9. INNE ZASTOSOWANIA METODY ZEROJEDYNKOWEJ

W temacie tym poznamy kolejne pojęcia logiczne, jak również ich operacjonalizacje za pomocą matryc logicznych. Wskażemy metodę określania, czy wnioskowanie jest prawidłowe, a co się z tym wiąże zerojedynkową operacjonalizację pojęcia implikacji logicznej. Poznamy pojęcie zdań wzajemnie niezgodnych, zdań wzajemnie dopełniających się, zdań wzajemnie sprzecznych, oraz zdań logicznie niezależnych.

Cele

- zastosowanie metody zerojedynkowej do stwierdzania prawidłowości wnioskowania
- zastosowanie metody zerojedynkowej do stwierdzania czy dany schemat zdaniowy wynika logicznie ze zbioru schematów zdaniowych
- zastosowanie metody zerojedynkowej do stwierdzenia, czy dwa schematy zdaniowe są wzajemnie niezgodne, wzajemnie dopełniające się, wzajemnie sprzeczne, czy logicznie niezależne.

9.1. Prawidłowość wnioskowania

Przypomnijcie sobie, co powiedzieliśmy na temat zależności między logiczną prawidłowością wnioskowania a prawdziwością przesłanek i wniosku w Temacie 1 (§1.4). Powiedzieliśmy wtedy, że jeżeli wnioskowanie jest logicznie prawidłowe, a wszystkie jego przesłanki są prawdziwe, to wniosek musi być prawdziwy, a więc jeżeli przesłanki są prawdziwe, to niemożliwe jest, aby wniosek był fałszywy. Prawidłowość rozumowania dotyczy wyciągania konsekwencji z tego, co nam jest dane, ale to co nam jest dane może się okazać fałszem. Jednocześnie jednak mimo że związek prawidłowości z prawdą nie jest prosty, to jakiś musi być – takim minimalnym wymogiem jest aby prawidłowe rozumowanie *zachowywało* prawdę, tj. aby niemożliwe było wyciągnięcie fałszywych wniosków z prawdziwych przesłanek. Jeżeli można wyciągnąć fałszywy wniosek z prawdziwych przesłanek, to dowód na to, że wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe. Zacznijmy właśnie tu, to jest od metody pokazywania, że wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe, znanej też jako metoda kontrprzykładu.

9.1.1. Metoda kontrprzykładu

Załóżmy, że ktoś rozumuje w następujący sposób:

Jeżeli John F. Kennedy został zamordowany, to nie żyje.
(1) John F. Kennedy nie żyje.
Zatem, John F. Kennedy został zamordowany.

Pomyśl przez chwilę, czy wnioskowanie to jest logicznie prawidłowe, czy nie. (Oczywiście, zarówno przesłanki jak i wniosek są w tym wypadku prawdziwe, ale pytanie dotyczy tego, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek.)

W tym wypadku odpowiedź jest negatywna: wniosek nie wynika z przesłanek. Aby to wykazać, moglibyśmy argumentować w ten sposób:

> Oczywiście jest prawdą, że Kennedy został zamordowany, ale to, że został zamordowany nie wynika z tego, że nie żyje. Wszakże pewni ludzie nie żyją mimo, że nie zostali zamordowani. Nie możemy wnioskować o tym, jak zmarli na podstawie faktu, że zmarli.

Aby argumentację tę wzmocnić (a z logicznego punktu widzenia: aby udowodnić, że wnioskowanie (1) jest logicznie nieprawidłowe) wystarczy podać przykład wnioskowania o tej samej strukturze logicznej, gdzie przesłanki są prawdziwe a wniosek fałszywy. Nietrudno o taki przykład:

Jeżeli Ronald Reagan został zamordowany, to nie żyje. 1
(2) Ronald Reagan nie żyje. 1
Zatem, Ronald Reagan został zamordowany. 0

W ten sposób dowodzimy, że wnioskowanie (1) jest logicznie nieprawidłowe – wskazaliśmy bowiem kontrprzykład, tj. przykład wnioskowania o tej samej formie logicznej, co wnioskowanie (1), w którym przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy.

Ogólnie: aby wykazać, że wnioskowanie *W* jest logicznie nieprawidłowe, trzeba wskazać na wnioskowanie *W′*, spełniające następujące warunki:

(a) wnioskowanie *W′* musi mieć tę samą strukturę logiczną, co wnioskowanie *W*,
(b) przesłanki wnioskowania *W′* muszą być prawdziwe, a jego wniosek fałszywy.

