5. OKREŚLANIE WARTOŚCI LOGICZNEJ ZDAŃ ZŁOŻONYCH

Temat, którym mamy się tu zająć jest kolejnym nudziarstwem – będziemy się uczyć techniki obliczania wartości logicznej zdań dowolnie złożonych. Po co? – możecie zapytać. Są dwa główne powody (jeśli nie liczyć tego, że jest to umiejętność wymagana w programie). Po pierwsze, nigdy nie wiemy kiedy ktoś – choćby przez przypadek – nie zaskoczy nas zdaniem *Dostaniesz piątkę z logiki tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie „Tylko jeżeli zarówno Warszawa leży nad Wisłą jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO, to nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii."* Niekiedy warto mieć niezawodne narzędzia określania wartości logicznej zdań. Po drugie, umiejętność określania wartości logicznej zdań pozwoli nam na wprowadzenie użytecznych technik określania pewnych logicznych własności par zdań (temat 6), zdań (temat 7) oraz wnioskowań (temat 8).

Cele

- określanie wartości logicznej zdań dowolnie złożonych
- stosowanie uzasadnionych skrótów w określaniu wartości logicznej

Uwaga! Dla wielu osób nie będzie konieczne zrobienie wszystkich ćwiczeń z tego Tematu. Spróbujcie parę przykładów z każdego ćwiczenia.

Uwagi proszę kierować na adres:
kpaprzycka@uw.edu.pl

5.1. Przypomnienie

5.1.1. Symbole w rachunku zdań

- Spójniki (funktory) zdaniowe: ~, •, ∨, ≡, →
- Stałe zdaniowe: A, B, C, D, ...
    - Stałe zdaniowe odpowiadają zdaniom prostym w języku naturalnym.
- Zmienne zdaniowe: *p, q, r, s, ...*
    - Pod zmienne zdaniowe można podstawić dowolne zdanie, proste lub złożone
- Nawiasy: (), [], {}

5.1.2. Zdania poprawnie skonstruowane

Następujące zdania są poprawnie skonstruowane:

~~A   ~(~A ∨ ~(B ∨ ~C))   (~~(A ≡ B) ≡ (~~B ≡ A))

Nie są zdaniami poprawnie skonstruowanymi m.in. następujące bohomazy:

A~B   ~~A ∨ ~B → ~C   ~~(A ≡ (B ≡ (~~B ≡ A

Definicja (indukcyjna) poprawnie skonstruowanego zdania

(0) Zdania proste – np. A, B, C, D – są poprawnie skonstruowanymi zdaniami.
(1a) Jeżeli *p* jest zdaniem poprawnie skonstruowanym, to zdaniem poprawnie skonstruowanym jest również ~*p*.
(1b) Jeżeli *p* i *q* są zdaniami poprawnie skonstruowanymi, to zdaniem poprawnie skonstruowanym jest również (*p* ∨ *q*), (*p* • *q*), (*p* → *q*), (*p* ≡ *q*).
(2) Tylko zdania wymienione w punktach (1a)-(1b) są zdaniami poprawnie skonstruowanymi.

Jest to tzw. definicja indukcyjna. W jej członach (1a)-(1b) bowiem zakłada się pojęcie definiowane, a mianowicie pojęcie zdania poprawnie skonstruowanego, choć zastosowane do wcześniejszego etapu w konstrukcji zdania (to ważne, bo to ratuje tę definicję przed zarzutem błędnego koła). Należy zwrócić uwagę, że podczas, gdy zdanie ~~A jest zdaniem poprawnie skonstruowanym, to zdanie ~B ∨ (A • B) ściśle rzecz ujmując nie jest zdaniem poprawnie skonstruowanym – byłoby nim zdanie (~B ∨ (A • B)). Żeby jednak nie mnożyć nawiasów ponad potrzebę w praktyce wprowadzamy konwencję pomijania najbardziej zewnętrznych nawiasów według reguły:

(r) Jeżeli zdanie o kształcie (ξ) jest zdaniem poprawnie skonstruowanym, to wolno opuścić nawiasy i zapisać to zdanie w formie uproszczonej ξ.

Należy zwrócić uwagę, że zdanie ξ, które nie zawiera nawiasów najbardziej zewnętrznych nawiasów nie jest na mocy reguły (r) zdaniem poprawnie skonstruowanym, co jest ważne, gdyż inaczej mogłoby wchodzić (bez nawiasów) w proces konstrukcji zdań.

