

## 12. DOWODZENIE III

### REGUŁY $\rightarrow$ WPR, R

---

#### Cele

- Umiejętność stosowania reguł pierwotnych  $\rightarrow$ Wpr oraz R.
- Umiejętność przeprowadzania prostych dowodów z użyciem tych reguł.

#### 12.1. Intuicje

Wiele reguł w systemie SD korzysta z tzw. subderywacji („poddowodów”). Subderywacje intuicyjnie odpowiadają dowodom pomocniczym, które wykonujemy niejako «na boku» po to, aby uzyskać pewien wynik w głównym toku dowodzenia.

Rozważmy następujący przykład rozumowania.

#### Przykład 1

- (1) Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to będzie się uganiał za Asią.
- (2) Jeżeli Kuba będzie się uganiał za Asią, to ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotowuje się do testu z neuronauki.
- (3) Jeżeli Kuba nie przygotowuje się do testu z neuronauki, to obleje egzamin z tego przedmiotu.
- (4) Jeżeli Kuba obleje egzamin z neuronauki, to Asia przestanie się nim interesować.

---

Jeżeli więc Kuba pojedzie do Zakopanego, to Asia przestanie się nim interesować.

Chcąc dowieść, że wniosek istotnie wynika z przesłanek, możemy rozumować tak:

Założmy, że Kuba pojedzie do Zakopanego.

Z (1) wynika, że Kuba będzie się uganiał za Asią.

Z (2) wynika dalej, że ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotowuje się do testu z neuronauki.

Stąd z kolei wynika, że Kuba nie przygotowuje się do testu z neuronauki.

A skoro tak, to na mocy (3) wiemy, że Kuba obleje też egzamin z neuronauki.

Stąd oraz z przesłanki (4) wynika, że Asia przestanie się nim interesować.

Zastanówmy się, czego dowiedliśmy. Czy dowiedliśmy, że Asia przestanie się interesować Kubą? Tak może się nam wydawać, bo ostatni krok w naszym rozumowaniu tak właśnie brzmiał. Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że nasze rozumowanie oparte było na pewnym założeniu dodatkowym, a mianowicie na założeniu, że Kuba pojedzie do Zakopanego. Całość naszego rozumowania od tego założenia zależała. Nie dowiedliśmy zatem, że z przesłanek (1)-(4) wynika zdanie:

Asia przestanie się interesować Kubą.

a jedynie, że wynika z nich zdanie:

*Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to Asia przestanie się nim interesować.*

Zdanie ‘Asia przestanie się interesować Kubą’ jest wnioskiem w dowodzie pomocniczym, którego dodatkowym założeniem jest zdanie ‘Kuba pojedzie do Zakopanego’. W systemie SD wprowadza się graficzną formę przedstawiania takich dowodów pomocniczych, czyli subderywacji, po to, aby ułatwić

nam zorientowanie się w tym, czego dowodzimy na podstawie jakich przesłanek. Stosując szatę graficzną systemu SD, ale jeszcze nie zastępując zdań powyższego rozumowania stałymi zdaniowymi, nasze rozumowanie przybiera następującą formę:

1.	Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to będzie się uganiał za Asią.	Zał.
2.	Jeżeli Kuba będzie się uganiał za Asią, to ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotowuje się do testu z neuronauki.	Zał.
3.	Jeżeli Kuba nie przygotowuje się do testu z neuronauki, to obleje egzamin z tego przedmiotu.	Zał.
4.	Jeżeli Kuba obleje egzamin z neuronauki, to Asia przestanie się nim interesować.	Zał.
5.	Kuba pojedzie do Zakopanego	Zał.
6.	Kuba będzie się uganiał za Asią.	(1), (5)
7.	Kuba ani nie przyswoi sobie reguły wprowadzania implikacji, ani nie przygotowuje się do testu z neuronauki.	(6), (2)
8.	Kuba nie przygotowuje się do testu z neuronauki.	(7)
9.	Kuba obleje egzamin z neuronauki.	(8), (3)
10.	Asia przestanie się interesować Kubą.	(9), (4)
11.	Jeżeli Kuba pojedzie do Zakopanego, to Asia przestanie się nim interesować.	(5)-(10)

Na subderywację składają się wiersze 5-10. Wszystkie zdania występujące w subderywacji są oddzielone od głównej linii dowodowej i wpisywane przy linii dowodowej tej subderywacji. Całą subderywacją „rządzi” założenie dodatkowe, tj. że Kuba pojedzie do Zakopanego. Wszystkie kroki w subderywacji są oparte na tym właśnie założeniu. Przecież nie wiemy, że Kuba obleje egzamin z neuronauki na podstawie założeń (1)-(4) (a ściślej (1)-(3)). Na podstawie tych założeń wiemy jedynie, że Kuba obleje egzamin z neuronauki, *o ile* pojedzie do Zakopanego. Subderywacje służą temu, abyśmy rozumieli, w kontekście jakich założeń, co z czego wynika.

Spróbuj przełożyć nasze rozumowanie na formę symboliczną (por. *Rozwiązania*, s. 376):

1.	$Z \rightarrow A$	Zał.	<b>Z:</b> Kuba pojedzie do Zakopanego.
2.	$A \rightarrow (\sim P \bullet \sim R)$	Zał.	<b>A:</b> Kuba będzie się uganiał za Asią.
3.	$\sim R \rightarrow \sim N$	Zał.	<b>P:</b> Kuba przyswoi sobie regułę wprowadzania implikacji.
4.	$\sim N \rightarrow \sim I$	Zał.	<b>R:</b> Kuba przygotowuje się do testu z neuronauki.
			<b>N:</b> Kuba zda egzamin z neuronauki.
			<b>I:</b> Asia będzie się interesować Kubą.
5.	_____	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.	$Z \rightarrow \sim I$	$\rightarrow$ Wpr 5-10	

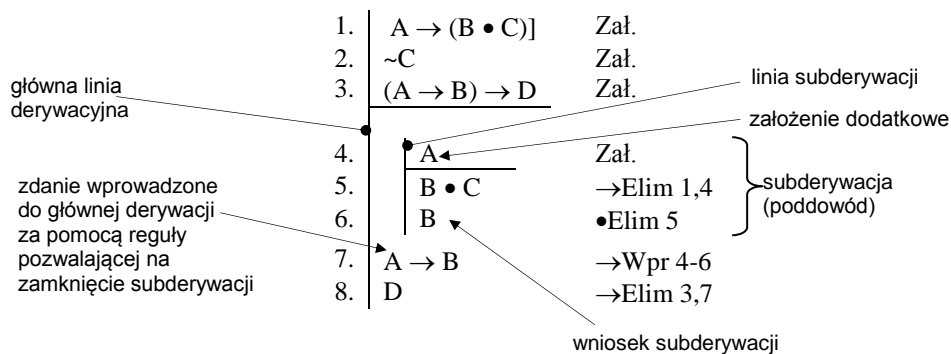
Reguła  $\rightarrow$ Wpr jest oparta na powyższych intuicjach, zanim ją przedstawimy, wprowadzimy trochę terminologii, która będzie pomocna w omawianiu reguł korzystających z subderywacji, oraz wprowadzimy regułę R, która rządzi przepływem informacji w dowodach z subderywacjami.

## 12.2. Subderywacje

Derywacje mogą zawierać subderywacje. Każda subderywacja:

- ma swą własną linię derywacyjną,
- ma dokładnie *jedno* założenie zwane założeniem dodatkowym, podkreślone linią założeniową,
- może zawierać dowolną ilość kroków,
- ostatnie zdanie w subderywacji jest jej wnioskiem.

Oto przykład dowodu zawierającego subderywację (nie starajcie się na razie zrozumieć dowodu, lecz przyjrzyjcie się tylko oznaczeniom):



### Czy wiesz, że...

Systemy naturalnej dedukcji, taki jak prezentowany tu system SD nazywa się systemami „w stylu Fitcha” (*Fitch-style natural deduction systems*) za nazwiskiem logika, który po raz pierwszy użył takich struktur graficznych (linii derywacji, linii założeń pierwotnych, linii subderywacji i linii założeń dodatkowych) do zaznaczenia toku wnioskowania. Od roku 1952, w którym Fitch opublikował swój podręcznik, systemy w stylu Fitcha robiły karierę – również dydaktyczną, gdyż pozwalały na lepsze i łatwiejsze opanowanie dowodów podrzędnych, czyli subderywacji.