Wnioskowanie spełniające warunki (a)-(b) jest zwane kontrprzykładem dla logicznej prawidłowości wnioskowania *W*, bądź krótko: kontrprzykładem.

Zwróćcie uwagę, że wnioskowanie (2) ma nie tylko tę samą strukturę logiczną, ale jest też pokrewne tematycznie. Pokrewność tematyczna nie jest jednak wymogiem ścisłym – aby wykazać, że dane wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe wystarczy pokazać dowolny kontrprzykład nawet niezwiązany tematycznie z danym. Innym kontrprzykładem dla tego wnioskowania byłby np.:

	Jeżeli Katarzyna Paprzycka jest małpą, to nie jest gadem.	1
(3)	Katarzyna Paprzycka nie jest gadem.	1
	Zatem, Katarzyna Paprzycka jest małpą.	0

Jest to bowiem wnioskowanie o tym samym schemacie logicznym, co wnioskowanie (1), a mianowicie:

$$\text{(i)}\quad \frac{\begin{array}{c} p \rightarrow {\sim}q \\ {\sim}q \end{array}}{p}$$

Aczkolwiek, jeżeli uda się odnaleźć wnioskowanie tematycznie bliższe danemu, to tym bardziej przekonujący będzie kontrprzykład. Należy też zwrócić uwagę, że w praktyce oczywiście często toczymy spory co do prawdziwości czy fałszywości zdań. Kontrprzykłady będą skuteczne o ile znajdziemy przesłanki i wniosek, które nie są kontrowersyjne.

Umiejętności stosowania metody kontrprzykładu trzeba się nauczyć, a jest ona bardzo pomocna w toczeniu rozmaitych dyskusji. Opanowanie technik logicznych może w tej umiejętności dopomóc.

Ćwiczenie „Kontrprzykłady – 1”

Ustal, przy których podstawieniach, otrzymane wnioskowanie jest kontrprzykładem dla wnioskowania (1). Podaj jeszcze dwa podstawienia tego schematu wnioskowania, z których przynajmniej jedno byłoby kontrprzykładem.

Podstawienia	Przesłanka: $p \rightarrow {\sim}q$	Przesłanka: ${\sim}q$	Wniosek: p	
∩	∩	∩	∩	
p:=JFK został zamordowany q:=JFK żyje	Jeżeli JFK został zamordowany, to nie żyje ○ prawdziwe ○ fałszywe	JFK nie żyje ○ prawdziwe ○ fałszywe	JFK został zamordowany ○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
p:=Brad Pitt został zamordowany q:= Brad Pitt (BP) żyje	Jeżeli BP został zamordowany, to nie żyje ○ prawdziwe ○ fałszywe	BP nie żyje ○ prawdziwe ○ fałszywe	BP został zamordowany ○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
∩	∩	∩	∩	
p:=Marilyn Monroe była blondynką q:= MM była łysa	Jeżeli MM była blondynką, to nie była łysa. ○ prawdziwe ○ fałszywe	MM nie była łysa ○ prawdziwe ○ fałszywe	MM była blondynką. ○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
p:= John Travolta jest blondynem. q:= JT jest łysy	Jeżeli JT jest blondynem, to nie jest łysy. ○ prawdziwe ○ fałszywe	JT nie jest łysy. ○ prawdziwe ○ fałszywe	JT jest blondynem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
∩	∩	∩	∩	
p:= Lassie jest psem. q:=Lassie jest owadem.	Jeżeli Lassie jest psem, to nie jest owadem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	Lassie nie jest owadem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	Lassie jest psem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
p:= Lassie jest psem. q:=Lassie jest ssakiem.	Jeżeli Lassie jest psem, to nie jest ssakiem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	Lassie nie jest ssakiem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	Lassie jest psem. ○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
∩	∩	∩	∩	
p:= q:=	○ prawdziwe ○ fałszywe	○ prawdziwe ○ fałszywe	○ prawdziwe ○ fałszywe	☑ kontrprzykład
p:= q:=	○ prawdziwe ○ fałszywe	○ prawdziwe ○ fałszywe	○ prawdziwe ○ fałszywe	☐ kontrprzykład
∩	∩	∩	∩	

Ćwiczenie (dla chętnych) „Kontrprzykłady – 2”

Wykaż, że wnioskowania poniższe są logicznie nieprawidłowe wskazując odpowiedni kontrprzykład. (Ćwiczenie to może być trudne na tym etapie. Jeżeli tak jest, to spróbuj do niego wrócić po przerobieniu całego tematu.)