5.1.3. Matryce logiczne

Wypełnijcie matryce logiczne i sprawdźcie, czy zrobiliście to poprawnie.

p	~*p*
1	
0	

p	*q*	*p* • *q*
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	*q*	*p* ∨ *q*
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	*q*	*p* ≡ *q*
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	*q*	*p* → *q*
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

5.2. Określanie wartości logicznej zdań złożonych (bez negacji)

Określanie wartości logicznie zdań złożonych nie jest trudne – trzeba jedynie trochę poćwiczyć i uważać, żeby nie popełniać błędów. Aby posiąść tę umiejętność musicie:

- znać matryce logiczne dla wszystkich spójników zdaniowych
- umieć wskazać spójnik główny dla dowolnego zdania.

Przykład 1

W poniższych przykładach zakładamy, że zdania proste A, B i C są prawdziwe, natomiast zdania proste K, L i M są fałszywe. Jaka w takim razie jest wartość logiczna zdania (A ∨ M) • B?

Ponieważ wartość logiczna zdań złożonych w logice zdań jest zdeterminowana przez wartość logiczną zdań prostych, musimy najpierw podstawić odpowiednie wartości logiczne zdań prostych – zachowując wszystkie spójniki zdaniowe i nawiasy zdania wyjściowego:

$$(1 \vee 0) \bullet 1$$

Podstawową zasadą jest, aby najpierw obliczyć wartość logiczną najbardziej wewnętrznych nawiasów – w powyższym wypadku jedynego nawiasu. Ma to głęboki sens, bo przecież chcemy obliczyć wartość zdania, które jest koniunkcją, ale choć mamy daną wartość logiczną drugiego członu koniunkcji, to wartość logiczna pierwszego członu musi dopiero zostać obliczona. Pierwszym członem koniunkcji jest alternatywa, której pierwszy człon jest prawdziwy, a drugi fałszywy. Znajomość matrycy logicznej dla alternatywy pozwala obliczyć jej wartość – będzie ona prawdziwa, co zapisujemy w sposób następujący (we wstępnych stadiach obliczeń dodaję klamry dla lepszej wizualizacji tego, co jest obliczane i w jakiej kolejności, ale nie są one konieczne):

$$\begin{array}{l} \underbrace{(1 \vee 0)} \bullet 1 \\ \quad (1) \quad \bullet 1 \end{array}$$

Czasami warto zachować nawiasy wokół właśnie obliczonej wartości logicznej, a więc `(1)` jako przypomnienie, że ta wartość została obliczona na podstawie nawiasu `(1 ∨ 0)`. Jednakże powyższy zapis jest równoważny zapisowi:

$$\begin{array}{l} \underbrace{(1 \vee 0)} \bullet 1 \\ \quad\; 1 \quad\;\; \bullet 1 \end{array}$$

Zwróćcie uwagę, że wartość logiczna drugiego członu koniunkcji zostaje po prostu przepisana.

Gdy mamy już wartość logiczną obu członów koniunkcji, możemy obliczyć wartość logiczną koniunkcji, która będzie w tym wypadku prawdziwa:

$$\underbrace{1 \quad \bullet 1}_{1}$$

A tak wygląda zapis obliczenia bez komentarzy:

$$\begin{array}{l} \underbrace{(1 \vee 0)} \bullet 1 \\ \quad \underbrace{(1) \quad \bullet 1}_{1} \end{array}$$

i bez klamr:

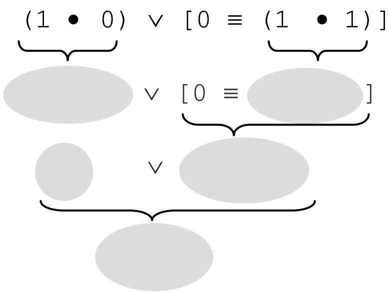
$$\begin{array}{l} (1 \vee 0) \bullet 1 \\ \quad (1) \quad \bullet 1 \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

Przykład 2

Spróbuj samodzielnie obliczyć wartość logiczną następującej alternatywy.

