)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$\sim D \rightarrow \sim C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$A \equiv C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>$\sim C$</td><td>→Elim 1, 3</td></tr> </table> | 1. | | $\sim D \rightarrow \sim C$ | Zał. | 2. | | $A \equiv C$ | Zał. | 3. | | _____ | Zał. | 4. | | $\sim C$ | →Elim 1, 3 | <p>(p)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$\sim(D \bullet A)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$(\sim D \rightarrow A) \rightarrow C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>$\sim C$</td><td>→Elim 1,3</td></tr> </table> | 1. | | $\sim(D \bullet A)$ | Zał. | 2. | | $(\sim D \rightarrow A) \rightarrow C$ | Zał. | 3. | | _____ | Zał. | 4. | | $\sim C$ | →Elim 1,3 |
| 1. | | $\sim D \rightarrow \sim C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $A \equiv C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | $\sim C$ | →Elim 1, 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | $\sim(D \bullet A)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $(\sim D \rightarrow A) \rightarrow C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | $\sim C$ | →Elim 1,3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(q)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$B \rightarrow C$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>B</td><td>→Elim 1, 3</td></tr> </table> | 1. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | 2. | | $B \rightarrow C$ | Zał. | 3. | | _____ | Zał. | 4. | | B | →Elim 1, 3 | <p>(r)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td> </td><td>_____</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td> </td><td>$\sim(B \vee C)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td> </td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>4.</td><td> </td><td>C</td><td>→Elim 1, 3</td></tr> </table> | 1. | | _____ | Zał. | 2. | | $\sim(B \vee C)$ | Zał. | 3. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | 4. | | C | →Elim 1, 3 |
| 1. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $B \rightarrow C$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | B | →Elim 1, 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | | _____ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | | $\sim(B \vee C)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | | $A \rightarrow B$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | | C | →Elim 1, 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

(s)	1. $\sim A \rightarrow \sim C$	Zał.
	2. 	Zał.
	3. A	Zał.
	4. $D \rightarrow (A \rightarrow C)$	\rightarrow Elim 2,3

(t)	1. $\sim A \rightarrow \sim C$	Zał.
	2. 	Zał.
	3. $(A \vee \sim D) \rightarrow (\sim D \bullet \sim B)$	Zał.
	4. $\sim D \bullet \sim B$	\rightarrow Elim 2,3

10.7. Reguły inferencji stosują się tylko do swobodnie stojących zdań

Podkreślaliśmy już niejednokrotnie, że reguły inferencji stosują się tylko do swobodnie występujących zdań. Warto jednak tę zasadę uzasadnić. Rozważmy następującą błędną próbę zastosowania reguły \rightarrow Elim:



1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$A \vee C$	Zał.
3.	B	\rightarrow Elim 1, 2

Zwróćmy uwagę, że co prawda poprzednik implikacji $A \rightarrow B$, tj. zdanie A , występuje w przesłance 2, ale nie występuje w niej swobodnie!

Aby się przekonać o błędności takiego rozumowania przyjmijmy, że stałe A , B , i C zastępują następujące zdania:

- A := Jesteście mi winni 1,5 mln zł
- C := Powinniście mi dać przynajmniej 1,5 mln zł
- B := Korzystacie z *Samouczka*

Rozpisując otrzymujemy następujące – ewidentnie błędne (a szkoda...) – rozumowanie:

Jeżeli jesteście mi winni 1,5 mln zł, to powinniście mi dać przynajmniej 1,5 mln	1
Albo jesteście mi winni 1,5 mln zł albo korzystacie z <i>Samouczka</i> .	1
Powinniście mi dać przynajmniej 1,5 mln zł.	0

Przesłanka pierwsza jest prawdziwa – gdybyście byli mi winni 1,5 mln zł, to słuszne byłoby oczekiwanie, żebyście swój dług spłacili. Druga przesłanka jest również prawdziwa – przecież zdanie „Albo jesteście mi winni 1,5 mln zł albo korzystacie z *Samouczka*” jest prawdziwe, gdyż prawdziwy jest jego drugi człon – a przecież dla prawdziwości alternatywy wystarcza prawdziwość jednego jej członu. Z Tematu 1 powinniście pamiętać, że w sytuacji gdy wszystkie przesłanki są prawdziwe a rozumowanie prawidłowe, wniosek *musi* być prawdziwy. Wniosek jest jednak fałszywy, a to znaczy, że wnioskowanie nie jest prawidłowe, gdyż z prawdziwych przesłanek prowadzi do fałszywego wniosku.