(1)

Jeżeli Asia dostanie 92 punkty z testu, to dostanie ocenę bdb.
Asia dostała ocenę bdb

Zatem, Asia dostała 92 punkty z testu.

(2)

Jeżeli Asia dostanie 92 punkty z testu, to dostanie ocenę bdb.
Asia nie dostała 92 punktów na teście.

Zatem, Asia nie dostała oceny bdb.

(3)

Jeżeli wydatki rządowe wzrosną, to gospodarka się załamie.
Jeżeli bezrobocie wzrośnie, to gospodarka się załamie.

Zatem, jeżeli wydatki rządowe wzrosną, to wzrośnie bezrobocie.

9.1.2. Logiczna nieprawidłowość wnioskowań

Pojęcie logicznej prawidłowości wnioskowań jest dopełnieniem pojęcia logicznej nieprawidłowości wnioskowań. Zacznijmy więc od pojęcia logicznej nieprawidłowości, które jest bezpośrednio oparte na na metodzie kontrprzykładów:

Definicja wnioskowania logicznie nieprawidłowego

Wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy właściwy schemat logiczny tego wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy.
Schemat logiczny wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w schemacie tego wnioskowania dadzą prawdziwe instancje schematów wszystkich przesłanek oraz fałszywą instancję schematu wniosku.

Zastosowanie metody zerojedynkowej

Pojęcie logicznej nieprawidłowości wnioskowań możemy zoperacjonalizować za pomocą matryc logicznych:

Operacjonalizacja definicji wnioskowania logicznie nieprawidłowego

Schemat wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje taki rząd kontrprzykładów w matrycy logicznej dla tego schematu, tj. taki rząd, w którym instancje wszystkich przesłanek są prawdziwe, a instancje wniosku – fałszywe.

Wykaż, że powyższy schemat wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy wskazując rząd matrycy logicznej zawierający kontrprzykłady (sprawdź odpowiedź z *Rozwiązaniami*):

p	q	$p \to \sim q$			$\sim q$		p	Czy jest to kontrprzykład?	
1	1							O tak	O nie
1	0							O tak	O nie
0	1							O tak	O nie
0	0							O tak	O nie

Ćwiczenie "Logiczna nieprawidłowość"

Wykaż, że następujące schematy wnioskowań są logicznie nieprawidłowe:

(1)
$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \lor q \end{array}}{p \bullet q}$$

(2)
$$\frac{\begin{array}{c} p \equiv \sim q \\ q \end{array}}{p}$$

(3)
$$\frac{\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ \sim r \end{array}}{\sim p}$$

(4)
$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{q \bullet r}$$

9.1.3. Logiczna prawidłowość wnioskowań

Pojęcie logicznej prawidłowości wnioskowań jest dopełnieniem pojęcia logicznej nieprawidłowości wnioskowań:

> Wnioskowanie jest logicznie prawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy nie jest logicznie nieprawidłowe.

Opierając się na tej myśli możemy podać stosowne definicje i operacjonalizację:

Definicja wnioskowania logicznie prawidłowego

Wnioskowanie jest logicznie prawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy właściwy schemat logiczny tego wnioskowania jest logicznie prawidłowy.

Schemat logiczny wnioskowania jest logicznie prawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w schemacie tego wnioskowania dadzą prawdziwe instancje schematów wszystkich przesłanek oraz fałszywą instancję schematu wniosku.

Operacjonalizacja definicji wnioskowania logicznie prawidłowego

Schemat wnioskowania jest logicznie prawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje rząd kontrprzykładów w matrycy logicznej dla tego schematu, tj. taki rząd, w którym instancje wszystkich przesłanek są prawdziwe, a instancje wniosku – fałszywe.

Aby wykazać, że *nie istnieje* rząd kontrprzykładów trzeba zbadać *wszystkie* rzędy matrycy logicznej. Dopiero gdy zbadamy każdy rząd matrycy logicznej i stwierdzimy, że nie jest on rzędem kontrprzykładów, możemy stwierdzić, że dany schemat jest schematem wnioskowań prawidłowych. Prześledźmy to na przykładzie. Wykażemy, że logicznie prawidłowe jest następujące wnioskowanie:

Wnioskowanie	Schemat
Jeżeli LPR stworzy z Samoobroną nową partię, to nie będzie wczesnych wyborów.	$p \to \sim q$
Wczesne wybory się odbyły.	q
Zatem, LPR nie stworzył z Samoobroną nowej partii.	$\sim p$

p	q	$p \to \sim q$			q	$\sim p$		Czy jest to kontrprzykład?	
1	1	$1 \to \sim 1$	$1 \to 0$	0	1	1	0	O tak	O nie
1	0	$1 \to \sim 0$	$1 \to 1$	1	0	1	0	O tak	O nie
0	1	$0 \to \sim 1$		1	1	0	1	O tak	O nie
0	0	$0 \to \sim 0$		1	0	0	1	O tak	O nie

Aby wykazać, że jest to schemat wnioskowań logicznie prawidłowych, musimy pokazać, że żaden z rzędów matrycy nie jest kontrprzykładem.

Czy rząd 1 jest kontrprzykładem? Nie, co prawda wniosek jest fałszywy, ale nie wszystkie przesłanki są prawdziwe (instancje pierwszej przesłanki $p \to \sim q$ są fałszywe).

Czy rząd 2 jest kontrprzykładem? Nie, z identycznego powodu (tym razem, instancje drugiej przesłanki q są fałszywe).

Czy rząd 3 jest kontrprzykładem? Nie, tym razem co prawda przesłanki są prawdziwe, ale wniosek nie jest fałszywy.

Czy rząd 4 jest kontrprzykładem? Nie, ani wniosek nie jest fałszywy, ani nie wszystkie przesłanki są prawdziwe.

Ponieważ żaden rząd matrycy logicznej nie jest rzędem kontrprzykładów, tj. nie zawiera prawdziwych przesłanek i fałszywego wniosku, zatem badany schemat jest logicznie prawidłowy.

Uwaga! Najczęstszym błędem przy badaniu logicznej prawidłowości jest szukanie nie tyle rzędu, który byłby kontrprzykładem, co raczej rzędu, w którym wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek też prawdziwy. Otóż znalezienie takiego rzędu nie jest ani warunkiem wystarczającym ani warunkiem koniecznym dla logicznej prawidłowości wnioskowania.

Ćwiczenie “Logiczna prawidłowość «na sucho»”

Dane są niżej matryce logiczne pewnych schematów wnioskowań. Stwierdź, które z reprezentowanych przez te matryce schematów są logicznie prawidłowe, a które logicznie nieprawidłowe:

(a)

	Przesłanka 1	Przesłanka 2	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	1	1	1	O tak	O nie
2	0	0	1	O tak	O nie
3	1	1	0	O tak	O nie
4	1	0	1	O tak	O nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:
O logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów
O logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, viz. rząd: __

(b)

	Przesłanka 1	Przesłanka 2	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	0	1	0	O tak	O nie
2	1	0	1	O tak	O nie
3	1	0	0	O tak	O nie
4	0	1	1	O tak	O nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:
O logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów
O logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, viz. rząd: __

(c)

	Przesłanka 1	Przesłanka 2	Przesłanka 3	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	0	0	0	0	O tak	O nie
2	1	0	0	1	O tak	O nie
3	0	1	1	0	O tak	O nie
4	1	0	0	1	O tak	O nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:
O logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów
O logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, viz. rząd: __

(d)

	Przesłanka	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	0	0	O tak	O nie
2	0	1	O tak	O nie
3	1	0	O tak	O nie
4	1	0	O tak	O nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:
O logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów
O logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, viz. rząd: __

Ćwiczenie "Logiczna prawidłowość – 1"

Zdecyduj, czy podane schematy wnioskowań są logicznie prawidłowe, czy nie.

(a) $\dfrac{p \rightarrow q}{\sim p \rightarrow \sim q}$ (b) $\dfrac{p \rightarrow q}{\sim q \rightarrow \sim p}$ (c) $\dfrac{p}{p \bullet q}$

(d) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (e) $\dfrac{p}{p \rightarrow q}$ (f) $\dfrac{p}{q \rightarrow p}$

9.1.4. Skrócona metoda zerojedynkowa w badaniu logicznej prawidłowości i nieprawidłowości wnioskowań

Logiczną prawidłowość i nieprawidłowość wnioskowań można też badać metodą skróconą.