(A • M) ∨ [M ≡ (A • B)]

Najpierw podstawiamy wartości logiczne za stałe logiczne – pamiętając o pozostawieniu wszystkich spójników zdaniowych i nawiasów:



Zaczynamy od najbardziej wewnętrznych nawiasów: koniunkcja `(1 • 0)` jest fałszywa, a koniunkcja `(1 • 1)` – prawdziwa:

```
(1 • 0) ∨ [0 ≡ (1 • 1)]
  (0)   ∨ [0 ≡   (1)]
```

W następnym kroku możemy tylko skopiować wartość logiczną pierwszego członu alternatywy, natomiast obliczamy wartość logiczną drugiego członu alternatywy, którym jest równoważność `[0 ≡ 1]`, która jest fałszywa:

```
  (0)   ∨ [0 ≡ (1)]
   0    ∨   [0]
```

W ostatnim kroku możemy obliczyć wartość logiczną alternatywy, która jest fałszywa.

Podsumowując:

```
(1 • 0) ∨ [0 ≡ (1 • 1)]
  (0)   ∨ [0 ≡   (1)]
   0    ∨   [0]
        0
```

bez klamr:

```
(1 • 0) ∨ [0 ≡ (1 • 1)]
  (0)   ∨ [0 ≡   (1)]
   0    ∨   [0]
        0
```

Przykład 3

Obliczmy wartość logiczną następującej implikacji:

$$\{(A \to M) \equiv [N \lor (A \bullet B)]\} \to [M \to (A \to N)]$$

Podstawiamy dane wcześniej wartości logiczne:

$$\{(1 \to 0) \equiv [0 \lor (1 \bullet 1)]\} \to [0 \to (1 \to 0)]$$

$$\{ \qquad \equiv [0 \lor \qquad]\} \to [0 \to \qquad]$$

$$\{ \qquad \equiv \qquad \} \to$$

$$\to$$

Ponownie zaczynamy od najbardziej wewnętrznych nawiasów:

$$\{\underbrace{(1 \to 0)} \equiv [0 \lor \underbrace{(1 \bullet 1)}]\} \to [0 \to \underbrace{(1 \to 0)}]$$

$$\{ \quad (0) \quad \equiv [0 \lor \quad (1) \quad]\} \to [0 \to \quad (0) \quad]$$

Po usunięciu zbędnych nawiasów mamy:

$$\{0 \equiv [0 \lor 1]\} \to [0 \to 0]$$

Ponownie obliczamy najbardziej wewnętrzne nawiasy:

$$\{0 \equiv \underbrace{[0 \lor 1]}\} \to \underbrace{[0 \to 0]}$$

$$\{0 \equiv \quad [1] \quad \} \to \quad [1]$$

Teraz możemy obliczyć wartość logiczną poprzednika głównej implikacji

$$\underbrace{\{0 \equiv \quad [1] \quad \}} \to \quad [1]$$

$$\{0\} \qquad \to \qquad 1$$

a w takim razie możemy ustalić, że implikacja ta jest prawdziwa.

Podsumowując:

$$\{\underbrace{(1 \to 0)} \equiv [0 \lor \underbrace{(1 \bullet 1)}]\} \to [0 \to \underbrace{(1 \to 0)}]$$

$$\{ \quad (0) \quad \equiv \underbrace{[0 \lor \quad (1) \quad]}\} \to \underbrace{[0 \to \quad (0) \quad]}$$

$$\underbrace{\{ \quad (0) \quad \equiv \quad [1] \quad \}} \to \quad [1]$$

$$\underbrace{\{0\} \qquad \to \qquad [1]}$$

$$1$$

Ćwiczenie „Wartości logiczne – 1”

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń.

a. $(1 \bullet 0) \vee (0 \rightarrow 0)$

$\vee$

b. $1 \bullet (1 \vee (0 \rightarrow 0))$

$1 \bullet (1 \vee \quad)$

$1 \bullet$

c. $((1 \bullet 1) \vee 0) \rightarrow 0$

$(\quad \vee 0) \rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

d. $1 \bullet ((1 \vee 0) \rightarrow 0)$

$1 \bullet (\quad \rightarrow 0)$

$1 \bullet$

e. $(1 \rightarrow 0) \bullet ((1 \bullet 0) \rightarrow 0)$

$\bullet \; (\quad \rightarrow 0)$

$\bullet$

f. $(1 \equiv (1 \vee 0)) \rightarrow 0$

$(1 \equiv \quad) \rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

g. $(0 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 0)$

$\rightarrow$

h. $0 \rightarrow (0 \rightarrow (0 \rightarrow 0))$

$0 \rightarrow (0 \rightarrow \quad)$

$0 \rightarrow$

i. $((0 \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow 0$

$(\quad \rightarrow 0) \rightarrow 0$

$\rightarrow 0$

j. $((0 \rightarrow 1) \rightarrow 0) \equiv (0 \equiv 0)$

$(\quad) \rightarrow 0) \equiv$

$\equiv$

Ćwiczenie „Wartości logiczne – 2”