Warto jednakże wspomnieć, że graficzną metodę zaznaczania subderywacji wprowadził już Jaśkowski. Stosował on bowiem dwie metody zaznaczania subderywacji. Jedna z nich – właśnie graficzna – polegała na tym, że subderywacja ujmowana była w ramkę. Druga z metod proponowanych przez Jaśkowskiego – dużo łatwiejsza do złożenia w drukarni – polegała na odpowiednim ponumerowaniu kroków subderywacji. Z pewną poprawką na reguły inferencji, które miały nieco inną postać u Jaśkowskiego – ten sam dowód tautologii  $[(A \cdot B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$  prezentowałyby się następująco w tych dwóch systemach notacyjnych:

1.	$(A \cdot B) \rightarrow C$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	1.1	$(A \cdot B) \rightarrow C$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
2.	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	2.1.1	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
3.	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	3.1.1.1	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
4.	$A \cdot B$	$\bullet$ Wpr 2, 3	4.1.1.1	$A \cdot B$	$\bullet$ Wpr 2, 3
5.	C	$\rightarrow$ Elim 1, 4	5.1.1.1	C	$\rightarrow$ Elim 1, 4
6.	$B \rightarrow C$	$\rightarrow$ Wpr 3-5	6.1.1	$B \rightarrow C$	$\rightarrow$ Wpr 3-5
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\rightarrow$ Wpr 2-6	7.1	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\rightarrow$ Wpr 2-6
8.	$(A \cdot B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$	$\rightarrow$ Wpr 1-7	8.	$[(A \cdot B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$	$\rightarrow$ Wpr 1-7

W znakomitym podręczniku J. Słupeckiego i L. Borkowskiego (*Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, wydanie pierwsze, Warszawa, PWN, 1963), w którym autorzy rozwinęli własny system dedukcji naturalnej, stosowany jest też numeryczny system zaznaczania subderywacji, choć inaczej niż to robił Jaśkowski, a mianowicie kolejny krok wnioskowania jest naliczany w obrębie subderywacji. A zatem poszczególne kroki nosiłyby następujące numeracje: 1.1, 1.1.1, 1.1.1.1, 1.1.1.2, 1.1.1.3, 1.1.2, 1.2, 2.

Źródło: F.J. Pelletier (2000) „A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks”, [w:] J. Woods, B. Brown (eds.), *Logical Consequence: Rival Approaches, Vol. 1.* (Oxford: Hermes Science Pubs) pp. 105-138.

### 12.3. Reguła $\rightarrow$ Wpr (reguła dołączania implikacji)

Jeżeli w subderywacji dowodu macierzystego, której założeniem (dodatkowym) jest  $p$ , można wyprowadzić (swobodnie występujące)  $r$ , to do dowodu macierzystego wolno dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje implikacja  $p \rightarrow r$ .

$i.$	$p$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
$j.$	$r$	
$\triangleright$	$p \rightarrow r$	$\rightarrow$ Wpr $i$ - $j$

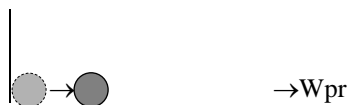
Dowody przeprowadzane za pomocą reguły wprowadzania implikacji zwane są też dowodami warunkowymi.

#### Intuicje

Jeśli z założenia, że  $p$ , można wyprowadzić  $r$ , to prawdziwa jest implikacja  $p \rightarrow r$ . Jednym ze sposobów odczytania implikacji jest wszakże „ $r$  przy założeniu, że  $p$ ”.

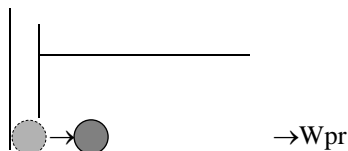
#### Konstruowanie subderywacji dla reguły $\rightarrow$ Wpr

Reguła wprowadzania implikacji jest regułą konstrukcyjną. Stosowanie reguł konstrukcyjnych wiąże się z koniecznością przygotowania dowodu oraz pewnej zmiany zapisów dowodów. Do tej pory mogliśmy zapisywać zdania, do których wyprowadzenia dążymy, z boku. W wypadku takich reguł jak  $\rightarrow$ Wpr należy wpisać implikację, którą chcemy wyprowadzić, na dole derywacji, zostawiając «dość» miejsca na przeprowadzenie dowodu:



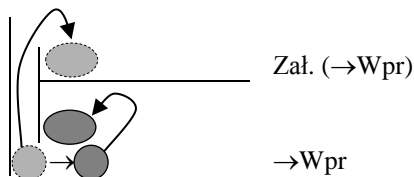
Ile miejsca to «dość» miejsca, trudno jest powiedzieć. Z czasem wyrobicie sobie w tej materii intuicję. Zawsze lepiej jest zostawić więcej miejsca niż za mało. Warto też zaznaczyć sobie, że implikacja taka ma być uzyskana za pomocą reguły  $\rightarrow$ Wpr – choć pełne uzasadnienie otrzymamy dopiero później.

Kolejnym krokiem jest zbudowanie subderywacji:



Trzeba subderywację narysować *nad* implikacją, którą chcemy z takiej subderywacji wyprowadzić.

Ostatnim krokiem przygotowania dowodu jest wpisanie założenia subderywacji, które można uzasadnić na mocy reguły  $\rightarrow$ Wpr (jako „Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)”) oraz wniosku subderywacji, który będziemy musieli uzasadnić na podstawie reszty dowodu. Reguła  $\rightarrow$ Wpr *ściśle determinuje*, jakie ma być założenie dodatkowe tej subderywacji (zawsze: poprzednik implikacji, którą chcemy uzyskać w dowodzie macierzystym), oraz jaki ma być jej wniosek (zawsze: następnik implikacji, którą chcemy uzyskać w dowodzie macierzystym).



Po takim przygotowaniu możemy przejść do przeprowadzania dowodu. Celem, na którym trzeba się skoncentrować, jest wyprowadzenie wniosku subderywacji z pozostałych zdań dowodu.

Zanim przejście do przykładów, sprawdźcie swoje opanowanie tych podstaw stosowania reguły  $\rightarrow$ Wpr w następujących ćwiczeniach.

### Ćwiczenie 12.A „ $\rightarrow$ Wpr – 1”

W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr, aby wyprowadzić pewną implikację. Aby to zrobić, należy skonstruować subderywację (została już skonstruowana). Określ, jaką implikację można wyprowadzić w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna). (*Rozwiązania*, s. 377).

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--|--|---------------------------|-----------------------|--|--|--|--|--|------|--|----|-------------------------|--|--|---------------------------|--|----|-------------------|--|--|--|--|----|--|--|--|--|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|------|--|----|-------------------|--|--|---------------------------|--|----|-------------------|--|--|--|--|----|--|--|--|--|-----------------------|
| <p>(a)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">B</td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">A</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>                                  |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | B                       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | A                 |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 | <p>(b)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>\sim</math>B</td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">A</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>                                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $\sim$ B          |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | A                 |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | B                       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | A                       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\sim$ B                |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | A                       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| <p>(c)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">C</td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>\sim</math>B</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>                 |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | C                       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | $\sim$ B          |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 | <p>(d)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>A \equiv C</math></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">B</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>                                 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $A \equiv C$      |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | B                 |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | C                       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\sim$ B                |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $A \equiv C$            |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | B                       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| <p>(e)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">C</td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>B \rightarrow A</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>       |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | C                       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | $B \rightarrow A$ |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 | <p>(f)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>C \rightarrow A</math></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">B</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>                            |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $C \rightarrow A$ |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | B                 |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | C                       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $B \rightarrow A$       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $C \rightarrow A$       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | B                       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| <p>(g)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>\sim(A \rightarrow B)</math></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">C</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table> |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $\sim(A \rightarrow B)$ |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | C                 |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 | <p>(h)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>\sim</math>A</td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>B \rightarrow C</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $\sim$ A          |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | $B \rightarrow C$ |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\sim(A \rightarrow B)$ |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | C                       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\sim$ A                |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $B \rightarrow C$       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| <p>(i)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>A \vee \sim A</math></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">B</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table>         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $A \vee \sim A$         |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | B                 |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 | <p>(j)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 5%;"></td><td style="width: 15%; border-top: 1px solid black;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 15%;"></td><td style="width: 10%;"></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał.</td><td></td></tr> <tr><td>3.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>B \rightarrow C</math></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;"></td><td style="border-top: 1px solid black;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td><td></td></tr> <tr><td>8.</td><td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>C \rightarrow D</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>9.</td><td style="background-color: #cccccc;"></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\rightarrow</math>Wpr 3-8</td></tr> </table> |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Zał. |  | 3. | $B \rightarrow C$ |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |  | 8. | $C \rightarrow D$ |  |  |  |  | 9. |  |  |  |  | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $A \vee \sim A$         |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | B                       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                         |  |  | Zał.                      |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 3.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $B \rightarrow C$       |  |  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 8.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $C \rightarrow D$       |  |  |                           |                       |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |
| 9.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                         |  |  |                           | $\rightarrow$ Wpr 3-8 |  |  |  |  |  |      |  |    |                         |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |      |  |    |                   |  |  |                           |  |    |                   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |                       |

### Ćwiczenie 12.B „ $\rightarrow$ Wpr – 2”

W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować  $\rightarrow$ Wpr, aby wyprowadzić pewną implikację. Aby to zrobić, należy skonstruować subderywację (została już skonstruowana). Wpisz założenie dodatkowe subderywacji oraz wniosek, jaki trzeba będzie wyprowadzić w tej subderywacji, aby można było zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr w kroku 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna). (Rozwiązania, s. 378).