<table>
<tr><th></th><th>Definicja</th><th>Operacjonalizacja</th><th colspan="2">Skrócona metoda</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Logiczna prawidłowość</td><td rowspan="2">Niemożliwe są fałszywe instancje wniosku, przy prawdziwych instancjach przesłanek tego schematu.</td><td rowspan="2">Nie istnieje rząd kontrprzykładów.</td><td rowspan="2">Spróbuj znaleźć rząd kontrprzykładów.</td><td>Jeżeli próba jest nieudana[*], to wnioskowanie jest logicznie prawidłowe.</td></tr>
<tr><td>Jeżeli próba jest udana, to wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe.</td></tr>
</table>

Musimy spróbować znaleźć rząd, będący kontrprzykładem dla logicznej prawidłowości wnioskowania, czyli taki rząd matrycy logicznej, w którym instancje schematów wszystkich przesłanek są prawdziwe, a instancje schematu wniosku są fałszywe. Jeżeli nasza próba uwieńczona będzie powodzeniem, to wykażemy tym samym, że wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe (bo istnieje kontrprzykład). Jeżeli nasza próba uwieńczona będzie niepowodzeniem – tj. jeżeli założenie, że istnieje kontrprzykład doprowadzi do sprzeczności – wówczas wykażemy tym samym, że wnioskowanie jest logicznie prawidłowe.

Prześledźmy to na powyższych przykładach.

Przykład 1

Dany jest następujący schemat wnioskowań.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow \sim q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

Aby stwierdzić, czy jest to schemat logicznie prawidłowy, czy nie, musimy spróbować poszukać kontrprzykładu, tj. takiej instancji wnioskowania, której przesłanki będą prawdziwe, a wniosek fałszywy:

	1				1		0
p	→	~	q		~	q	p

Po obliczeniu okaże się, że kontrprzykład można znaleźć, gdy zarówno pod p, jak i pod q, podstawimy wartość 0. Schemat ten jest zatem logicznie nieprawidłowy.

Przykład 2

Rozważmy teraz drugi rozważany wyżej schemat wnioskowań:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow {\sim}q \\ q \end{array}}{{\sim}p}$$

	1			1	0	
p	$\rightarrow$	$\sim$	q	q	$\sim$	p

Próba znalezienia kontrprzykładu kończy się niepowodzeniem. Pod q podstawić musimy 1. O wartości podstawianej pod zmienną p najłatwiej się przekonać z wniosku ${\sim}p$, który ma być fałszywy, a zatem pod p podstawić musimy wartość 1. Przy takim podstawieniu jednak okazuje się, że przesłanka pierwsza będzie fałszywa ($1 \rightarrow {\sim}1$ czyli $1 \rightarrow 0$ czyli 0), a nie prawdziwa, jak zakładaliśmy. Innymi słowy, nasza próba znalezienia kontrprzykładu doprowadziła do sprzeczności – wnioskujemy zatem, że nie ma kontrprzykładu dla tego schematu wnioskowań. Schemat ten jest zatem logicznie prawidłowy.

Ćwiczenie "Logiczna prawidłowość – 2"

Stosując skróconą metodę zerojedynkową, zbadaj, czy podane schematy wnioskowań są logicznie prawidłowe, czy nie. Aby zadanie ułatwić, przesłanki i wnioski zostały ułożone w odpowiednich kolumnach:

	Przesłanki:			Wniosek:
(1)	$p \equiv p$			p
(2)	$p \rightarrow q$	${\sim}p$		${\sim}q$
(3)	$p \vee q$	${\sim}q$		p
(4)	$p \rightarrow q$	${\sim}q$		${\sim}p$
(5)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow {\sim}q$		${\sim}r$
(6)	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$		$p \rightarrow r$
(7)	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$		$q \rightarrow r$
(8)	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$		$(p \vee q) \rightarrow r$
(9)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$q \rightarrow (p \rightarrow s)$		$p \rightarrow s$
(10)	$p \rightarrow q$	$(p \bullet q) \rightarrow r$	$p \rightarrow (r \rightarrow s)$	$p \rightarrow s$
(11)	$p \rightarrow q$	$r \rightarrow s$	$p \vee r$	$q \vee s$
(12)	$p \equiv p$			$p \rightarrow p$

Ćwiczenie “Logiczna prawidłowość – 3”

Zbadajcie, które z następujących wnioskowań są logicznie prawidłowe. Powinniście (i) dokonać symbolizacji podanego wnioskowania, (b) podać właściwy schemat wnioskowania, (c) skontruować matrycę logiczną dla tego schematu, (d) zdecydować, czy schemat jest logicznie prawidłowy, czy nie, stosownie decyzję uzasadniając.