Obliczcie wartość logiczną następujących schematów prawdziwościowych.

a. (0 • 1) ∨ (0 → 0)

b. 1 • (1 ∨ (0 → 0))

c. ((0 • 1) ∨ 0) → 0

d. 1 • ((1 ∨ 0) → 0)

e. (0 → 1) → ((1 • 0) → 0)

f. (0 ∨ (1 • 0)) → (1 • 0)

g. (0 → 0) → (0 → 1)

h. 1 → (0 → (0 → 1))

i. ((0 → 0) → 0) → 0

j. ((0 ∨ 1) → 0) → (1 → 0)

k. $[((1 \bullet 0) \bullet 0) \equiv (1 \vee 0)] \rightarrow (1 \bullet (0 \vee 0))$

l. $((1 \bullet 0) \bullet 1) \equiv [(1 \vee 0) \rightarrow (1 \bullet (0 \vee 0))]$

m. $((1 \equiv 0) \rightarrow (0 \equiv 0)) \bullet [(0 \rightarrow 0) \vee (1 \rightarrow ((1 \bullet 0) \equiv 0))]$

n. $(0 \equiv 0) \bullet \{[(0 \vee 0) \rightarrow 0] \equiv [1 \rightarrow [((0 \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow 0]]\}$

5.3. Określanie wartości logicznej zdań złożonych (z uwzględnieniem negacji)

Uwzględnienie negacji w określaniu wartości logicznej zdań złożonych nie jest trudne. Należy jedynie zawsze pamiętać o tym, co jest zdaniem negowanym. Rozpoczniemy od prostych przykładów.

5.3.1. Negacje jednokrotne

W poniższych przykładach ponownie zakładamy, że zdania proste A, B i C są prawdziwe, natomiast zdania proste K, L i M są fałszywe.

Przykład 1 i 2. Jaką wartość logiczną mają zdania: ~(A → B) oraz ~A → B?

Ponownie przepisujemy wszystkie symbole, podstawiając zamiast zdań prostych ich wartości logiczne:

$\sim(A \to B)$

$\sim(1 \to 1)$

Zdanie ~(A → B) jest negacją implikacji. Zanim określimy wartość logiczną negacji musimy określić wartość logiczną implikacji. Implikacja o prawdziwym poprzedniku i następniku jest prawdziwa, a zatem:

$$\sim(\underbrace{1 \to 1})$$

$$\sim(1)$$

Stąd już prosto wnioskujemy, że zdanie ~(A → B) jest fałszywe. W skrócie:

$$\underbrace{\sim(\underbrace{1 \to 1})}$$

$$0$$

$\sim A \to B$

$\sim 1 \to 1$

Zdanie ~A → B jest implikacją, której poprzednik jest negacją. Zanim określimy wartość logiczną implikacji musimy określić wartość logiczną jej poprzednika, który jest negacją zdania prawdziwego, a więc jest fałszywy:

$$\underbrace{\sim 1} \to 1$$

$$0 \to 1$$

Stąd już prosto wnioskujemy, że zdanie ~A → B jest prawdziwe. W skrócie:

$$\underbrace{\underbrace{\sim 1} \to 1}$$

$$1$$

Ćwiczenie „Wartości logiczne – 3”