Jest to więc przykład wnioskowania, gdzie wyraźnie widać, iż pogwałcenie zasady o zastosowaniu reguł inferencji wyłącznie do zdań swobodnie stojących prowadziłyby do tego, iż można byłoby dowieść „prawidłowości” błędnych wnioskowań. To wystarcza, aby chcieć stosować reguły inferencji tylko do zdań swobodnie stojących.

Reguły inferencji stosują się tylko do swobodnie stojących zdań (nie do komponentów tych zdań)

Ćwiczenia m.in. na rozpoznawanie swobodnie stojących zdań

Uważnie przyjrzyj się następującym zastosowaniom wprowadzonych reguł inferencji. Uzasadnij kroki prawidłowe, skreśl nieprawidłowe.

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--|------|----|------------------------------------|------|---|-------------------|---------------------------|---|---------------|-------------------------------|--|----|--|------|----|----------------------------|-----|----|-------------------|--|----|---------------|--|
| <p>(a)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(C \vee A) \rightarrow D$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \vee A$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>D</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(C \vee A) \rightarrow D$ | Zał. | 2. | $C \vee A$ | Zał. | 3. | D | | <p>(b)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$C \vee (A \rightarrow D)$</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>A</td><td>Zał.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>D</td><td></td></tr> </table> | 1. | $C \vee (A \rightarrow D)$ | Zał. | 2. | A | Zał. | 3. | D | | | | | | | |
| 1. | $(C \vee A) \rightarrow D$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \vee A$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | D | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $C \vee (A \rightarrow D)$ | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | A | Zał. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | D | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(c)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$C \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \bullet A$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>D</td><td></td></tr> </table> | 1. | $C \rightarrow D$ | Pr. | 2. | $C \bullet A$ | Pr. | 3. | D | | <p>(d)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$A \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>B</td><td></td></tr> </table> | 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. | 2. | $A \rightarrow B$ | Pr. | 3. | B | | | | | | | |
| 1. | $C \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \bullet A$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | D | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(e)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim C$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$\sim C \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>D</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim C$ | Pr. | 2. | $\sim C \rightarrow D$ | Pr. | 3. | D | | <p>(f)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(B \rightarrow C) \bullet D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>B</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(B \rightarrow C) \bullet D$ | Pr. | 2. | B | Pr. | 3. | C | | | | | | | |
| 1. | $\sim C$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $\sim C \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | D | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $(B \rightarrow C) \bullet D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | B | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(g)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$B \rightarrow C$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$A \bullet (B \bullet C)$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>A</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | $B \rightarrow C$ | Pr. | 2. | $A \bullet (B \bullet C)$ | Pr. | 3. | A | | 4. | C | | <p>(h)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$A \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>B</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$B \bullet D$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. | 2. | $A \rightarrow B$ | Pr. | 3. | B | | 4. | $B \bullet D$ | |
| 1. | $B \rightarrow C$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $A \bullet (B \bullet C)$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $B \bullet D$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(i)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(A \bullet B) \bullet C$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>A</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>B</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(A \bullet B) \bullet C$ | Pr. | 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. | 3. | A | | 4. | B | | <p>(j)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$A \rightarrow B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \bullet A$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>A</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>B</td><td></td></tr> </table> | 1. | $A \rightarrow B$ | Pr. | 2. | $C \bullet A$ | Pr. | 3. | A | | 4. | B | |
| 1. | $(A \bullet B) \bullet C$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $A \rightarrow B$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \bullet A$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(k)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$A \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>A</td><td></td></tr> </table> | 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. | 2. | A | | <p>(l)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(A \bullet C) \bullet C$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(A \bullet C) \bullet C$ | Pr. | 2. | C | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $A \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $(A \bullet C) \bullet C$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(m)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(A \bullet B) \vee C$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>A</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$B \vee C$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(A \bullet B) \vee C$ | Pr. | 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. | 3. | A | | 4. | $B \vee C$ | | <p>(n)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim C \bullet B$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$\sim C \rightarrow D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>$\sim C$</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>B</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim C \bullet B$ | Pr. | 2. | $\sim C \rightarrow D$ | Pr. | 3. | $\sim C$ | | 4. | B | |
| 1. | $(A \bullet B) \vee C$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $B \vee C$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $\sim C \bullet B$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $\sim C \rightarrow D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | $\sim C$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(o)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim(A \bullet B)$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$\sim A \rightarrow (D \bullet C)$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>$\sim A$</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$D \bullet C$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim(A \bullet B)$ | Pr. | 2. | $\sim A \rightarrow (D \bullet C)$ | Pr. | 3. | $\sim A$ | | 4. | $D \bullet C$ | | <p>(p)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$\sim\sim C \bullet \sim\sim A$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$C \rightarrow (D \vee B)$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>$\sim\sim C$</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>$D \vee B$</td><td></td></tr> </table> | 1. | $\sim\sim C \bullet \sim\sim A$ | Pr. | 2. | $C \rightarrow (D \vee B)$ | Pr. | 3. | $\sim\sim C$ | | 4. | $D \vee B$ | |
| 1. | $\sim(A \bullet B)$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $\sim A \rightarrow (D \bullet C)$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | $\sim A$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $D \bullet C$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $\sim\sim C \bullet \sim\sim A$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $C \rightarrow (D \vee B)$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | $\sim\sim C$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | $D \vee B$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>(q)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>D</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>$A \rightarrow C$</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>A</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Pr. | 2. | D | Pr. | 3. | $A \rightarrow C$ | | 4. | A | | <p>(r)</p> <table border="0"> <tr><td>1.</td><td>$(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>2.</td><td>$(A \bullet B) \vee D$</td><td>Pr.</td></tr> <tr><td>3.</td><td>$A \rightarrow C$</td><td></td></tr> <tr><td>4.</td><td>C</td><td></td></tr> </table> | 1. | $(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Pr. | 2. | $(A \bullet B) \vee D$ | Pr. | 3. | $A \rightarrow C$ | | 4. | C | |
| 1. | $(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | D | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | $A \rightarrow C$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. | $(A \bullet B) \vee [D \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. | $(A \bullet B) \vee D$ | Pr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. | $A \rightarrow C$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4. | C | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

