15. DOWODZENIE VI
WTÓRNE REGUŁY WNIOSKOWANIA I REGUŁY PODSTAWIANIA

W systemie SD dla każdego spójnika istnieje reguła wprowadzania i reguła eliminacji tegoż spójnika. Niemniej jednak dowodzenie za pomocą jedenastu reguł pierwotnych bywa uciążliwe. Dlatego ten podstawowy repertuar reguł pierwotnych często bywa uzupełniany wtórnymi regułami inferencji (opartymi na dowodzie logicznego wynikania) oraz regułami podstawiania (opartymi na dowodzie logicznej równoważności).

Cele

- Pojęcie wtórnych reguł inferencji.
- Rozróżnienie reguł inferencji i reguł podstawiania.

15.1. Wtórne reguły wnioskowania

Poznaliśmy już przykład wtórnej reguły inferencji – była nią regułą MTP.

i.	$p \vee q$		*i.*	$p \vee q$	
j.	$\sim q$		*j.*	$\sim p$	
➢	p	MTP *i*, *j*	➢	q	MTP *i*, *j*

Możemy teraz dowieść, że reguła MTP jest istotnie regułą wtórną dla systemu SD. Aby to uczynić, musimy wykazać, że wniosek uprawomocniony przez regułę MTP można wyprowadzić z przesłanek *i* oraz *j* za pomocą wyłącznie reguł pierwotnych – nie używając MTP.

i	$\mid p \vee q$	
j	$\mid \sim q$	
+1	$\mid \quad \mid p$	Zał. ($\vee$Elim)
+2	$\mid \quad \mid p$	R +1
+3	$\mid \quad \mid q$	Zał. ($\vee$Elim)
+4	$\mid \quad \mid \quad \mid \sim p$	Zał. (~Elim)
+5	$\mid \quad \mid \quad \mid \sim q$	R *j*
+6	$\mid \quad \mid \quad \mid q$	R +3
+7	$\mid \quad \mid p$	~Elim (+4)-(+5), (+4)-(+6)
+8	$\mid p$	$\vee$Elim *i*, (+1)-(+2), (+3)-(+7)

W ten sposób przedstawiamy ciąg kroków, którymi moglibyśmy zastąpić każde zastosowanie reguły MTP.

Reguły wtórne to po prostu dodatkowe reguły, które wolno dołączyć do systemu, o ile można udowodnić za pomocą reguł wyłącznie pierwotnych, że wniosek uprawomocniony przez regułę wtórną wynika logicznie z przesłanek zakładanych przez tę regułę.

Inną często dodawaną regułą jest reguła zwana *modus tollendo tollens:*

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$\sim r$	
➢	$\sim p$	MTT i, j

Wprowadza się też zwykle regułę sylogizmu hipotetycznego:

$i.$	$p \to q$	
$j.$	$q \to r$	
➢	$p \to r$	HS i, j

Ćwiczenie 15.A

Dowiedź, że następujące reguły inferencji mogłyby być dodane jako reguły wtórne do systemu SD. (*Rozwiązania*, s. 399-401).

(a)

$i.$	$p \equiv r$	
➢	$p \to r$	RŻE i

(b)

$i.$	$p \equiv r$	
➢	$r \to p$	RŻE i

(c)

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$r \to p$	
➢	$p \equiv r$	RŻW i, j

(d)

$i.$	$p \vee q$	
$j.$	$\sim p$	
➢	q	MTP i, j

(e)

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$\sim r$	
➢	$\sim p$	MTT i, j

(f)

$i.$	$p \to q$	
$j.$	$q \to r$	
➢	$p \to r$	HS i, j

(g)

$i.$	$p \to r$	
➢	$(r \to q) \to (p \to q)$	HHS i

(h)

$i.$	$p \to r$	
➢	$(q \to p) \to (q \to r)$	HHS i

(i)

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$p \to s$	
➢	$p \to (r \bullet s)$	MNi

(j)

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$q \to s$	
➢	$(p \bullet q) \to (r \bullet s)$	MPNi

(k)

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$q \to r$	
➢	$(p \vee q) \to r$	DPi

(l)

$i.$	$p \to r$	
$j.$	$q \to s$	
➢	$(p \vee q) \to (r \vee s)$	DPNi

(m)

$i.$	$p \to (q \to r)$	
$j.$	$p \to q$	
➢	$p \to r$	RFi

(n)

$i.$	$p \to (q \to r)$	
➢	$(p \to q) \to (p \to r)$	RFi

(o)

$i.$	p	
➢	$r \to p$	RS i

(p)

$i.$	$\sim p \to p$	
➢	p	RC i

(q)

$i.$	$\sim p$	
➢	$p \to r$	RDS i

(r)

$i.$	$(p \bullet \sim r) \to \sim p$	
➢	$p \to r$	IWi

(s)