- (a)
- |    |                   |                           |
|----|-------------------|---------------------------|
| 3. |                   | Zał.                      |
| 8. |                   | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $A \rightarrow B$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (b)
- |    |                        |                           |
|----|------------------------|---------------------------|
| 3. |                        | Zał.                      |
| 8. |                        | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $\sim A \rightarrow B$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (c)
- |    |                        |                           |
|----|------------------------|---------------------------|
| 3. |                        | Zał.                      |
| 8. |                        | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $A \rightarrow \sim B$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (d)
- |    |                            |                           |
|----|----------------------------|---------------------------|
| 3. |                            | Zał.                      |
| 8. |                            | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $(A \vee C) \rightarrow B$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (e)
- |    |                                   |                           |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 3. |                                   | Zał.                      |
| 8. |                                   | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (f)
- |    |                                   |                           |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 3. |                                   | Zał.                      |
| 8. |                                   | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (g)
- |    |                                                   |                           |
|----|---------------------------------------------------|---------------------------|
| 3. |                                                   | Zał.                      |
| 8. |                                                   | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $(A \equiv \sim B) \rightarrow (\sim B \equiv A)$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |
- (h)
- |    |                                                            |                           |
|----|------------------------------------------------------------|---------------------------|
| 3. |                                                            | Zał.                      |
| 8. |                                                            | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) |
| 9. | $\sim(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$ | $\rightarrow$ Wpr 3-8     |

## 12.4. Przykłady prostych dowodów z zastosowaniem reguły $\rightarrow$ Wpr

### Przykład 2

Dowiedź, że  $A \rightarrow C$  na podstawie przesłanki  $A \rightarrow (B \bullet C)$ . Rozumowanie takie jest niewątpliwie prawidłowe. Odpowiada mu wnioskowanie np. „Jeżeli Ania pójdzie na imprezę, to pozna Beatę i Czesia. Zatem jeżeli Ania pójdzie na imprezę, to pozna Czesia”.

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.	Dowieść: $A \rightarrow C$

W wypadku reguł konstrukcyjnych warto zmienić sposób podejścia do dowodu. Do tej pory dokonywaliśmy analizy niejako na boku. Teraz warto nam będzie zacząć czynnie wpisywać to, co chcemy uzyskać na dole linii derywacyjnej. W powyższym wypadku przygotowujemy dowód w następujący sposób:

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.	Dowieść: $A \rightarrow C$
	$A \rightarrow C$		

Wpisujemy wniosek na dole głównej linii dowodowej (niestety, nie ma zasady, która pozwoliłaby nam na określenie, ile miejsca potrzeba – lepiej zostawić więcej niż za mało).

**Uwaga.** Nasze wpisanie zdania  $A \rightarrow C$  na dole linii dowodowej nie jest równoznaczne z tym, że zdanie to wyprowadziliśmy! Ma nam tylko *przypominać*, co mamy wyprowadzić. Dlatego też nie wolno nam jeszcze zdania  $A \rightarrow C$  używać w dowodzie. Nie ma ono ani numeru wiersza, ani swego uzasadnienia. Stanie się częścią dowodu dopiero wówczas gdy uzyska swoje uzasadnienie.

Ponieważ naszym celem jest wyprowadzenie implikacji, więc musimy zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr, która wymaga, po pierwsze, abyśmy *skonstruowali subderywację*:

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.						
	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px; vertical-align: top;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow (B \bullet C)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.				
1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.						
	$A \rightarrow C$							

Po wtóre, musimy uzupełnić konstrukcję subderywacji, wpisując jej założenie oraz wniosek, do którego wprowadzenia będziemy dążyli. Reguła  $\rightarrow$ Wpr dokładnie określa, co musi być założeniem, a co wnioskiem subderywacji, która pozwoli nam na wyprowadzenie  $A \rightarrow C$  na linii dowodu macierzystego. Te informacje musimy od razu wpisać.

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.												
	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px; vertical-align: top;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow (B \bullet C)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px; vertical-align: top;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>C</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> </td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.		<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px; vertical-align: top;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>C</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A$			$C$			
1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.												
	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px; vertical-align: top;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; border-top: 1px solid black; padding-right: 5px;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>C</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A$			$C$								
1.	$A$													
	$C$													
	$A \rightarrow C$													

Założenie subderywacji, czyli swobodnie stojące zdanie  $A$  (poprzednik implikacji, którą chcemy wyprowadzić za pomocą reguły  $\rightarrow$ Wpr) staje się już częścią dowodu – jest uzasadnione na mocy reguły  $\rightarrow$ Wpr jako założenie dodatkowe, więc możemy włączyć wiersz, w którym się znajduje, do dowodu. Natomiast wniosek derywacji, czyli swobodnie stojące zdanie  $C$  (następnik implikacji, którą chcemy wyprowadzić za pomocą reguły  $\rightarrow$ Wpr) wpisujemy na końcu linii subderywacji na razie bez

uzasadnienia, gdyż wniosek ten również nie jest jeszcze częścią dowodu. Dopiero gdy znajdziemy uzasadnienie dla wyprowadzenia C, wówczas wiersz ten będzie można dołączyć do dowodu:

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	C		
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)					
C						
	$A \rightarrow C$					

Powtórzmy jeszcze raz: nie wiemy jeszcze, jak uzasadnić zdanie C (mające być wnioskiem subderywacji) i zdanie  $A \rightarrow C$  (mające być wnioskiem dowodu). Skoncentrować się teraz musimy najpierw na znalezieniu uzasadnienia dla zdania C, opierając się zarówno na przesłance  $A \rightarrow (B \bullet C)$ , jak i na założeniu dodatkowym A. (W tym dowodzie korzystać możemy z całości dostępnej wyżej informacji. Nie musi tak jednak być. Wprowadzimy niedługo regułę R, która określa, dokładnie z jakich informacji wolno korzystać w subderywacjach, a z jakich nie).

Wyprowadzenie C ze zdań występujących w wierszach 1 oraz 2 nie nastręcza żadnych trudności. Ponieważ dana jest implikacja  $A \rightarrow (B \bullet C)$  w wierszu 1 oraz jej poprzednik A w wierszu 2, więc możemy wyprowadzić jej następnik za pomocą reguły  $\rightarrow$ Elim:

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.				
2.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)			
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)					
3.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B \bullet C</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 2</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td></td> </tr> </table>	$B \bullet C$	$\rightarrow$ Elim 1, 2	C		
$B \bullet C$	$\rightarrow$ Elim 1, 2					
C						
	$A \rightarrow C$					

Skoro w wierszu 3 mamy koniunkcję  $B \bullet C$ , to możemy wyprowadzić jej drugi człon za pomocą reguły  $\bullet$ Elim:

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.		
2.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)			
3.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B \bullet C</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 2</td> </tr> </table>	$B \bullet C$	$\rightarrow$ Elim 1, 2	
$B \bullet C$	$\rightarrow$ Elim 1, 2			
4.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\bullet</math>Elim 3</td> </tr> </table>	C	$\bullet$ Elim 3	
C	$\bullet$ Elim 3			
	$A \rightarrow C$			

W ten sposób wyprowadziliśmy w subderywacji zdanie C. To znaczy, że zrobiliśmy to, czego wymagała od nas reguła  $\rightarrow$ Wpr. Mieliśmy skonstruować subderywację, której założeniem dodatkowym był poprzednik implikacji, którą chcieliśmy wyprowadzić w derywacji macierzystej. Uczyniliśmy to – skonstruowaliśmy subderywację, której założeniem dodatkowym jest A. Mieliśmy wyprowadzić w tej subderywacji wniosek, którym miał być następnik implikacji, którą chcieliśmy wyprowadzić w derywacji macierzystej. Uczyniliśmy to – w subderywacji o założeniu dodatkowym A, wyprowadziliśmy C. Możemy zatem zamknąć subderywację, a w derywacji macierzystej (czyli w naszym przypadku w derywacji głównej) wpisać implikację, której poprzednikiem jest założenie dodatkowe zamykanej subderywacji (A), a której następnikiem jest wniosek zamykanej subderywacji (C), czyli implikację  $A \rightarrow C$ :

1.	$A \rightarrow (B \bullet C)$	Zał.		
2.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td style="padding-left: 10px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)			
3.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>B \bullet C</math></td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 2</td> </tr> </table>	$B \bullet C$	$\rightarrow$ Elim 1, 2	
$B \bullet C$	$\rightarrow$ Elim 1, 2			
4.	<table style="border-collapse: collapse; margin-left: 5px;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 10px;"><math>\bullet</math>Elim 3</td> </tr> </table>	C	$\bullet$ Elim 3	
C	$\bullet$ Elim 3			
5.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow$ Wpr 2-4		



**Przykład 3**

Dowiedź, że  $(A \bullet C) \rightarrow \sim D$  na podstawie przesłanki  $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$ .