10.8. Dalsze przykłady dowodów

Każdy z następujących dowodów spróbujcie skonstruować samodzielnie. W razie wątpliwości możecie podejrzeć komentarze i dalej próbować samodzielnie. Tym razem poszczególne kroki będziecie musieli i tak samodzielnie wpisać, choć w komentarzach z łatwością je odnajdziecie.

Przykład 6.

1.	$A \rightarrow B$	Zał.	Dowiedź: $B \bullet C$
2.	$A \bullet C$	Zał.	

Z danych przesłanek nie uzyskamy $B \bullet C$ inaczej niż przez zastosowanie reguły \bullet Wpr. Potrzebujemy obu członów tej koniunkcji, tj. B oraz C , ale żaden z nich nie występuje w dowodzie swobodnie, choć zdanie C jesteśmy w stanie wyprowadzić z wiersza 2 stosując regułę \bullet Elim.

3. C \bullet Elim 2

Kluczową sprawą jest pytanie jak uzyskać pierwszy człon wniosku, czyli zdanie B ? Jedyne miejsce, gdzie występuje zdanie B jest przesłanka 1, która jest implikacją. Zdanie B jest następnikiem tej implikacji, a ponieważ znamy regułę, pozwalającą właśnie na wyprowadzenie następnika, tj. regułę \rightarrow Elim, więc właśnie tę regułę zastosujemy. Aby jednak zastosować regułę \rightarrow Elim, potrzebny jest nam również poprzednik implikacji z wiersza 1, tj. zdanie A . Mamy co prawda zdanie A w przesłance 2, lecz nie występuje ono tam swobodnie! Możemy jednak sprawić, aby zdanie A występowało swobodnie w kolejnym wierszu, wyprowadzając je z wiersza 2 za pomocą reguły \bullet Elim:

4. A \bullet Elim 2

Teraz mamy swobodnie stojącą implikację $A \rightarrow B$ (w wierszu 1) oraz swobodnie stojący jej poprzednik A (w wierszu 4), więc możemy zastosować regułę \rightarrow Elim:

5. B \rightarrow Elim 1, 4

Kolejny krok to już tylko złożenie swobodnie występującego w wierszu 5 zdania B oraz swobodnie występującego w wierszu 3 zdania C za pomocą reguły \bullet Wpr, aby uzyskać wniosek:

6. $B \bullet C$ \bullet Wpr 5, 3 c.b.d.o.

Przykład 7.

1.	$A \rightarrow B$	Zał.	Dowiedź: C
2.	$(B \rightarrow C) \bullet A$	Zał.	

