ROZWIĄZANIA ĆWICZEŃ

7. TAUTOLOGIE, KONTRTAUTOLOGIE I SCHEMATY LOGICZNIE NIEZDETERMINOWANE

Matryca dla schematu logicznie niezdeterminowanego $p \bullet \sim q$

p	q	$p \bullet \sim q$		
1	1	$1 \bullet \sim 1$	$1 \bullet 0$	0
1	0	$1 \bullet \sim 0$	$1 \bullet 1$	1
0	1	$0 \bullet \sim 1$	$0 \bullet 0$	0
0	0	$0 \bullet \sim 0$	$0 \bullet 1$	0

Praga jest stolicą Czech (1)	ale nieprawda, że	Lwów jest stolicą Polski (0)	☑ prawdziwe ☐ fałszywe
Żyrafy są gadami (0)	ale nieprawda, że	węże są gadami (1)	☐ prawdziwe ☑ fałszywe
Warszawa jest stolicą Polski (1)	ale nieprawda, że	Berlin jest stolicą Niemiec (1)	☐ prawdziwe ☑ fałszywe
Rekiny są ssakami (0)	ale nieprawda, że	węże są ssakami (0)	☐ prawdziwe ☑ fałszywe

Matryca dla schematu tautologii $p \vee \sim p$

p	$p \vee \sim p$		
1	$1 \vee \sim 1$	$1 \vee 0$	1
0	$0 \vee \sim 0$	$0 \vee 1$	1

Matryca dla schematu kontrtautologii $p \bullet \sim p$

p	$p \bullet \sim p$		
1	$1 \bullet \sim 1$	$1 \bullet 0$	0
0	$0 \bullet \sim 0$	$0 \bullet 1$	0

Matryca dla schematu kontrtautologii $p \equiv \sim p$

p	$p \equiv \sim p$		
1	$1 \equiv \sim 1$	$1 \equiv 0$	0
0	$0 \equiv \sim 0$	$0 \equiv 1$	0

Ćwiczenie „Tautologie – 1”

Stosując metodę zerojedynkową zbadaj, czy następujące schematy zdaniowe są schematami tautologicznymi, kontrtautologicznymi, czy logicznie niezdeterminowanymi. Możesz zastosować skróty.

(1)

p	$\sim(p \vee \sim p)$			
1	$\sim(1 \vee \sim 1)$		$\sim(1)$	0
1	$\sim(0 \vee \sim 0)$	$\sim(0 \vee 1)$	$\sim(1)$	0

Schemat ten jest
○tautologią
● kontrtautologią
○ logicznie niezdeterminowany

(2)

p	q	$p \to (p \bullet q)$		
1	1	$1 \to (1 \bullet 1)$	$1 \to (1)$	1
1	0	$1 \to (1 \bullet 0)$	$1 \to (0)$	0
0	1	$0 \to (0 \bullet 1)$		1
0	0	$0 \to (0 \bullet 0)$		1

Schemat ten jest
○ tautologią
○ kontrtautologią
● logicznie niezdeterminowany

(3)

p	q	$(p \bullet q) \to p$		
1	1	$(1 \bullet 1) \to 1$		1
1	0	$(1 \bullet 0) \to 1$		1
0	1	$(0 \bullet 1) \to 0$	$(0) \to 0$	1
0	0	$(0 \bullet 0) \to 0$	$(0) \to 0$	1

Schemat ten jest
● tautologią
○ kontrtautologią
○ logicznie niezdeterminowany

(4)

p	q	$((p \to q) \bullet (q \to p)) \to (p \vee q)$			
1	1	$((1 \to 1) \bullet (1 \to 1)) \to (1 \vee 1)$		$\to 1$	1
1	0	$((1 \to 0) \bullet (0 \to 1)) \to (1 \vee 0)$		$\to 1$	1
0	1	$((0 \to 1) \bullet (1 \to 0)) \to (0 \vee 1)$		$\to 1$	1
0	0	$((0 \to 0) \bullet (0 \to 0)) \to (0 \vee 0)$	$(1 \bullet 1) \to 0$	$1 \to 0$	0