1. $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$	Zał.	Dowieść: $(A \bullet C) \rightarrow \sim D$

Naturalną reakcją na to zadanie jest konsternacja. „Skąd C?” ciśnie się nam na usta. Nie konsternujmy się, tylko zróbmy dokładnie to, co reguła  $\rightarrow$ Wpr nakazuje (wszakże wniosek jest implikacją, więc prawie na pewno musimy skorzystać z reguły wprowadzania implikacji). Wpiszmy wniosek na dole derywacji:

1. $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$	Zał.
	$(A \bullet C) \rightarrow \sim D$

Skonstruujmy subderywację, od razu wpisując jej założenie dodatkowe i wniosek:

1. $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$	Zał.
2. $A \bullet C$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
	$\sim D$
	$(A \bullet C) \rightarrow \sim D$

Nasze zadanie staje się teraz łatwiejsze. Mamy wyprowadzić  $\sim D$  z dwóch zdań: implikacji  $A \rightarrow (B \bullet \sim D)$  oraz koniunkcji  $A \bullet C$ . Przeprowadzamy taką samą analizę docelową jak dotychczas. Zdanie  $\sim D$  jest członem koniunkcji i będziemy je mogli wydobyć za pomocą reguły  $\bullet$ Elim, ale musielibyśmy najpierw mieć swobodnie występującą koniunkcję  $B \bullet \sim D$ . Koniunkcja  $B \bullet \sim D$  jest następnikiem implikacji w wierszu pierwszym i będziemy ją mogli wyprowadzić za pomocą reguły  $\rightarrow$ Elim, o ile dany nam będzie swobodnie występujący poprzednik tej implikacji, tj. zdanie A. Zdanie A jest członem koniunkcji występującej swobodnie w wierszu 2, możemy je zatem wyprowadzić za pomocą reguły  $\bullet$ Elim. Wprowadzając cały nasz plan w życie, możemy uzasadnić zdanie  $\sim D$ . (Dowód w całości przedstawiony jest w *Rozwiązaniach*, s. 376).

Po uzasadnieniu  $\sim D$ , możemy zamknąć subderywację i uzasadnić wprowadzenie do derywacji macierzystej implikacji, której poprzednikiem jest założenie dodatkowe tej subderywacji ( $A \bullet C$ ), a następnikiem wniosek tej subderywacji ( $\sim D$ ), czyli implikację  $(A \bullet C) \rightarrow \sim D$ .

**Przykład 4**

Dowiedź, że z przesłanki  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$  wynika wniosek  $(A \bullet B) \rightarrow C$ .

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.	Dowieść: $(A \bullet B) \rightarrow C$

Naszym zadaniem jest wyprowadzić implikację  $(A \bullet B) \rightarrow C$ . Zastosujemy regułę  $\rightarrow$ Wpr, a zatem musimy skonstruować odpowiednią subderywację z poprzednikiem tej implikacji (czyli zdaniem  $A \bullet B$ ) jako założeniem dodatkowym, a następnikiem tej implikacji (tj. zdaniem  $C$ ) jako wnioskiem subderywacji. Wprowadzenie do dowodu założenia dodatkowego  $A \bullet B$  sprawia, że wyprowadzenie zdania  $C$  staje się na tyle proste, że nie będziemy go już tu komentować. Po skonstruowaniu dowodu sprawdź, czy się zgadza z dowodem z *Rozwiązań* (s. 376).

**Ćwiczenie 12.C „ $\rightarrow$ Wpr – 3”**

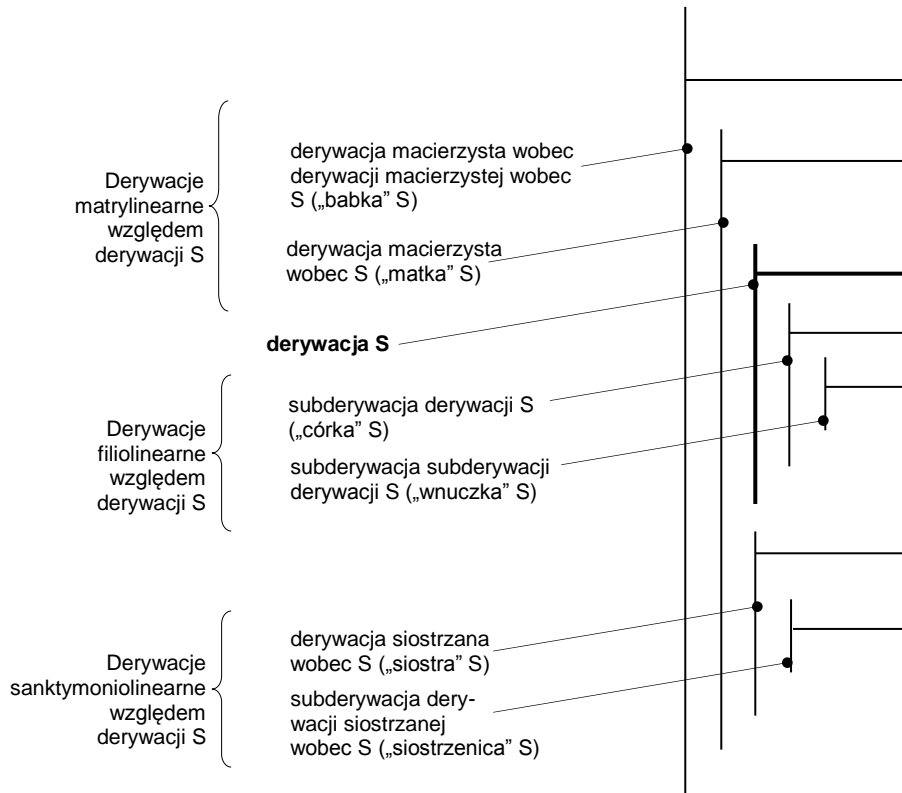
W następujących dowodach uzupełnij konstrukcję subderywacji (wpisując założenie dodatkowe w wierszu 3 oraz żądany wniosek subderywacji w wierszu 5), a następnie uzupełnij brakujący krok w wierszu 4 oraz uzasadnij wszystkie kroki. (*Rozwiązania*, s. 378).

<p>(a)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow (B \vee C)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim B</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow C</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$A \rightarrow C$		<p>(b)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow (B \equiv \sim D)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim D</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow B</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \equiv \sim D)$	Zał.	2.	$\sim D$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$A \rightarrow B$	
1.	$A \rightarrow (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim B$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$A \rightarrow C$																																				
1.	$A \rightarrow (B \equiv \sim D)$	Zał.																																			
2.	$\sim D$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$A \rightarrow B$																																				
<p>(c)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>C</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim A \rightarrow B</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.	2.	$C$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$\sim A \rightarrow B$		<p>(d)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>B \vee (B \vee C)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim B</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \rightarrow C</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$B \vee (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim B$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$A \rightarrow C$	
1.	$\sim A \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.																																			
2.	$C$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$\sim A \rightarrow B$																																				
1.	$B \vee (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim B$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$A \rightarrow C$																																				
<p>(e)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>A \equiv (B \vee C)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim D</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \equiv (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim D$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$		<p>(f)</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>(A \equiv B) \vee (B \vee C)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2.</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim(A \equiv B)</math></td> <td style="padding: 5px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">3.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">5.</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-left: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6.</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\sim B \rightarrow C</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	1.	$(A \equiv B) \vee (B \vee C)$	Zał.	2.	$\sim(A \equiv B)$	Zał.	3.			4.			5.			6.	$\sim B \rightarrow C$	
1.	$A \equiv (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim D$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$(A \equiv \sim D) \rightarrow (B \vee C)$																																				
1.	$(A \equiv B) \vee (B \vee C)$	Zał.																																			
2.	$\sim(A \equiv B)$	Zał.																																			
3.																																					
4.																																					
5.																																					
6.	$\sim B \rightarrow C$																																				

## 12.5. Subderywacje subderywacji

Ponieważ każda subderywacja jest derywacją, zatem subderywacje mogą również zawierać dalsze subderywacje. Derywację  $D$ , która bezpośrednio zawiera subderywację  $S$ , nazwiemy *derywacją macierzystą* względem subderywacji  $S$ . Możemy myśleć o derywacji  $D$  jako o „matce” derywacji  $S$ , a o subderywacji  $S$  jako o „córce” derywacji  $D$ . Subderywacja  $S$  może również zawierać swoją „córkę”, subderywację  $S'$ . Subderywacja  $S'$  będzie „wnuczką” derywacji  $D$ , która jest dla  $S'$  „babką”.