Zdanie C występuje jako następnik implikacji będącej członem koniunkcji w przesłance 2. Ponieważ wiemy, że reguły inferencji stosują się tylko do swobodnie stojących zdań, a nie do ich komponentów, więc aby w ogóle zacząć myśleć o tym, jak wydobyć C musimy zrobić to, co głosi Porada Babuni o regule \bullet Elim – wyprowadzić informację zawartą w koniunkcji z wiersza 2:

3.	$B \rightarrow C$	\bullet Elim 2
4.	A	\bullet Elim 2

Teraz możemy przystąpić do analizy docelowej. Ponieważ zdanie C jest następnikiem implikacji $B \rightarrow C$ występującej swobodnie w wierszu 3, będziemy je mogli wyprowadzić stosując regułę \rightarrow Elim pod warunkiem, że będziemy mieli swobodnie stojący poprzednik tej implikacji, tj. zdanie B, którego jednak nie mamy.

Jak zatem wyprowadzić zdanie B? Zdanie B występuje np. w wierszu 3. Jest ono poprzednikiem implikacji w tym wierszu się znajdującej, ale ponieważ nie istnieje reguła pozwalająca wyprowadzić poprzednik implikacji, więc nie możemy wyprowadzić zdania B z wiersza 3. Zdanie B jest również następnikiem implikacji $A \rightarrow B$ występującej swobodnie w wierszu 1, więc moglibyśmy uzyskać zdanie B stosując regułę \rightarrow Elim, jeśli mielibyśmy swobodnie stojący poprzednik tej implikacji, tj. zdanie A, który istotnie występuje swobodnie w wierszu 4. Zatem:

5.	B	\rightarrow Elim 1, 4
----	---	-------------------------

Ponieważ mamy już swobodnie występujące w wierszu 5 zdanie B oraz swobodnie występującą w wierszu 3 implikację $B \rightarrow C$, więc możemy zastosować regułę \rightarrow Elim raz jeszcze uzyskując wniosek:

6.	C	\rightarrow Elim 3, 5 c.b.d.o.
----	---	----------------------------------

Przykład 8.

- | | | | |
|----|---|------|------------|
| 1. | $A \bullet D$ | Zał. | Dowiedź: C |
| 2. | $(B \rightarrow C) \bullet (A \rightarrow B)$ | Zał. | |

Zdanie C występuje jako głęboki komponent koniunkcji w wierszu 2 – zdanie to jest następnikiem implikacji będącej członem tej koniunkcji. Musimy więc najpierw zastosować regułę \bullet Elim, aby móc w ogóle myśleć o stosowaniu dalszych reguł:

- | | | |
|----|-------------------|------------------|
| 3. | $B \rightarrow C$ | \bullet Elim 2 |
| 4. | $A \rightarrow B$ | \bullet Elim 2 |

Zdanie C jest następnikiem implikacji występującej swobodnie w wierszu 3 – będziemy mogli je wyprowadzić, jeżeli wyprowadzimy zdanie B. Zdanie B jest następnikiem implikacji występującej swobodnie w wierszu 4 – będziemy mogli je wyprowadzić, jeżeli wyprowadzimy zdanie A. Zdanie A jest członem koniunkcji w wierszu 1, więc możemy je łatwo wyprowadzić za pomocą reguły \bullet Elim:

- | | | |
|----|---|------------------|
| 5. | A | \bullet Elim 1 |
|----|---|------------------|

Teraz pozostaje już tylko dalsze wykonanie obmyślanej strategii:

- | | | |
|----|---|-------------------------|
| 6. | B | \rightarrow Elim 4, 5 |
| 7. | C | \rightarrow Elim 3, 6 |



Porada babuni o zapisie strategii:

W trakcie dokonywania analizy docelowej warto na osobnej kartce papieru – albo z boczku – zapisać sobie kolejne etapy, które są potrzebne do uzyskania wniosku. W miarę jak dochodzicie do podcelów należy je wykreślać, aż dotrzecie do celu. W skomplikowanych dowodach można się pogubić w tym, dlaczego coś się planowało zrobić.