(a) Jeżeli Monika Olejnik ma dobre źródła, to Andrzej Lepper albo zostanie zdymisjonowany albo wyjdzie z koalicji. Andrzej Lepper nie wyjdzie z koalicji. Zatem Monika Olejnik nie ma dobrych źródeł.

(b) Jeżeli Rosja wejdzie do Unii Europejskiej, to jeśli Rumunia wejdzie do Unii, to i Turcja wejdzie do Unii. Rumunia wejdzie do Unii. Zatem jeżeli Turcja nie wejdzie do Unii, to Rosja też nie wejdzie do Unii.

(c) Jeżeli Rosja nie wejdzie do Unii Europejskiej, to jeśli Rumunia wejdzie do Unii, to Turcja nie wejdzie do Unii. Rumunia wejdzie do Unii. Zatem jeżeli Turcja wejdzie do Unii, to Rosja też wejdzie do Unii.

(d) Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi. Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu. Zatem stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu, jeśli USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi.

(e) Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi, chyba że „oś państw zła” się poszerzy. Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu. Zatem jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi, ale stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu.

(f) Jeżeli ludzie są całkowicie racjonalni, to albo wszystkie ludzkie działania można z góry przewidzieć albo świat jest całkowicie deterministyczny. Nie wszystkie ludzkie działania można z góry przewidzieć. Zatem, jeżeli świat jest całkowicie deterministyczny, to ludzie nie są całkowicie racjonalni.

(g) Kowalski powinien złożyć formularz podatkowy 12A lub 12C tylko jeżeli w zeszłym roku złożył formularz 40B. Kowalski powinien złożyć formularz podatkowy 12A tylko jeżeli jego całkowite przychody wynosiły ponad 80.000,00 zł, a formularz podatkowy 12C tylko jeżeli jego całkowite przychody nie wynosiły więcej niż 80.000,00 zł. Zatem jeżeli przychody Kowalskiego wynosiły więcej niż 80.000,00zł, to powinien złożyć formularz 12A.

9.2. Wynikanie logiczne

Pojęcie wynika logicznego nie powinno stanowić niespodzianki, jeżeli opanowaliście pojęcie logicznej prawidłowości wnioskowań. Jest bowiem tak, że wnioskowanie jest logicznie prawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Definicja wynikania logicznego

Schemat zdaniowy γ wynika logicznie ze zbioru schematów zdaniowych $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w schematach $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma$, dawałaby prawdziwe instancje schematów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, a fałszywą instancję schematu γ.

Operacjonalizacja definicji wnioskowania logicznie prawidłowego

Schemat zdaniowy γ wynika logicznie ze zbioru schematów zdaniowych $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki rząd w łącznej matrycy logicznej dla tych schematów, w którym instancje $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ byłyby prawdziwe, a instancje γ – fałszywe.

Zatem aby wykazać, że pewien schemat zdaniowy γ wynika logicznie ze zbioru schematów $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, trzeba wykazać, że wnioskowanie:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_k \\ \hline \gamma \end{array}$$

jest logicznie prawidłowe.

9.3. Wzajemna niezgodność, wzajemne dopełnianie, wzajemna sprzeczność i logiczna niezależność

9.3.1. Zdania wzajemnie niezgodne (wykluczające się)

Intuicyjnie można powiedzieć, że zdania wzajemnie niezgodne (wykluczające się), to zdania, które nie mogą być współprawdziwe. Ponownie: zdania są wzajemnie niezgodne zawsze i tylko wtedy, gdy wzajemnie niezgodne są właściwe schematy logiczne tych zdań.

Definicja schematów wzajemnie niezgodnych

Schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie niezgodnych zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w tych schematach dałyby instancje prawdziwe wszystkich tych schematów.

Operacjonalizacja definicji schematów wzajemnie niezgodnych

Schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie niezgodnych zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki rząd w łącznej matrycy logicznej dla tych schematów, w którym instancje $\alpha_1, \ldots$ i α_k byłyby wszystkie prawdziwe.

Przykład

Rozważmy następujący przykład:

(1) Aldona nie zda logiki.
(2) Aldona zda logikę, choć nie zda psychologii.

Otóż, o tym, że są to w istocie zdania wzajemnie wykluczające się, przekonujemy się konstruując matrycę logiczną dla ich właściwych schematów logicznych:

p	q	$\sim p$		$p \bullet \sim q$		
1	1		0	$1 \bullet \sim 1$	$1 \bullet 0$	0
1	0		0	$1 \bullet \sim 0$	$1 \bullet 1$	1
0	1		1	$0 \bullet \sim 1$		0
0	0		1	$0 \bullet \sim 0$		0

Okazuje się, że nie ma rzędu w ich łącznej matrycy logicznej, w którym instancje tych schematów byłyby jednocześnie prawdziwe. Zdania (1) i (2) są zatem zdaniami wzajemnie niezgodnymi.