Schemat ten jest
○ tautologią
○ kontrtautologią
● logicznie niezdeterminowany

(5)

p	q	r	$(p \bullet q) \equiv [((p \bullet r) \bullet q) \vee (p \bullet (\sim r \bullet q))]$			
1	1	1	$(1 \bullet 1) \equiv [((1 \bullet 1) \bullet 1) \vee (1 \bullet (\sim 1 \bullet 1))]$	$1 \equiv [1 \vee \ ]$		1
1	1	0	$(1 \bullet 1) \equiv [((1 \bullet 0) \bullet 1) \vee (1 \bullet (\sim 0 \bullet 1))]$	$1 \equiv [0 \vee (1 \bullet (1 \bullet 1))]$	$1 \equiv [1]$	1
1	0	1	$(1 \bullet 0) \equiv [((1 \bullet 1) \bullet 0) \vee (1 \bullet (\sim 1 \bullet 0))]$	$0 \equiv [0 \vee 0]$	$0 \equiv 0$	1
1	0	0	$(1 \bullet 0) \equiv [((1 \bullet 0) \bullet 0) \vee (1 \bullet (\sim 0 \bullet 0))]$	$0 \equiv [0 \vee 0]$	$0 \equiv 0$	1
0	1	1	$(0 \bullet 1) \equiv [((0 \bullet 1) \bullet 1) \vee (0 \bullet (\sim 1 \bullet 1))]$	$0 \equiv [0 \vee 0]$	$0 \equiv 0$	1
0	1	0	$(0 \bullet 1) \equiv [((0 \bullet 0) \bullet 1) \vee (0 \bullet (\sim 0 \bullet 1))]$	$0 \equiv [0 \vee 0]$	$0 \equiv 0$	1
0	0	1	$(0 \bullet 0) \equiv [((0 \bullet 1) \bullet 0) \vee (0 \bullet (\sim 1 \bullet 0))]$	$0 \equiv [0 \vee 0]$	$0 \equiv 0$	1
0	0	0	$(0 \bullet 0) \equiv [((0 \bullet 0) \bullet 0) \vee (0 \bullet (\sim 0 \bullet 0))]$	$0 \equiv [0 \vee 0]$	$0 \equiv 0$	1

Schemat ten jest: ● tautologią ○ kontrtautologią ○ logicznie niezdeterminowany

Ćwiczenie „Tautologie – 2”

	Tautologia	Kontrtautologia	Schemat logicznie niezdeterminowany
(1) $p \bullet p$			✓
(2) $p \vee p$			✓
(3) $p \rightarrow p$	✓		
(4) $\sim p \rightarrow p$			✓
(5) $\sim(p \bullet \sim p)$	✓		
(6) $\sim p$			✓
(7) p			✓
(8) $p \rightarrow (p \vee q)$	✓		
(9) $(p \vee q) \rightarrow p$			✓
(10) $((p \equiv q) \bullet (p \equiv \sim q)) \rightarrow p$	✓		
(11) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$			✓
(12) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$	✓		
(13) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$			✓
(14) $(p \rightarrow q) \bullet (p \bullet \sim q)$		✓	
(15) $(p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)$			✓
(16) $\sim[(p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)]$			✓
(17) $[(p \equiv q) \equiv r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$	✓		
(18) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$			✓

7.4.4. Przykłady

Przykład 1.

Schemat zdaniowy $\sim q \rightarrow \sim p$ jest logicznie niezdeterminowany, ponieważ w jego matrycy logicznej jest przynajmniej jeden rząd z wartością 0 i przynajmniej jeden rząd z wartością 1.
Zdanie „Jeżeli Kraków nie jest stolicą Polski, to Kraków nie jest siedzibą rządu RP” jest zdaniem przygodnie prawdziwym, ponieważ jest to zdanie *de facto* prawdziwe, którego schemat zdaniowy jest logicznie niezdeterminowany.

Przykład 2.

(a) Symbolizacja i obliczenie wartości logicznej:

$S \equiv \sim S$
$0 \equiv \sim 0$
$0 \equiv 1$
0

S: Prezydent Kwaśniewski jest szczupły

W ten sposób wykazaliśmy, że badane zdanie jest fałszywe.

(b) Właściwym schematem zdaniowym zdania „Prezydent Kwaśniewski jest szczupły dokładnie wtedy, gdy Prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły” jest:

$p \equiv \sim p$

Musimy zatem obliczyć wartości logiczne w następującej matrycy logicznej.

p	$p \equiv \sim p$		
1	$1 \equiv \sim 1$	$1 \equiv 0$	0
0	$0 \equiv \sim 0$	$0 \equiv 1$	0

Schemat zdaniowy $p \equiv \sim p$ jest kontrtautologią ponieważ we wszystkich rzędach jego matrycy logicznej otrzymujemy 0. Zdanie „Prezydent Kwaśniewski jest szczupły dokładnie wtedy, gdy Prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły” jest zdaniem logicznie fałszywym, ponieważ jego właściwy schemat zdaniowy jest kontrtautologią.