Ćwiczenia z dowodzenia (\rightarrow Elim)

\rightarrow Elim.II. W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Należy uzupełnić brakujący krok, uzasadnić go, oraz uzasadnić krok ostatni:

<p>(a)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(B \rightarrow A) \bullet C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">B</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(B \rightarrow A) \bullet C$	Zał.	2.	B	Zał.	3.			4.	A		<p>(b)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(C \rightarrow B) \bullet A$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">C</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">B</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(C \rightarrow B) \bullet A$	Zał.	2.	C	Zał.	3.			4.	B	
1.	$(B \rightarrow A) \bullet C$	Zał.																							
2.	B	Zał.																							
3.																									
4.	A																								
1.	$(C \rightarrow B) \bullet A$	Zał.																							
2.	C	Zał.																							
3.																									
4.	B																								

<p>(c)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$B \rightarrow C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$A \rightarrow B$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">C</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$B \rightarrow C$	Zał.	2.	$A \rightarrow B$	Zał.	3.	A	Zał.	4.			5.	C		<p>(d)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$B \rightarrow \sim C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim A \rightarrow B$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim A$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim C$</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$B \rightarrow \sim C$	Zał.	2.	$\sim A \rightarrow B$	Zał.	3.	$\sim A$	Zał.	4.			5.	$\sim C$	
1.	$B \rightarrow C$	Zał.																													
2.	$A \rightarrow B$	Zał.																													
3.	A	Zał.																													
4.																															
5.	C																														
1.	$B \rightarrow \sim C$	Zał.																													
2.	$\sim A \rightarrow B$	Zał.																													
3.	$\sim A$	Zał.																													
4.																															
5.	$\sim C$																														

<p>(e)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim A \rightarrow \sim B$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim B \rightarrow \sim C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim A$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim C$</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$\sim A \rightarrow \sim B$	Zał.	2.	$\sim B \rightarrow \sim C$	Zał.	3.	$\sim A$	Zał.	4.			5.	$\sim C$		<p>(f)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$A \rightarrow (B \vee D)$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(B \vee D) \rightarrow C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">C</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \vee D)$	Zał.	2.	$(B \vee D) \rightarrow C$	Zał.	3.	A	Zał.	4.			5.	C	
1.	$\sim A \rightarrow \sim B$	Zał.																													
2.	$\sim B \rightarrow \sim C$	Zał.																													
3.	$\sim A$	Zał.																													
4.																															
5.	$\sim C$																														
1.	$A \rightarrow (B \vee D)$	Zał.																													
2.	$(B \vee D) \rightarrow C$	Zał.																													
3.	A	Zał.																													
4.																															
5.	C																														

<p>(g)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(A \bullet B) \rightarrow C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">B</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">C</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.	2.	A	Zał.	3.	B	Zał.	4.			5.	C		<p>(h)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(D \vee A) \rightarrow \sim C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(\sim D \bullet A) \rightarrow (D \vee A)$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim D \bullet A$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$\sim C$</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(D \vee A) \rightarrow \sim C$	Zał.	2.	$(\sim D \bullet A) \rightarrow (D \vee A)$	Zał.	3.	$\sim D \bullet A$	Zał.	4.			5.	$\sim C$	
1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.																													
2.	A	Zał.																													
3.	B	Zał.																													
4.																															
5.	C																														
1.	$(D \vee A) \rightarrow \sim C$	Zał.																													
2.	$(\sim D \bullet A) \rightarrow (D \vee A)$	Zał.																													
3.	$\sim D \bullet A$	Zał.																													
4.																															
5.	$\sim C$																														

<p>(i)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(C \bullet A) \rightarrow D$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$D \bullet (C \bullet A)$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">D</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(C \bullet A) \rightarrow D$	Zał.	2.	$D \bullet (C \bullet A)$	Zał.	3.			4.	D		<p>(j)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(A \rightarrow B) \rightarrow C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(A \rightarrow B) \bullet D$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">C</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	Zał.	2.	$(A \rightarrow B) \bullet D$	Zał.	3.			4.	C	
1.	$(C \bullet A) \rightarrow D$	Zał.																							
2.	$D \bullet (C \bullet A)$	Zał.																							
3.																									
4.	D																								
1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	Zał.																							
2.	$(A \rightarrow B) \bullet D$	Zał.																							
3.																									
4.	C																								

<p>(k)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$A \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow D]$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$B \rightarrow C$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">D</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow D]$	Zał.	2.	A	Zał.	3.	$B \rightarrow C$	Zał.	4.			5.	D		<p>(l)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">$A \rightarrow B$</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">A</td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"> </td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">C</td> <td style="padding: 2px;"> </td> </tr> </table>	1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Zał.	2.	$A \rightarrow B$	Zał.	3.	A	Zał.	4.			5.	C	
1.	$A \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow D]$	Zał.																													
2.	A	Zał.																													
3.	$B \rightarrow C$	Zał.																													
4.																															
5.	D																														
1.	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	Zał.																													
2.	$A \rightarrow B$	Zał.																													
3.	A	Zał.																													
4.																															
5.	C																														