Zastosowanie skróconej metody zerojedynkowej

Aby zbadać, czy schematy są wzajemnie niezgodne możemy też użyć skróconej metody zerojedynkowej. Musimy próbować szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 1. Jeżeli nie można takich wartości znaleźć, badane schematy są wzajemnie niezgodne, a jeżeli takie wartości można znaleźć, to schematy nie są wzajemnie niezgodne.

9.3.2. Zdania wzajemnie dopełniające się

Zdania wzajemnie dopełniające się, to zdania, które nie mogą być współfałszywe.

Definicja schematów wzajemnie dopełniających się

Schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie dopełniających się zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w tych schematach dałyby instancje fałszywe wszystkich tych schematów.

Operacjonalizacja definicji schematów wzajemnie dopełniających się

Schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie dopełniających się zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki rząd w łącznej matrycy logicznej dla tych schematów, w którym instancje $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ byłyby wszystkie fałszywe.

Przykład

Rozważmy następujący przykład:

(3) Aldona zda logikę.
(4) Jeżeli Aldona zda logikę, to zda psychologię.

Otóż para zdań (3)-(4) ma tę ciekawą cechę, że nie mogą one być współfałszywe – nie ma rzędu w ich łącznej matrycy logicznej, w którym instancje tych schematów byłyby jednocześnie fałszywe.

p	q	p	$p \to q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Zdania (3) i (4) są zatem zdaniami wzajemnie dopełniającymi się.

Zastosowanie skróconej metody zerojedynkowej

Aby zbadać, czy schematy są wzajemnie dopełniające się musimy próbować szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 0. Jeżeli nie można takich wartości znaleźć, badane schematy są wzajemnie dopełniające się, a jeżeli takie wartości można znaleźć, to schematy nie są wzajemnie dopełniające się.

9.3.3. Zdania wzajemnie sprzeczne

Zdania wzajemnie sprzeczne to zdania, które są zarówno wzajemnie wykluczające się, jak i wzajemnie dopełniające się.

Definicja schematów wzajemnie sprzecznych

Schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie sprzecznych zawsze i tylko wtedy, gdy schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są zarazem wzajemnie dopełniające się jak i wzajemnie niezgodne.

Przykład

Rozważmy następujący przykład:

(5) Jeżeli Aldona zda logikę, to zda też psychologię.
(6) Aldona zda logikę, ale nie zda psychologii.

Otóż w matrycy logicznej dla pary zdań (5)-(6) zarówno nie ma rzędu, w którym instancje tych schematów byłyby oba prawdziwe, ani też nie ma rzędu, w których instancje tych schematów byłyby oba fałszywe:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \bullet \sim q$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Zdania (5) i (6) są zatem zdaniami wzajemnie sprzecznymi.

Zastosowanie skróconej metody zerojedynkowej

Aby zbadać, czy schematy są wzajemnie sprzeczne musimy (a) próbować szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 0, oraz (b) szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 1. Jeżeli nie można znaleźć ani wartości wspomnianych w (a), ani wartości wspomnianych w (b), to badane schematy są wzajemnie sprzeczne. Jeżeli można znaleźć albo wartości wspomniane w (a) albo wartości wspomniane w (b), wówczas schematy nie są wzajemnie sprzeczne.

9.3.4. Zdania logicznie niezależne

Zdania logicznie niezależne to zdania, które nie są ani wzajemnie wykluczające się, ani wzajemnie dopełniające się, a przy tym żadne z tych zdań nie wynika logicznie z pozostałych.

Definicja schematów logicznie niezależnych

Schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są schematami zdań logicznie niezależnych zawsze i tylko wtedy, gdy schematy $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (a) nie są wzajemnie wykluczające się, (b) nie są wzajemnie dopełniające się, (c) żaden ze schematów nie wynika logicznie z pozostałych.