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń.

```
1. ~1 ∨ (~1 → 0)
      ∨ (   → 0)
      ∨
```

```
2. ~(1 ≡ 1) ∨ ~(0 ≡ 0)
   ~        ∨ ~
            ∨
```

```
3. ~(1 → 1) ∨ (~0 → 0)
   ~        ∨ (   → 0)
            ∨
```

```
4. (~1 • ~1) ∨ ~(0 ≡ 0)
   (   •   ) ∨ ~
             ∨
```

```
5. ~1 ≡ (~1 ∨ (~0 → 0))
      ≡ (   ∨ (   → 0))
      ≡ (   ∨          )
      ≡
```

```
6. (1 ≡ 1) • (~1 ≡ (~1 → 0))
           • (   ≡ (   → 0))
           • (   ≡          )
           •
```

```
7. ~(0 ≡ 1) → ~(0 ∨ (1 → 0))
   ~        → ~(0 ∨        )
            → ~
            →
```

```
8. ~[(0 ≡ 0) ∨ ~(0 ∨ 0)] ≡ (1 • 0)
   ~[        ∨ ~       ] ≡
   ~[        ∨         ] ≡
                 ~       ≡
                         ≡
```

Ćwiczenie „Wartości logiczne – 4”

Obliczcie wartość logiczną następujących schematów prawdziwościowych.

a. $\sim 1 \vee 1$

b. $\sim(1 \vee 1)$

c. $\sim 1 \vee \sim 1$

d. $\sim(1 \rightarrow 1)$

e. $\sim 1 \rightarrow 1$

f. $\sim 1 \rightarrow \sim 1$

g. $\sim 1 \vee (\sim 1 \rightarrow 0)$

h. $\sim 0 \rightarrow \sim(1 \equiv 0)$

i. $(\sim 1 \rightarrow \sim 1) \vee 0$

j. $\sim(1 \bullet 1) \rightarrow 0$

k. $(\sim 0 \vee \sim 0) \bullet (\sim 1 \vee \sim 1)$

l. $\sim(0 \vee 0) \bullet \sim(0 \equiv 1)$

m. $\sim 0 \rightarrow [\sim 0 \bullet (\sim 1 \vee \sim 1)]$

n. $\sim 0 \bullet \sim[0 \vee (1 \equiv 1)]$

o. $[\sim 1 \equiv (\sim 0 \bullet \sim 1)] \rightarrow \sim 1$

p. $\sim 0 \bullet \sim [0 \vee \sim (1 \vee 0)]$

q. $(\sim 0 \bullet \sim 1) \equiv \sim (1 \equiv \sim 0)$

r. $\sim (0 \vee \sim 0) \rightarrow \sim (0 \vee \sim 1)$

s. $\sim [\sim (1 \equiv 0) \bullet \sim 0] \vee \sim 1$

t. $\sim [\sim (\sim 1 \vee \sim 0) \bullet \sim 0] \rightarrow \sim 1$

u. $\sim 1 \vee \sim [\sim 0 \bullet \sim (1 \rightarrow \sim 0)]$

w. $\sim \{\sim 1 \vee \sim [\sim 0 \bullet \sim (1 \rightarrow \sim 0)]\}$

x. ~{~1 ≡ ~[~1 ∨ ~(~0 • ~0)]}   y. ~(~1 ∨ ~0) ≡ ~[0 ≡ ~(0 • ~0)]

5.3.2. Negacje wielokrotne

Niech A będzie zdaniem prawdziwym. Wówczas negacja A jest oczywiście fałszywa:

$\underbrace{\sim 1}_{0}$

Negacja negacji A będzie natomiast prawdziwa, co możemy wykazać w następujący sposób:

$\sim\underbrace{\sim 1}$

$\underbrace{\sim 0}$

1

Potrójna negacja zdania A będzie znów fałszywa:

$\sim\sim\underbrace{\sim 1}$

$\sim\underbrace{\sim 0}$

$\underbrace{\sim 1}$

0

I tak dalej.

Ćwiczenie „Negacje wielokrotne – 1”

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń.

a. $\sim\underbrace{\sim 0}$

~

b. $\sim\underbrace{\sim 1}$

~

c. $\sim\sim\underbrace{\sim 0}$

~~

~

d. $\sim\sim\underbrace{\sim 1}$

~~

~

5.3.3. Negacje wielokrotne w zdaniach złożonych

Należy pamiętać, że znak negacji dotyczy tego, co występuje bezpośrednio po tym znaku. W zdaniu ~A negowane jest zdanie proste A. W zdaniu ~(~(A • C) ∨ B) negowane jest zdanie znajdujące się w nawiasie, a więc alternatywa ~(A • C) ∨ B. Natomiast w zdaniu ~~A pierwszy znak negacji dotyczy tego, co po nim następuje, a więc zdania ~A. Wreszcie w zdaniu ~(~A ∨ B) – pierwszy znak negacji dotyczy ponownie nawiasu, w którym znajduje się alternatywa ~A ∨ B.