Subderywacje mogą również mieć „siostry”: jeśli dwie subderywacje mają tę samą derywację macierzystą, to są subderywacjami siostrzanymi. Relacje te ilustruje następujący schemat (a stosowne definicje podane są w ramce na s. 253):

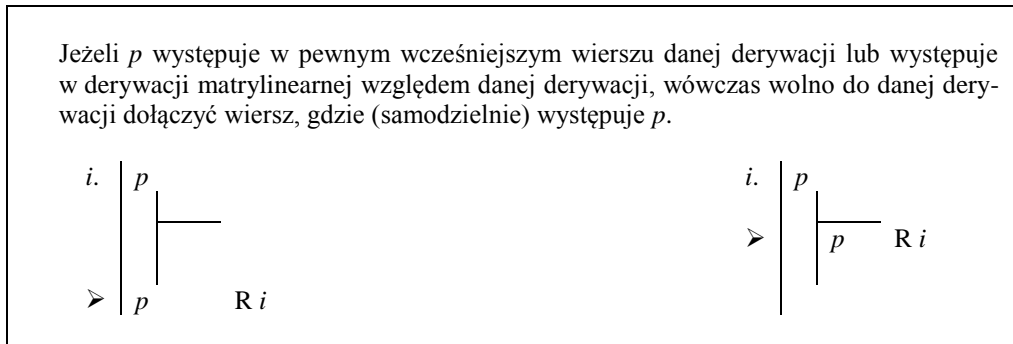


Ważnym pojęciem jest pojęcie *linii matrylinearnej* danej subderywacji  $S$ , na którą składają się wszystkie derywacje będące matką  $S$ , babką  $S$ , prababką  $S$ , praprababką  $S$  itd. Należy zauważyć, że linia matrylinearna danej subderywacji *nie obejmuje* ani jej własnych sióstr, ani sióstr matki, ani sióstr babki, ani sióstr prababki itd. Podobnie na *derywacje filiolinearne* danej derywacji  $D$  składają się wszystkie córki, wnuczki, prawnuczki itd., tj. wszystkie subderywacje derywacji  $D$ , subderywacje subderywacji derywacji  $D$ , subderywacje subderywacji subderywacji derywacji  $D$  itd. Na *derywacje sanktymoniolinearne* (derywacje z linii siostrzanej) składają się wszystkie derywacje siostrzane oraz wszystkie derywacje wobec nich filiolinearne.

Warto zwrócić uwagę, że pojęcia derywacji macierzystej oraz subderywacji są pojęciami względnymi – derywacja jest derywacją macierzystą zawsze względem jakiejś derywacji; podobnie derywacja jest subderywacją zawsze względem jakiejś derywacji. (Zupełnie tak samo ma się sprawa z byciem matką czy córką – zawsze jest się czyjąś matką, czyjąś córką). W przypadku derywacji może być tak, że dana derywacja nie ma derywacji macierzystej – wówczas jest derywacją główną (dowodem głównym).

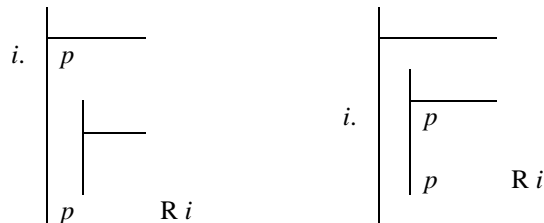
## 12.6. Reguła R (reguła reiteracji)

Regułę reiteracji (powtarzania) rzadko stosuje się *explicite*, służy ona głównie jako reguła określająca to, jakiej informacji można używać w subderywacjach.

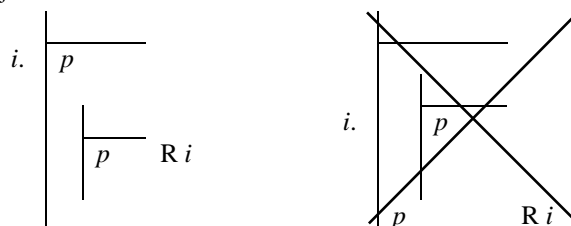


Reguła reiteracji reguluje przekazywanie informacji. Aby ułatwić zapamiętanie, możemy myśleć o regule reiteracji w kategoriach przekazywania tajemnic. Na regułę tę składają się trzy zasady:

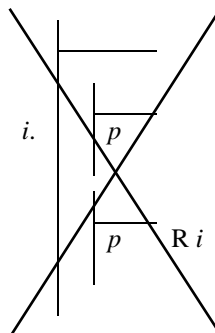
**Zasada 1. *Każdy zna swoje własne tajemnice.*** – W obrębie danej derywacji można powtarzać dowolne zdanie.



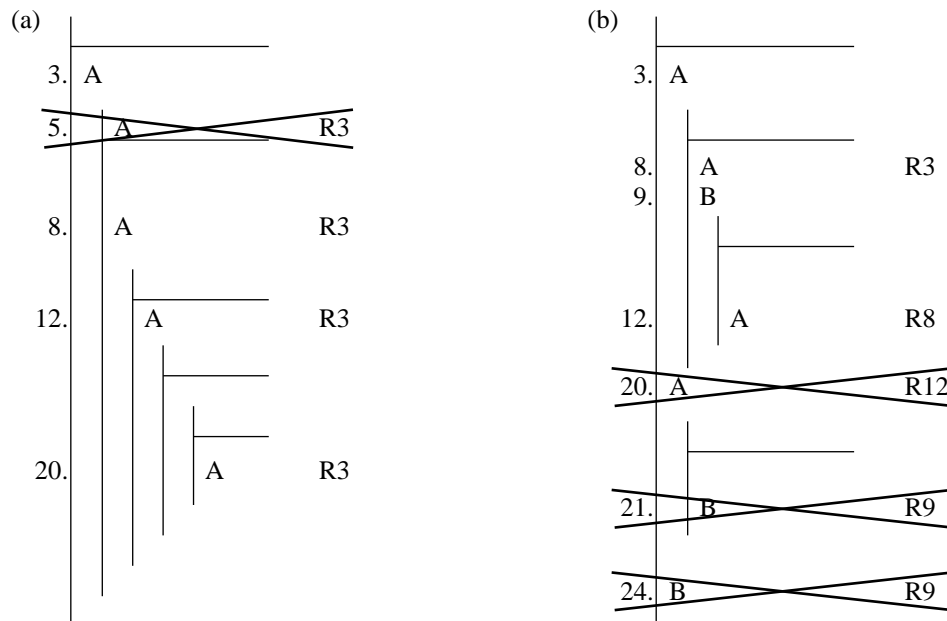
**Zasada 2. *Matki przekazują swoje tajemnice swoim córkom*** (a te – swoim córkom itd.), natomiast ***córki nigdy nie przekazują tajemnic swoim matkom***, babkom itd. – Można powtarzać wszystkie zdania znajdujące się w derywacjach matrylinearnych wobec danej. Nie wolno powtarzać żadnego zdania znajdującego się w derywacjach filiolinearnych wobec danej. Wszakże mogło być tak, że zdanie wyprowadzone w subderywacji zostało wyprowadzone tylko dzięki założeniu dodatkowemu tejże subderywacji.



**Zasada 3. *Siostry nigdy nie wymieniają się tajemnicami.*** – Nie wolno powtarzać żadnego zdania znajdującego się w derywacji z linii siostrzanej wobec danej. Dzieje się tak dlatego, że derywacje siostrzane mogą mieć różne założenia dodatkowe (czyt.: różnych ojców).



Rozważmy następujące „szkielety derywacyjne” (a) i (b) (spróbuj samodzielnie zrozumieć, na czym polegają wskazane błędy):



W szkielecie (a) jedyny nieprawidłowy krok znajduje się w wierszu 5, gdyż reguła reiteracji nie może uzasadnić założenia subderywacji!

W szkielecie (b) nieprawidłowych kroków jest więcej. Po pierwsze, w wierszu 20 próbuje się wyprowadzić informację znajdującą się w subderywacji subderywacji, ale przecięż córki nie przekazują informacji matkom, wnuczki – babkom itd. Warto zwrócić uwagę, że można byłoby powtórzyć zdanie A z wiersza 3, gdyż znajdują się ono w obrębie tej samej derywacji. Gdyby zatem w wierszu 20 uzasadnienie brzmiało „R3” błędu by nie było. To, że błędu można było uniknąć nie zmienia jednak tego, że *de facto* został popełniony. Po drugie, nie wolno powtórzyć B w wierszu 21, ponieważ B występuje w wierszu 9, który jest wierszem derywacji siostrzanej względem danej derywacji. Po trzecie, w wierszu 24 odwołuje się do B występującego w wierszu 9, który jest wierszem subderywacji (córki), a zatem nie wolno powtórzyć B w wierszu 24.