Przykład

Najprostszym przykładem zdań logicznie niezależnych są zdania proste. Rozważmy jednak następujący przykład:

(7) Aldona nie zda logiki.
(8) Aldona zda logikę dokładnie wtedy, gdy Bogdan nie zda psychologii.

p	q	$\sim p$	$p \equiv \sim q$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

Otóż w matrycy logicznej dla schematów właściwych pary zdań (7)-(8) jest zarówno rząd, w którym instancje tych schematów są prawdziwe (rząd 3), jak i rząd, w którym instancje tych schematów są fałszywe (rząd 1). Nie są to więc ani zdania wzajemnie dopełniające się, ani zdania wykluczające się. Aby się przekonać, że są to istotnie zdania logicznie niezależne musimy też zbadać, czy $\sim p$ wynika logicznie z $p \equiv \sim q$ oraz czy $p \equiv \sim q$ wynika logicznie z $\sim p$.

Przypomnijmy sobie, że schemat α wynika logicznie ze schematu β wówczas, gdy nie ma rzędu w ich łącznej matrycy logicznej, w którym β miałoby prawdziwe instancje, a α – fałszywe instancje. Musimy zatem zapytać, czy istnieje rząd, w którym $\sim p$ ma prawdziwe instancje, a $p \equiv \sim q$ – fałszywe instancje? Odpowiedź jest pozytywna – rząd 4 spełnia ten warunek, co wystarcza by orzec, że $p \equiv \sim q$ nie wynika logicznie z $\sim p$. Zapytajmy zatem, czy istnieje rząd w którym $p \equiv \sim q$ ma prawdziwe, a $\sim p$ – fałszywe instancje? Odpowiedź jest pozytywna – rząd 2 spełnia ten warunek, co wystarcza by orzec, że $\sim p$ nie wynika logicznie z $p \equiv \sim q$.

Zdania (7) i (8) są zatem zdaniami logicznie niezależnymi.

Ćwiczenie „Wzajemne Wykluczanie/Dopełnianie/Sprzeczność/Niezależność"

Stwierdź, które z par zdań są wzajemnie niezgodne, które wzajemnie dopełniające się, które wzajemnie sprzeczne. Sprawdź też, czy ze zdania (1) wynika logicznie zdanie (2) oraz czy ze zdania (2) wynika logicznie zdanie (1). Stwierdź, czy zdania te są logicznie niezależne.

(a) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Ani LPR, ani Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.

(b) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Nie jest prawdą, że zarówno LPR jak i Samoobrona wyjdą z koalicji.

(c) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to LPR z koalicji nie wyjdzie.

(d) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli LPR nie wyjdzie z koalicji, to Samoobrona wyjdzie z koalicji.

(e) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) LPR nie wyjdzie z koalicji tylko jeśli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.

(f) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) LPR nie wyjdzie z koalicji jeśli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.

(g) (1) LPR lub Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) LPR i Samoobrona wyjdą z koalicji.

(h) (1) Albo LPR albo Samoobrona wyjdzie z koalicji, ale z koalicji nie wyjdą obie partie.
(2) LPR i Samoobrona wyjdą z koalicji.

(i) (1) LPR lub Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to Samoobrona wyjdzie z koalicji.

(j) (1) LPR i Samoobrona wyjdą z koalicji.
(2) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.

(k) (1) LPR lub Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) LPR nie wyjdzie z koalicji jeśli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.

(l) (1) Samoobrona wyjdzie z koalicji, a jeżeli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji, to LPR też nie wyjdzie z koalicji.
(2) LPR wyjdzie z koalicji, i jeżeli Samoobrona wyjdzie z koalicji, to LPR też wyjdzie z koalicji.

(m) (1) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji to albo Samoobrona też wyjdzie z koalicji albo będą wczesne wybory.
(2) LPR wyjdzie z koalicji, ale ani Samoobrona nie wyjdzie z koalicji, ani nie będzie wczesnych wyborów.

(n) (1) Jeżeli albo LPR nie wyjdzie z koalicji albo Samoobrona nie wyjdzie z koalicji, to nie będzie wczesnych wyborów.
(2) Nie jest prawdą ani to, że wczesne wybory odbędą się tylko jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, ani to, że wczesne wybory odbędą się tylko jeżeli Samoobrona wyjdzie z koalicji.

(o) (1) LPR nie wyjdzie z koalicji, a wczesne wybory odbędą się tylko jeżeli Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) Wczesne wybory odbędą się jeżeli LPR nie wyjdzie z koalicji; jednakże albo LPR wyjdzie z koalicji albo Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.

(p) (1) Jeżeli nie będzie wczesnych wyborów, to LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli nie będzie wczesnych wyborów, to Samoobrona wyjdzie z koalicji.