(1)

~~A • M

Zdanie (1) jest koniunkcją pewnego zdania prostego M i podwójnej negacji innego zdania prostego A.

(2)

~~(A • M)

Zdanie (2) jest podwójną negacją (negacją negacji) koniunkcji dwóch zdań prostych A i M.

(3)

~(~A • M)

Zdanie (3) jest negacją koniunkcji zdania prostego M oraz negacji innego zdania prostego A.

Różnice w strukturze logicznej tych zdań będą też odzwierciedlone w sposobie obliczania ich wartości logicznej.

```
~~1 • 0
~0  • 0
1   • 0
   0
```

```
~~(1 • 0)
~~(0)
~1
0
```

```
~(~1 • 0)
~(0  • 0)
~(0)
1
```

Ćwiczenie „Negacje wielokrotne – 2”

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń.

```
1. ~1 → ~~0
      → ~
      →
```

```
2. ~~(1 ≡ 0)
   ~~
   ~
```

```
3. ~(~1 ≡ 0)
   ~(   ≡ 0)
   ~
```

```
4. ~(~1 ∨ ~0)
   ~(   ∨   )
   ~
```

```
5. ~~1 ∨ ~~0
   ~   ∨ ~
       ∨
```

```
6. ~(~0 → 0)
   ~(   → 0)
   ~
```

Ćwiczenie „Wartości logiczne – 5”

Obliczcie wartość logiczną następujących schematów prawdziwościowych.

a. `~~1 ∨ ~~0`

b. `~(~1 ∨ ~0)`

c. `~~(1 ∨ ~1)`

d. `~(~1 ∨ ~1)`

e. `~~~0 → ~~~~1`

f. `~~~(0 → ~1)`

g. `(0 → 0) → ~[~(~1 ≡ ~0) • ~0]`

h. `~[~(~1 • 1) → ~0] ≡ ~(1 ∨ ~0)`

i. `~(1 • ~1) → ~(~0 ∨ ~0)`

j. `~[(~1 ∨ ~1) • ~(0 ∨ ~0)]`

5.4. Stosowanie skrótów w określaniu wartości logicznej

Rozważmy następujący schemat obliczenia wartości logicznej:

$0 \rightarrow \sim[(\sim(1 \bullet 0) \rightarrow (\sim 0 \vee \sim 1)) \equiv (\sim 1 \rightarrow \sim(0 \vee 0))]$

Otóż zamiast skrupulatnie obliczać wartość logiczną następnika, możemy od razu stwierdzić, że zdanie, którego wartość logiczna jest w ten sposób przedstawiona, musi być prawdziwe. Dzieje się tak dlatego, że każda implikacja o fałszywym poprzedniku będzie prawdziwa – niezależnie od tego, czy następnik jest fałszywy, czy prawdziwy. A zatem na mocy matrycy logicznej dla implikacji:

$$\underbrace{0 \rightarrow \sim[(\sim(1 \bullet 0) \rightarrow (\sim 0 \vee \sim 1)) \equiv (\sim 1 \rightarrow \sim(0 \vee 0))}_{1}]$$

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ćwiczenie „Podstawy skrótów"

Uzupełnij następujące twierdzenia będące podstawą możliwości lub niemożliwości stosowania skrótów w określaniu wartości logicznej zdań.

(a)

p	q	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli przynajmniej jeden z członów koniunkcji jest prawdziwy, to koniunkcja jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(b)

p	q	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli przynajmniej jeden z członów koniunkcji jest fałszywy, to koniunkcja jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(c)

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli przynajmniej jeden z członów alternatywy jest prawdziwy, to alternatywa jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(d)

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli przynajmniej jeden z członów alternatywy jest fałszywy, to alternatywa jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(e)

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli poprzednik jest prawdziwy, to implikacja jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(f)

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli poprzednik jest fałszywy, to implikacja jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(g)

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli następnik jest prawdziwy, to implikacja jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(h)

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli następnik jest fałszywy, to implikacja jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(i)

p	q	$p \equiv q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli pierwszy człon równoważności jest prawdziwy, to równoważność jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(j)

p	q	$p \equiv q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli pierwszy człon równoważności jest fałszywy, to równoważność jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(k)

p	q	$p \equiv q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli drugi człon równoważności jest prawdziwy, to równoważność jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