### Stosowanie reguły R *implicite* i *explicite*

Regułę R można stosować *explicite*, lecz jest to dość uciążliwe, gdyż dowód znacznie się wtedy rozrasta. Reguła R bardzo często funkcjonuje w dowodach „wykonywanych” przez ludzi (w przeciwieństwie do komputerów) w formie *implicite* – a polega po prostu na tym, że w dowodzie korzystamy tylko ze zdań, które wolno powtórzyć, uzasadniając to powtórzenie regułą R. Oto przykład tego samego dowodu, pierwszy stosuje regułę R *implicite*, drugi – *explicite*:

1.	$(D \vee A) \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.	1.	$(D \vee A) \rightarrow (C \rightarrow B)$	Zał.
2.	$C \bullet \sim A$	Zał.	2.	$C \bullet \sim A$	Zał.
3.	D	Zał.	3.	D	Zał.
4.	$D \vee A$	$\vee$ Wpr 3	4.	$D \vee A$	$\vee$ Wpr 3
5.	$C \rightarrow B$	$\rightarrow$ Elim 1,4	5.	$(D \vee A) \rightarrow (C \rightarrow B)$	R1
6.	C	$\bullet$ Elim 2	6.	$C \rightarrow B$	$\rightarrow$ Elim 4, 5
7.	B	$\rightarrow$ Elim 5,6	7.	$C \bullet \sim A$	R2
8.	$D \rightarrow B$	$\rightarrow$ Wpr 3-7	8.	C	$\bullet$ Elim 7
			9.	B	$\rightarrow$ Elim 6,8
			10.	$D \rightarrow B$	$\rightarrow$ Wpr 3-9

Obydwa dowody są prawidłowe. Dowód drugi jest po prostu dłuższy. Ze względów praktycznych przyjmijmy konwencję stosowania reguły R *implicite*, choć niekiedy zastosowanie reguły R *explicite* jest konieczne, co ilustruje następujący przykład.

**Przykład 5**

Dowiedź, że  $C \rightarrow A$  wynika z przesłanki A. Mamy wyprowadzić implikację z bardzo prostej przesłanki, więc musimy skorzystać z reguły wprowadzania implikacji. Skonstruujmy stosowną subderywację z poprzednikiem implikacji  $C \rightarrow A$  jako założeniem dodatkowym oraz z następnikiem tej implikacji jako żądanym wnioskiem:

1.	A	Zał.	Dowieść: $C \rightarrow A$								
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>C \rightarrow A</math></td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	C	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>C \rightarrow A</math></td> <td></td> </tr> </table>	A		$C \rightarrow A$				
C	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)										
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;">A</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px;"><math>C \rightarrow A</math></td> <td></td> </tr> </table>	A		$C \rightarrow A$								
A											
$C \rightarrow A$											

Jak wyprowadzić zdanie A z przesłanek: A (wiersz 1) oraz C (wiersz 2)? Po prostu przez powtórzenie (por. *Rozwiązania*, s. 376).

**Ćwiczenie 12.D „R – 1”**

W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” wskaż wszystkie wiersze, w których można dokonać powtórzenia (R) wyróżnionego zdania. (Pamiętaj, że założenia subderywacji są zawsze uzasadniane jako założenia, natomiast zdania znajdujące się w wierszu derywacji macierzystej zamykającym subderywację wolno uzasadniać tylko przez odwołanie do konstrukcyjnych reguł inferencyjnych). (*Rozwiązania*, s. 379).

(a)

1.	A
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
21.	

(b)

1.	
2.	A
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
21.	

(c)

1.	
2.	
3.	
4.	<b>A</b>
5.	
6.	
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
21.	

(d)

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	<b>A</b>
7.	
8.	
9.	
10.	
11.	
12.	
13.	
14.	
15.	
16.	
17.	
18.	
19.	
20.	
21.	

**Ćwiczenie 12.E „R – 2”**

Skonstruuj następujące dowody, stosując regułę R *explicitę*. (Rozwiązania, s. 380).

(a) Dowiedz:  $C \rightarrow (A \bullet B)$ 

1.	$A \bullet B$	Zał.

(b) Dowiedz:  $A \bullet A$ 

1.	$A$	Zał.

(c) Dowiedz:  $C \rightarrow A$ 

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.

(d) Dowiedz:  $[B \bullet (D \bullet G)] \rightarrow (A \bullet C)$ 

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.

## 12.7. Przykłady dowodów z zagnieżdżającymi się subderywacjami

### Przykład 6

Dowiedź, że z przesłanki  $(A \bullet B) \rightarrow C$  wynika wniosek  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.	Dowieść: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Dowiedzieliśmy już (por. Przykład 3, wyżej), że  $(A \bullet B) \rightarrow C$  wynika logicznie z  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ . Mamy teraz dowieść implikacji odwrotnej. Jej intuicyjność oddaje następujące wnioskowanie: jeżeli Ala i Beata dostaną psa, to Czesia dostanie kota; zatem, jeżeli Ala dostanie psa, to o ile Beata też dostanie psa, to Czesia dostanie kota. Zaczynamy jak zwykle od skonstruowania odpowiedniej subderywacji, której założeniem dodatkowym jest poprzednik implikacji, którą mamy wyprowadzić, czyli zdanie A, a której wnioskiem jest następnik tej implikacji, czyli zdanie  $B \rightarrow C$ .

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.								
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table>	B $\rightarrow$ C		A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)			
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)									
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table>	B $\rightarrow$ C		A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)							
B $\rightarrow$ C										
A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)										

Jak wyprowadzić  $B \rightarrow C$  z założeń 1 i 2? Nie za bardzo wiadomo, ale ponieważ  $B \rightarrow C$  to implikacja, więc spróbujemy zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr jeszcze raz. Musimy zatem przygotować kolejną subderywację z poprzednikiem implikacji  $B \rightarrow C$  (czyli zdaniem B) jako założeniem dodatkowym, a następni-kiem implikacji  $B \rightarrow C$  (czyli zdaniem C) jako wnioskiem tej subderywacji. Mamy zatem strukturę następującą:

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.												
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	C		B $\rightarrow$ C		A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)			
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)													
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	C		B $\rightarrow$ C		A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)							
B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)													
C														
B $\rightarrow$ C														
A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)														

A teraz – mimo że można dostać tymczasowego oczopląsu – zadanie się znacznie upraszcza. Spraw-  
dza się ono bowiem do tego, żeby wyprowadzić zdanie C, korzystając ze wszystkich założeń, a więc:  
przesłanki  $(A \bullet B) \rightarrow C$  oraz założeń dodatkowych A (z wiersza 2) i B (z wiersza 3). Proste – zastos-  
ujemy regułę  $\rightarrow$ Elim, ale do tego potrzebujemy poprzednik implikacji z wiersza 1, tj.  $A \bullet B$ , który łatwo  
uzyskamy, stosując regułę  $\bullet$ Wpr.

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.														
2.	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\bullet</math> B</td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\bullet</math>Wpr 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 4</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table> </td> <td></td> </tr> </table>	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\bullet</math> B</td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\bullet</math>Wpr 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 4</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	A $\bullet$ B	$\bullet$ Wpr 2, 3	C	$\rightarrow$ Elim 1, 4	B $\rightarrow$ C		A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)			
A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)															
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\bullet</math> B</td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\bullet</math>Wpr 2, 3</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">C</td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 4</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B <math>\rightarrow</math> C</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">A <math>\rightarrow</math> (B <math>\rightarrow</math> C)</td> <td></td> </tr> </table>	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)	A $\bullet$ B	$\bullet$ Wpr 2, 3	C	$\rightarrow$ Elim 1, 4	B $\rightarrow$ C		A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)							
B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)															
A $\bullet$ B	$\bullet$ Wpr 2, 3															
C	$\rightarrow$ Elim 1, 4															
B $\rightarrow$ C																
A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)																



Uzyskaliśmy zatem (w derywacji „wnuczce”) zdanie  $C$ , które pozwala nam zamknąć derywację „wnuczkę” i w derywacji dla niej macierzystej dodać implikację  $B \rightarrow C$ , uzasadniając ją regułą  $\rightarrow$ Wpr:

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
3.	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
4.	A $\bullet$ B	$\bullet$ Wpr 2, 3
5.	C	$\rightarrow$ Elim 1, 4
6.	B $\rightarrow$ C	$\rightarrow$ Wpr 3-5
7.	A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)	

Uzyskaliśmy w ten sposób (w derywacji „córce”) zdanie  $B \rightarrow C$ , które pozwala nam zamknąć derywację „córkę” i w derywacji dla niej macierzystej, czyli w derywacji głównej, dodać implikację  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ , uzasadniając ją regułą  $\rightarrow$ Wpr:

1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
3.	B	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
4.	A $\bullet$ B	$\bullet$ Wpr 2, 3
5.	C	$\rightarrow$ Elim 1, 4
6.	B $\rightarrow$ C	$\rightarrow$ Wpr 3-5
7.	A $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ C)	$\rightarrow$ Wpr 2-6

#### Definicje pojęć derywacji matrylinearnej, filiolinearnej i sanktymoniolinearnej

Niech pojęciem pierwotnym będzie pojęcie bycia **derywacją macierzystą**.