Ćwiczenie „Logiczna/Przygodna Prawda/Fałsz”

Zbadaj, czy następujące zdania są (a) prawdziwe, czy fałszywe, (b) czy ich prawdziwość fałszywość ma charakter przygodny czy logiczny. W odpowiedzi na pytanie (b) możesz odwołać się do wyników Ćwiczenia „Tautologie – 1”

		logicznie prawdziwe	przygodnie prawdziwe	przygodnie fałszywe	logicznie fałszywe
(1)	Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to Warszawa jest stolicą Polski.	✓			
(2)	Jeżeli Kraków jest stolicą Polski, to Kraków jest stolicą Polski.	✓			
(3)	Albo Poznań nie jest stolicą Polski, albo Poznań nie jest stolicą Polski.		✓		
(4)	Albo Warszawa nie jest stolicą Polski, albo Warszawa nie jest stolicą Polski.			✓	
(5)	Jeżeli liczba 10 jest podzielna przez 5 i 2, to 10 jest podzielna przez 5.	✓			
(6)	Jeżeli liczba 10 jest podzielna przez 5, to 10 jest podzielna przez 5 i 2.		✓		
(7)	Jeżeli albo Warszawa albo Kraków jest stolicą Polski, to Warszawa jest stolicą Polski.		✓		
(8)	Jeżeli albo Kraków albo Warszawa jest stolicą Polski, to Kraków jest stolicą Polski.			✓	
(9)	Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to albo Warszawa albo Kraków jest stolicą Polski.		✓		
(10)	Warszawa jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy ani Kraków ani Warszawa nie jest stolicą Polski.				✓

Ćwiczenie „Tautologie – 3”

Wiemy, że schemat α jest tautologią, schemat β jest kontrtautologią, schemat γ jest logicznie niezdeterminowany, a o schemacie ω nie wiemy nic. Czy możemy stwierdzić, że następujące schematy zdaniowe są schematami tautologicznymi, kontrtautologicznymi, lub logicznie niezdeterminowanymi?

		tautologia	kontrtautologia	schemat logicznie niezdeterminowany	nie można stwierdzić
(1)	⌈~α⌉		✓		
(2)	⌈~β⌉	✓			
(3)	⌈~γ⌉			✓	
(4)	⌈β • ω⌉		✓		
(5)	⌈γ • ω⌉				✓ Nie tautologia
(6)	⌈β ∨ ω⌉				✓
(7)	⌈γ ∨ ω⌉				✓ Nie kontrtautologia
(8)	⌈α → ω⌉				✓
(9)	⌈β → ω⌉	✓			
(10)	⌈γ → ω⌉				✓ Nie kontrtautologia
(11)	⌈ω → α⌉	✓			
(12)	⌈ω → β⌉				✓
(13)	⌈ω → γ⌉				✓ Nie kontrtautologia

Ćwiczenie „Tautologie – 4”

Wiemy, że schemat α jest tautologią, schemat β jest kontrtautologią, schemat γ jest logicznie niezdeterminowany, a o schemacie ω nie wiemy nic. W której sytuacji możemy stwierdzić, czy schemat ω jest schematem tautologicznym, kontrtautologicznym, czy logicznie niezdeterminowanym?

	ω jest:	tautologią	kontr-tautologią	logicznie niezdeter-minowane	nie można stwierdzić
(1)	$\ulcorner \sim\omega \urcorner$ jest tautologią		✓		
(2)	$\ulcorner \sim\omega \urcorner$ jest kontrtautologią	✓			
(3)	$\ulcorner \sim\omega \urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany			✓	
(4)	$\ulcorner \alpha \bullet \omega \urcorner$ jest tautologią	✓			
(5)	$\ulcorner \alpha \bullet \omega \urcorner$ jest kontrtautologią		✓		
(6)	$\ulcorner \alpha \bullet \omega \urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany			✓	
(7)	$\ulcorner \beta \bullet \omega \urcorner$ jest kontrtautologią				✓
(8)	$\ulcorner \gamma \bullet \omega \urcorner$ jest kontrtautologią		✓		
(9)	$\ulcorner \gamma \bullet \omega \urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany				✓ Nie kontr-tautologia
(10)	$\ulcorner \alpha \rightarrow \omega \urcorner$ jest tautologią	✓			
(11)	$\ulcorner \alpha \rightarrow \omega \urcorner$ jest kontrtautologią		✓		
(12)	$\ulcorner \alpha \rightarrow \omega \urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany			✓	
(13)	$\ulcorner \beta \rightarrow \omega \urcorner$ jest tautologią				✓
(14)	$\ulcorner \gamma \rightarrow \omega \urcorner$ jest tautologią				✓ Nie kontr-tautologia
(15)	$\ulcorner \gamma \rightarrow \omega \urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany				✓ Nie tau-tologia