→Elim.III. W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Należy uzupełnić brakujący krok, uzasadnić go, oraz uzasadnić krok ostatni:

- (a)
- | | | |
|----|-------------------------------|------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \bullet C$ | Zał. |
| 2. | $C \bullet A$ | Zał. |
| 3. | | |
| 4. | | |
| 5. | B | |
- (b)
- | | | |
|----|---------------------------|------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 2. | $C \bullet (A \bullet D)$ | Zał. |
| 3. | | |
| 4. | | |
| 5. | B | |
- (c)
- | | | |
|----|-------------------|------|
| 1. | $B \rightarrow C$ | Zał. |
| 2. | $C \rightarrow D$ | Zał. |
| 3. | $A \bullet B$ | Zał. |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | D | |
- (d)
- | | | |
|----|-------------------|------|
| 1. | $B \rightarrow C$ | Zał. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 3. | A | Zał. |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | $B \bullet C$ | |
- (e)
- | | | |
|----|-------------------------------|------|
| 1. | $C \rightarrow A$ | Zał. |
| 2. | $(A \rightarrow C) \bullet C$ | Zał. |
| 3. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | B | |
- (f)
- | | | |
|----|--|------|
| 1. | $(\sim A \bullet \sim B) \rightarrow (\sim B \rightarrow C)$ | Zał. |
| 2. | $\sim B$ | Zał. |
| 3. | $\sim A$ | Zał. |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | C | |
- (g)
- | | | |
|----|---|------|
| 1. | $A \rightarrow [A \rightarrow (A \rightarrow C)]$ | Zał. |
| 2. | A | Zał. |
| 3. | | |
| 4. | | |
| 5. | C | |
- (h)
- | | | |
|----|---|------|
| 1. | $(A \bullet B) \rightarrow (C \bullet D)$ | Zał. |
| 2. | $(A \bullet B) \bullet G$ | Zał. |
| 3. | | |
| 4. | | |
| 5. | D | |
- (i)
- | | | |
|----|---|------|
| 1. | $(K \rightarrow L) \rightarrow (K \rightarrow M)$ | Zał. |
| 2. | $K \rightarrow L$ | Zał. |
| 3. | K | Zał. |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | $K \bullet M$ | |
- (j)
- | | | |
|----|---|------|
| 1. | $K \rightarrow [(L \rightarrow M) \rightarrow N]$ | Zał. |
| 2. | K | Zał. |
| 3. | $L \rightarrow M$ | Zał. |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | $(L \rightarrow M) \bullet N$ | |

•ElimWpr.IV. Skonstruuj następujące dowody:

(a) Dowiedz, że: C

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow B$	Zał.
3.	A	Zał.

(b) Dowiedz, że: A

1.	$(\sim C \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	Zał.
2.	$\sim C$	Zał.
3.	$\sim C \rightarrow B$	Zał.

(c) Dowiedz, że: C

1.	$B \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow (B \bullet D)$	Zał.
3.	A	Zał.

(d) Dowiedz, że: $A \bullet C$

1.	$(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	A	Zał.

(e) Dowiedz, że: $B \bullet D$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$C \rightarrow D$	Zał.
3.	$A \bullet C$	Zał.

(f) Dowiedz, że: $\sim D$

1.	$(A \bullet C) \rightarrow (B \vee C)$	Zał.
2.	$(B \vee C) \rightarrow \sim D$	Zał.
3.	$(A \bullet B) \bullet C$	Zał.

(g) Dowiedz, że: D

1.	$(B \bullet A) \rightarrow D$	Zał.
2.	$(A \bullet C) \bullet B$	Zał.
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		

(h) Dowiedz, że: $[(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow C)] \bullet (A \rightarrow B)$

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$B \rightarrow C$	Zał.
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		

(i) Dowiedz, że: A

1.	$B \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]$	Zał.
2.	B	Zał.
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		

(j) Dowiedz, że: D

1.	$(B \vee C) \rightarrow (A \bullet D)$	Zał.
2.	$(B \vee C) \bullet A$	Zał.
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		

(k) Dowiedz, że: $(C \bullet D) \bullet (A \vee B)$

1.	$(A \vee B) \rightarrow C$	Zał.
2.	$D \rightarrow (A \vee B)$	Zał.
3.	D	Zał.
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		

(l) Dowiedz, że: $B \bullet C$

1.	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	Zał.
2.	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$	Zał.
3.	A	Zał.
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		
<hr/>		