Derywacja  $d$  jest (bezpośrednią) **subderywacją** derywacji  $D$  zawsze i tylko wtedy, gdy derywacja  $D$  jest derywacją macierzystą wobec derywacji  $d$ .

Derywacja  $D'$  jest derywacją **matrylinearną** wobec derywacji  $D$  zawsze i tylko wtedy, gdy:

- (0) derywacja  $D'$  jest derywacją macierzystą wobec derywacji  $D$ , lub
- (1) istnieje taka derywacja  $D_x$ , że derywacja  $D_x$  jest derywacją matrylinearną wobec derywacji  $D$ , a derywacja  $D'$  jest derywacją macierzystą wobec derywacji  $D_x$ .

Derywacja  $D'$  jest derywacją **filiolinearną** wobec derywacji  $D$  zawsze i tylko wtedy, gdy:

- (0) derywacja  $D'$  jest (bezpośrednią) subderywacją derywacji  $D$ , lub
- (1) istnieje taka derywacja  $D_x$ , że derywacja  $D_x$  jest filiolinearna wobec derywacji  $D$ , a derywacja  $D'$  jest (bezpośrednią) subderywacją derywacji  $D_x$ .

Derywacja  $D'$  jest derywacją **sanktymoniolinearną** wobec derywacji  $D$  zawsze i tylko wtedy, gdy:

- (0) istnieje taka derywacja  $D_m$ , że derywacja  $D_m$  jest derywacją macierzystą względem derywacji  $D'$  oraz  $D$ , lub
- (1) istnieje taka derywacja  $D_x$ , że derywacja  $D_x$  jest derywacją sanktymoniolinearną wobec derywacji  $D$ , a derywacja  $D_x$  jest derywacją macierzystą wobec derywacji  $D'$  lub istnieje taka derywacja  $D_x$ , że derywacja  $D_x$  jest derywacją sanktymoniolinearną wobec derywacji  $D'$ , a derywacja  $D_x$  jest derywacją macierzystą wobec derywacji  $D$ .

### Ćwiczenie 12.F „ $\rightarrow$ Wpr – 4”

W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr dwukrotnie, aby wyprowadzić pewną implikację, której następnikiem jest też implikacja. Aby to zrobić, należy skonstruować dwie zagnieżdżone subderywacje (zostały już skonstruowane). Określ, jaką implikację można wyprowadzić w wierszu 8 oraz w wierszu 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu; nie próbuj uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest również tylko umowna). (*Rozwiązania*, s. 380).

(a)	<div style="border-bottom: 1px solid black; height: 15px; margin-bottom: 5px;"></div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; margin-bottom: 5px;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; height: 15px; margin-bottom: 5px;">3.   A</div> <div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 5px; margin-bottom: 5px;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; height: 15px; margin-bottom: 5px;">4.     B</div> <div style="border-bottom: 1px solid black; height: 15px; margin-bottom: 5px;">7.       C</div> <div style="background-color: #cccccc; height: 15px; margin-bottom: 5px;">8.      </div> <div style="background-color: #cccccc; height: 15px; margin-bottom: 5px;">9.      </div> </div> </div>
-----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ćwiczenie 12.G „ $\rightarrow$ Wpr – 5”

W każdym z poniższych „szkieletów dowodowych” trzeba zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr dwukrotnie, aby wyprowadzić pewną implikację, której następnikiem jest też implikacja. Aby to zrobić, należy skonstruować dwie zagnieżdżone subderywacje (zostały już skonstruowane). Wpisz założenia dodatkowe obydwu subderywacji oraz wnioski, jakie trzeba będzie wyprowadzić w każdej subderywacji, aby można było zastosować regułę  $\rightarrow$ Wpr w kroku 8 oraz 9. (W ćwiczeniu tym nie chodzi o skonstruowanie całego dowodu, nie próbuj zatem uzasadniać wniosku subderywacji! Numeracja wierszy jest tylko umowna). (Rozwiązania, s. 381).

(a)		Zał. 3. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 4. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 7. 8. $\rightarrow$ Wpr 4-7 9. $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ $\rightarrow$ Wpr 3-8	(b)		Zał. 3. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 4. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 7. 8. $\rightarrow$ Wpr 4-7 9. $\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$ $\rightarrow$ Wpr 3-8
(c)		Zał. 3. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 4. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 7. 8. $\rightarrow$ Wpr 4-7 9. $(B \bullet C) \rightarrow [A \rightarrow (C \bullet A)]$ $\rightarrow$ Wpr 3-8	(d)		Zał. 3. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 4. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 7. 8. $\rightarrow$ Wpr 4-7 9. $B \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow A)]$ $\rightarrow$ Wpr 3-8
(e)		Zał. 3. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 4. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 7. 8. $\rightarrow$ Wpr 4-7 9. $B \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ $\rightarrow$ Wpr 3-8	(f)		Zał. 3. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 4. Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) 7. 8. $\rightarrow$ Wpr 4-7 9. $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ $\rightarrow$ Wpr 3-8

**Ćwiczenie 12.H „ $\rightarrow$ Wpr – 6”**

W następujących dowodach uzupełnij konstrukcję obydwu subderywacji (wpisując założenia dodatkowe w wierszu 2 i 3 oraz żądane wnioski w wierszu 5 i 6), a następnie uzupełnij brakujący krok w wierszu 4 oraz uzasadnij wszystkie kroki. (Rozwiązania, s. 381-382).

<p>(a)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>(A \bullet B) \rightarrow C</math></td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>B \rightarrow (A \rightarrow C)</math></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> </table>	1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.	2.			3.			4.			5.			6.			7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$		<p>(b)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>(A \vee G) \rightarrow C</math></td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>A \rightarrow (B \rightarrow C)</math></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> </table>	1.	$(A \vee G) \rightarrow C$	Zał.	2.			3.			4.			5.			6.			7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	
1.	$(A \bullet B) \rightarrow C$	Zał.																																									
2.																																											
3.																																											
4.																																											
5.																																											
6.																																											
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$																																										
1.	$(A \vee G) \rightarrow C$	Zał.																																									
2.																																											
3.																																											
4.																																											
5.																																											
6.																																											
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$																																										
<p>(c)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>(A \rightarrow C) \bullet G</math></td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>A \rightarrow (B \rightarrow C)</math></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> </table>	1.	$(A \rightarrow C) \bullet G$	Zał.	2.			3.			4.			5.			6.			7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$		<p>(d)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>A \rightarrow (B \rightarrow C)</math></td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>B \rightarrow (A \rightarrow C)</math></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> </table>	1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.	2.			3.			4.			5.			6.			7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	
1.	$(A \rightarrow C) \bullet G$	Zał.																																									
2.																																											
3.																																											
4.																																											
5.																																											
6.																																											
7.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$																																										
1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.																																									
2.																																											
3.																																											
4.																																											
5.																																											
6.																																											
7.	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$																																										
<p>(e)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>G \equiv (A \vee B)</math></td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)</math></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> </table>	1.	$G \equiv (A \vee B)$	Zał.	2.			3.			4.			5.			6.			7.	$G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$		<p>(f)</p> <table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 5%; text-align: right;">1.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>C \vee (B \vee A)</math></td> <td style="padding: 2px;">Zał.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">2.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">3.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">4.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">5.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">6.</td> <td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black; padding-left: 10px; height: 15px;"></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;">7.</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"><math>\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)</math></td> <td style="background-color: #cccccc; width: 50px;"></td> </tr> </table>	1.	$C \vee (B \vee A)$	Zał.	2.			3.			4.			5.			6.			7.	$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$	
1.	$G \equiv (A \vee B)$	Zał.																																									
2.																																											
3.																																											
4.																																											
5.																																											
6.																																											
7.	$G \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$																																										
1.	$C \vee (B \vee A)$	Zał.																																									
2.																																											
3.																																											
4.																																											
5.																																											
6.																																											
7.	$\sim C \rightarrow (\sim B \rightarrow A)$																																										

## 12.8. Dalsze przykłady dowodów

### Przykład 7

Dowiedź, że zdanie B wynika z następujących trzech przesłanek:

- |    |                                   |      |            |
|----|-----------------------------------|------|------------|
| 1. | $A \rightarrow B$                 | Zał. | Dowieść: B |
| 2. | $B \rightarrow C$                 | Zał. |            |
| 3. | $(A \rightarrow C) \rightarrow B$ | Zał. |            |

Zdanie B występuje we wszystkich trzech przesłankach. Wiemy jednakże od razu, że nie wyprowadzimy B z przesłanki 2 – B występuje tam w poprzedniku implikacji, a żadna reguła inferencji nie pozwala nam wyprowadzić poprzednika implikacji. Mamy zatem do dyspozycji dwie pozostałe przesłanki. Zastanówmy się nad przesłanką 1. Moglibyśmy wyprowadzić B, gdybyśmy mieli A, lecz A nie mamy. Co więcej, nie wygląda na to, byśmy mogli wyprowadzić A. Zdanie A występuje w dwóch przesłankach 1 i 3. Nie możemy wyprowadzić A z przesłanki 1, bo występuje tam w poprzedniku implikacji, a żadna reguła inferencji nie pozwala nam wyprowadzić poprzednika implikacji. Nie możemy też wyprowadzić A z przesłanki 3, gdyż A jest tam poprzednikiem implikacji będącej z kolei poprzednikiem implikacji. Musimy zatem wyciągnąć wniosek, że na pewno nie będziemy mogli wyprowadzić zdania B z przesłanki 1.