$i.$	$(p \bullet \sim r) \to r$	
➢	$p \to r$	IWi

15.2. Reguły wnioskowania a reguły podstawiania

Aby dołączyć do systemu SD regułę inferencji postaci:

i_1.	α_1	
	. . .	
i_k.	α_k	
$\blacktriangleright$	β	RI $i_1, \ldots, i_k$

jako regułę wtórną systemu SD, trzeba wykazać, że wniosek β wynika logicznie ze zbioru $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, czyli że $\{\alpha_1, , \alpha_k\} \vdash \beta$. Wtórne reguły inferencji dodawane są zatem do systemu inferencji na podstawie wykazania, że wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Systemy dedukcji naturalnej uzupełnia się często o jeszcze jeden – bardzo użyteczny – rodzaj reguł, tzw. *reguły podstawiania*. Podczas gdy wtórne reguły inferencji dodaje się na podstawie dowodu wskazującego, że pewne zdania wynikają logicznie z innych zdań, reguły podstawiania uzasadniane są na podstawie dowodu logicznej równoważności pewnych zdań. Reguły te – choć bardzo intuicyjne – zasadniczo się jednak różnią od reguł inferencji w użyciu. Nie bez przyczyny zapisuje się je też w różny sposób. Aby dołączyć do systemu SD regułę podstawiania postaci:

$$\alpha \blacktriangleleft\!\blacktriangleright \beta \qquad\qquad \text{RP}$$

jako regułę wtórną systemu SD, trzeba wykazać, że α i β są logicznie równoważne, tj. że $\{\alpha\} \vdash \beta$ oraz że $\{\beta\} \vdash \alpha$.

15.3. Reguły podstawiania

Oto reguły podstawiania, które warto dołączyć do systemu:

Podwójna negacja (Neg)

$$p \blacktriangleleft\!\blacktriangleright {\sim}{\sim}p$$

Idempotentność (Idem)

$$p \bullet p \blacktriangleleft\!\blacktriangleright p$$
$$p \vee p \blacktriangleleft\!\blacktriangleright p$$

Przemienność (Przem)

$$p \vee r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright r \vee p$$
$$p \bullet r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright r \bullet p$$
$$p \equiv r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright r \equiv p$$

Łączność (Łącz)

$$p \vee (q \vee r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \vee q) \vee r$$
$$p \bullet (q \bullet r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \bullet q) \bullet r$$

Rozdzielność (Rozdz)

$$p \vee (q \bullet r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \vee q) \bullet (p \vee r)$$
$$p \bullet (q \vee r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \bullet q) \vee (p \bullet r)$$

De Morgan (DeM)

$${\sim}(p \vee r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright {\sim}p \bullet {\sim}\, r$$
$${\sim}(p \bullet r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright {\sim}p \vee {\sim}\, r$$

Implikacja (Impl)

$$p \rightarrow r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright {\sim}p \vee r$$

Negacja implikacji (NegImpl)

$${\sim}(p \rightarrow r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright p \bullet {\sim}r$$

Równoważność (Równ)

$$p \equiv r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow p)$$
$$p \equiv r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \bullet r) \vee ({\sim}p \bullet {\sim}r)$$

Negacja równoważności (NegRówn)

$${\sim}(p \equiv r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \bullet {\sim}r) \vee ({\sim}p \bullet r)$$

Eksportacja (Eksp)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (p \bullet q) \rightarrow r$$

Transpozycja (Transp)

$$p \rightarrow r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright {\sim}r \rightarrow {\sim}p$$

Absorpcja (Abs)

$$p \rightarrow r \blacktriangleleft\!\blacktriangleright p \rightarrow (p \bullet r)$$

Niektóre z tych reguł, jak na przykład reguła podwójnej negacji czy reguły łączności i przemienności, są niezwykle wręcz intuicyjne. Stosujemy je z powodzeniem i bez wahania w rozumowaniu codziennym.

Ćwiczenie 15.B

Dowiedź, że można uzupełnić system SD o wszystkie podane wyżej reguły podstawiania. (*Rozwiązania*, s. 401-405).

Reguły podstawiania stosują się…

Reguły podstawiania są niezwykle intuicyjne, niemniej jednak ich stosowanie w dowodzeniu różni się od stosowania reguł inferencji pod dwoma ważnymi względami.

…dwukierunkowo

W przeciwieństwie do reguł inferencji, reguły podstawiania można stosować «w dwie strony». W następującym dowodzie obydwa zastosowania reguły Neg są prawidłowe:

1.	$\sim\sim A$	Zał.
2.	A	Neg 1
3.	$\sim\sim\sim\sim A$	Neg 1

Nieuprawniony byłby oczywiście krok:

$\cancel{4.}$	$\cancel{\sim\sim\sim\sim\sim\sim A}$	$\cancel{\text{Neg 1}}$

Aby wprowadzić $\sim\sim\sim\sim\sim\sim A$, należałoby zastosować regułę Neg do wiersza 3, a nie do wiersza 1.