(l)

p	q	$p \equiv q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli drugi człon równoważności jest fałszywy, to równoważność jest:

- ❍ prawdziwa
- ❍ fałszywa
- ❍ nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

Ćwiczenie „Skróty – 1”

Zastosuj uzasadnione skróty w określaniu wartości logicznej zdań złożonych.

a. $0 \rightarrow [0 \equiv (0 \vee (1 \bullet 0))]$

b. $[0 \equiv (1 \vee (0 \bullet 1))] \rightarrow 1$

c. $0 \bullet [(0 \equiv 0) \vee (1 \rightarrow 1)]$

d. $1 \vee [1 \equiv {\sim}(1 \bullet (1 \bullet 1))]$

e. ${\sim}1 \bullet [(1 \rightarrow 1) \vee (1 \rightarrow 1)]$

f. ${\sim}1 \rightarrow [1 \vee {\sim}(0 \rightarrow (0 \rightarrow 0))]$

g. ${\sim}0 \rightarrow [(1 \rightarrow ({\sim}1 \bullet {\sim}1) \vee {\sim}0]$

h. ${\sim}0 \equiv [{\sim}1 \bullet {\sim}(1 \rightarrow (0 \rightarrow 1))]$

i. $[0 \equiv (1 \vee (0 \bullet 1))] \rightarrow {\sim}(0 \vee 0)$

j. ${\sim}(1 \vee 1) \bullet [(0 \equiv 1) \bullet (1 \equiv 1)]$

Ćwiczenie „Skróty - 2”

Zastosuj uzasadnione skróty w określaniu wartości logicznej zdań złożonych. Niech zdania A i B będą prawdziwe, a zdania K i L – fałszywe. Nie jest znana wartość logiczna zdań G i H. Czy można stwierdzić, jaka jest wartość logiczna następujących zdań:

1. $A \vee G$

2. $K \vee G$

3. $A \bullet G$

4. $K \bullet G$

5. $A \bullet (K \vee G)$

6. $A \vee (K \vee G)$

7. $K \bullet (K \vee G)$

8. $K \vee (K \bullet G)$

9. $(A \bullet K) \rightarrow G$

10. $A \rightarrow (K \bullet G)$

11. $(A \vee K) \rightarrow G$

12. $A \rightarrow (K \vee G)$

13. $(G \vee \sim G) \rightarrow K$

14. $\sim(A \vee G) \rightarrow [\sim(H \vee G) \equiv \sim A]$

Ćwiczenie „Wartości logiczne – 6”

Określ wartość logiczną zdania następujących zdań najpierw kierując się intuicjami a następnie stosując poznaną metodę (najpierw dokonaj symbolizacji tych zdań, określ wartość logiczną zdań prostych, a następnie oblicz wartość logiczną zdań złożonych).

Symbolizacja	Obliczenie wartości logicznej	Zdanie jest:

(a) Stolicą Polski jest Poznań lub Warszawa.

O prawdziwe
O fałszywe

(b) Stolicą Polski jest zarówno Poznań jak i Warszawa.

O prawdziwe
O fałszywe

(c) Stolicą Polski nie jest ani Poznań ani Warszawa.

O prawdziwe
O fałszywe

(d) Stolicą Polski nie jest zarówno Poznań jak i Warszawa.

O prawdziwe
O fałszywe

(e) Jeżeli Poznań jest stolicą Polski, to Warszawa nie jest stolicą Polski.

O prawdziwe
O fałszywe

(f) Jeżeli stolicą Polski nie jest ani Poznań ani Berlin, to nie jest nią też Warszawa.

O prawdziwe
O fałszywe

(g) Nie jest prawdą, że ani Poznań ani Berlin ani Warszawa nie jest stolicą Polski, ale nie jest też prawdą, że zarówno Poznań, Berlin jak i Warszawa są stolicą Polski.

O prawdziwe
O fałszywe

Ćwiczenie „Długie Zdanie”

Określ wartość logiczną długiego zdania ze wstępu: „Tylko jeżeli zarówno Warszawa leży nad Wisłą jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim ZOO, to nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii.” Dla uproszczenia dociekań dodaję, że Poznań nie jest stolicą Polski, jest miastem położonym nad Wartą, w którym jeżdżą tramwaje i w którym są dwa ogrody zoologiczne.