…również do nieswobodnie stojących zdań

Jak pamiętamy, reguły inferencji stosują się tylko do swobodnie stojących zdań. Reguły podstawiania natomiast można zastosować również do członów zdań. Następujące zastosowania reguły Neg są prawidłowe:

1.	$A \lor (B \to C)$	Zał.	
2.	$\sim\sim[A \lor (B \to C)]$	Neg 1	$A \lor (B \to C)$
3.	$\sim\sim A \lor (B \to C)$	Neg 1	$A \lor (B \to C)$
4.	$A \lor \sim\sim(B \to C)$	Neg 1	$A \lor (B \to C)$
5.	$A \lor (\sim\sim B \to C)$	Neg 1	$A \lor (B \to C)$
6.	$A \lor (B \to \sim\sim C)$	Neg 1	$A \lor (B \to C)$

W chmurce zacieniowane są człony zdań, do których zastosowana została reguła Neg w poszczególnych krokach.

Nie wolno natomiast stosować reguł podstawiania jednocześnie do paru członów. Nieuzasadniony zatem byłby krok:

$\cancel{7.}$	$\cancel{\sim\sim A \lor (\sim\sim B \to C)}$	$\cancel{\text{Neg 1}}$

Aby wyprowadzić zdanie $\sim\sim A \lor (\sim\sim B \to C)$ ze zdania $A \lor (B \to C)$, należałoby zastosować regułę Neg dwukrotnie, np. w następujący sposób:

1.	$A \lor (B \to C)$	Zał.
2.	$\sim\sim A \lor (B \to C)$	Neg 1
3.	$\sim\sim A \lor (\sim\sim B \to C)$	Neg 2

Ćwiczenie 15.C

Ponieważ reguły podstawiania można stosować również do członów zdań, więc często będzie wiele sposobów zastosowania danej reguły do pewnego zdania. Uzupełnij brakujące informacje. (*Rozwiązania*, s. 405-406).

(a)

1.	C ≡ D	Zał.
2.		Neg 1
3.		Neg 1
4.		Neg 1

(b)

1.	~A ∨ ~B	Zał.
2.		Neg 1
3.		Neg 1
4.		Neg 1

(c)

1.	C • ~~A	Zał.
2.		Neg 1
3.		Neg 1
4.		Neg 1
5.		Neg 1

(d)

1.	~~(B → ~C)	Zał.
2.		Neg 1
3.		Neg 1
4.		Neg 1
5.		Neg 1

(e)

1.	~(A ∨ ~(B • C))	Zał.
2.		DeM 1
3.		DeM 1

(f)

1.	~(~D • ~(A ∨ C))	Zał.
2.		DeM 1
3.		DeM 1
4.		DeM 1

(g)

1.	~(~(~A ∨ ~C) ∨ ~(~B • ~D))	Zał.
2.		DeM 1
3.		DeM 1
4.		DeM 1
5.		DeM 1
6.		DeM 1

(h)

1.	C ≡ B	Zał.
2.		Idem 1
3.		Idem 1
4.		Idem 1
5.		Idem 1
6.		Idem 1
7.		Idem 1

(i)

1.	~(A • D)	Zał.
2.		Idem 1
3.		Idem 1
4.		Idem 1
5.		Idem 1
6.		Idem 1
7.		Idem 1

(j)

1.	(A ∨ B) • (C ≡ D)	Zał.
2.		Przem 1
3.		Przem 1
4.		Przem 1

(k)

1.	(A • B) • (C • D)	Zał.
2.		Łącz 1
3.		Łącz 1

(l)

1.	$(A \vee B) \bullet (C \vee D)$	Zał.
2.		Rozdz 1
3.		Rozdz 1
4.		Rozdz 2
5.		Rozdz 2
6.		Rozdz 2
7.		Rozdz 3
8.		Rozdz 3
9.		Rozdz 3

Ćwiczenie 15.D

Wykaż, że następujące równoważne symbolizacje zdań z wcześniejszych ćwiczeń *Samouczka* są logicznie równoważne. (*Rozwiązania*, s. 407).

(a) Teoria ***F***reuda jest prawdziwa, chyba że albo teoria ***J***unga, albo teoria ***A***dlera jest prawdziwa.
$(J \vee A) \vee F$
$\sim(J \vee A) \to F$

(b) ***B***eata pójdzie z Lechem na randkę, chyba że albo po raz kolejny Lech się ***S***późni, albo znów nie przyniesie jej ***K***wiatów.
$(S \vee \sim K) \vee B$
$\sim(S \vee \sim K) \to B$

(c) ***A***nia przejdzie na dietę tylko wtedy, gdy ***L***idka – lecz nie ***K***alinka – przejdzie na dietę.
$A \to (L \bullet \sim K)$
$\sim(L \bullet \sim K) \to \sim A$
$(\sim L \vee K) \to \sim A$

d) ***Z***aliczysz logikę, tylko jeżeli zarówno wszystko z***R***ozumiesz, jak i będziesz poprawnie wykonywać wszystkie ***Ć***wiczenia.
$Z \to (R \bullet \text{Ć})$
$\sim(R \bullet \text{Ć}) \to \sim Z$
$(\sim R \vee \sim\text{Ć}) \to \sim Z$

Ćwiczenie 15.E

Stosując reguły wtórne przeprowadź dowody tautologii (a) i (b). Porównaj przeprowadzone dowody z dowodami z rozdziału 14. (*Rozwiązania*, s. 407).

(a) $p \vee \sim p$
(b) $(p \to q) \vee (q \to p)$.