Jeżeli nie możemy wyprowadzić B ani z przesłanki 1 ani z przesłanki 2, to będziemy musieli wykorzystać przesłankę 3. Aby to zrobić (za pomocą reguły  $\rightarrow$ Elim), potrzebujemy implikacji  $A \rightarrow C$ , której jednak nie mamy.

Jak możemy otrzymać  $A \rightarrow C$ ? Możemy próbować ją wyprowadzić, stosując regułę  $\rightarrow$ Wpr. Musimy zatem skonstruować odpowiednią subderywację:

- |                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------------------|-----|--|-------------------|--|---|--|--|
| 1.                | $A \rightarrow B$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Zał. |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
| 2.                | $B \rightarrow C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Zał. |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
| 3.                | $(A \rightarrow C) \rightarrow B$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Zał. |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
| 4.                | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>A</math></td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>C</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>A \rightarrow C</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td></td> </tr> </table> | $A$  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) | $C$ |  | $A \rightarrow C$ |  | B |  |  |
| $A$               | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
| $C$               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
| $A \rightarrow C$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |                           |     |  |                   |  |   |  |  |
| B                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |                           |     |  |                   |  |   |  |  |

Naszym celem teraz jest wyprowadzić C w skonstruowanej właśnie subderywacji, co przy założeniu dodatkowym subderywacji jest bardzo proste – musimy dwukrotnie zastosować regułę  $\rightarrow$ Elim:

- |                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---------------------------|-----|-------------------------|-----|-------------------------|-------------------|--|---|--|--|
| 1.                | $A \rightarrow B$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Zał. |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| 2.                | $B \rightarrow C$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Zał. |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| 3.                | $(A \rightarrow C) \rightarrow B$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Zał. |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| 4.                | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>A</math></td> <td style="padding-left: 20px;">Zał. (<math>\rightarrow</math>Wpr)</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>B</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\rightarrow</math>Elim 1, 4</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>C</math></td> <td style="padding-left: 20px;"><math>\rightarrow</math>Elim 2, 5</td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"><math>A \rightarrow C</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;">B</td> <td></td> </tr> </table> | $A$  | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr) | $B$ | $\rightarrow$ Elim 1, 4 | $C$ | $\rightarrow$ Elim 2, 5 | $A \rightarrow C$ |  | B |  |  |
| $A$               | Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| $B$               | $\rightarrow$ Elim 1, 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| $C$               | $\rightarrow$ Elim 2, 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| $A \rightarrow C$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |
| B                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |                           |     |                         |     |                         |                   |  |   |  |  |

Skoro z  $A$  wyprowadziliśmy  $C$ , możemy zamknąć subderywację i na linii dowodu macierzystego wprowadzić implikację  $A \rightarrow C$ , co jak pamiętamy, było potrzebne, aby wyprowadzić  $B$ :

1.	$A \rightarrow B$	Zał.
2.	$B \rightarrow C$	Zał.
3.	$(A \rightarrow C) \rightarrow B$	Zał.
4.	$A$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
5.	$B$	$\rightarrow$ Elim 1, 4
6.	$C$	$\rightarrow$ Elim 2, 5
7.	$A \rightarrow C$	$\rightarrow$ Wpr 4-6
8.	$B$	$\rightarrow$ Elim 3, 7

### Przykład 8

Mówiliśmy wielokrotnie, że równoważność jakby zawiera w sobie dwie implikacje. Część tych intuicji możemy poprzeć następującym dowodem:

1.	$A \equiv B$	Zał.	Dowieść: $(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$

Nasz wniosek jest koniunkcją. Jedyną dostępną tu strategią jest przygotowanie dowodu pod zastosowanie reguły  $\bullet$ Wpr – aby móc tę regułę zastosować, musimy mieć swobodnie stojące oba człony: implikację  $A \rightarrow B$  oraz implikację  $B \rightarrow A$ . Aby je otrzymać, musimy skonstruować dwie – niezależne – subderywacje. Zaczniemy od próby uzyskania pierwszego członu – implikacji  $A \rightarrow B$ :

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$A$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
	$B$	
	$A \rightarrow B$	

Widać wyraźnie, że otrzymanie implikacji  $A \rightarrow B$  nie następuje specjalnych trudności oraz że otrzymanie drugiego członu przebiegnie analogicznie:

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$A$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
3.	$B$	$\equiv$ Elim 1, 2
4.	$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ Wpr 2-3
5.	$B$	Zał. ( $\rightarrow$ Wpr)
6.	$A$	$\equiv$ Elim 1, 5
7.	$B \rightarrow A$	$\rightarrow$ Wpr 5-6
8.	$(A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$	$\bullet$ Wpr 4, 7

## 12.9. Dowodzenie a subderywacje

Subderywacje stanowią dowody pomocnicze i jako takie wszystkie subderywacje muszą zostać zamknięte, a informacja w nich zawarta wyprowadzona do derywacji macierzystej za pomocą odpowiedniej konstrukcyjnej reguły inferencyjnej.

Weźmy za przykład dowód, który widzieliśmy już wyżej (Przykład 6). Z trzech przesłanek mamy wyprowadzić zdanie B. W normalnym przebiegu dowodu dochodzimy do kroku 5, gdzie wyprowadzamy B:

1.	A → B	Zał.
2.	B → C	Zał.
3.	(A → C) → B	Zał.
4.	A	Zał. (→Wpr)
5.	B	→Elim 1, 4

Nie możemy jednak uznać dowodu za w tym miejscu skończony.

**Celem dowodzenia jest wyprowadzenie danego zdania na głównej linii derywacyjnej.**

Powyższy dowód jest ukończony dopiero w kroku ósmym:

6.	C	→Elim 2, 5
7.	A → C	→Wpr 4-6
8.	B	→Elim 3, 7

### Ćwiczenie 12.1 „dowody – 1”

Skonstruuj następujące dowody. (*Rozwiązania*, s. 382-383).

(a) Dowiedz:  $B \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	A → (B → C)	Zał.

(b) Dowiedz:  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1.	B → (A → C)	Zał.

(c) Dowiedz: C

- |    |                              |      |
|----|------------------------------|------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \equiv C$ | Zał. |
| 2. | $B \bullet D$                | Zał. |

(d) Dowiedz:  $\sim A \rightarrow [\sim B \rightarrow (C \bullet D)]$ 

- |    |            |      |
|----|------------|------|
| 1. | $C \vee A$ | Zał. |
| 2. | $D \vee B$ | Zał. |

(e) Dowiedz: C

- |    |                                   |      |
|----|-----------------------------------|------|
| 1. | $(A \rightarrow B) \equiv C$      | Zał. |
| 2. | $(A \rightarrow A) \rightarrow B$ | Zał. |

(f) Dowiedz:  $A \rightarrow (B \bullet C)$ 

- |    |                   |      |
|----|-------------------|------|
| 1. | $A \rightarrow C$ | Zał. |
| 2. | $A \rightarrow B$ | Zał. |

(g) Dowiedz:  $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 

- |    |                   |      |
|----|-------------------|------|
| 1. | $A \rightarrow B$ | Zał. |
|----|-------------------|------|

(h) Dowiedz:  $B \rightarrow (A \bullet C)$ 

- |    |                               |      |
|----|-------------------------------|------|
| 1. | $A \bullet (B \rightarrow C)$ | Zał. |
|----|-------------------------------|------|



(i) Dowiedz:  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 

1.	$C \bullet D$	Zał.

(j) Dowiedz:  $A \rightarrow (B \rightarrow (D \rightarrow C))$ 

1.	$C \bullet D$	Zał.

(k) Dowiedz:  $A \rightarrow (D \rightarrow C)$ 

1.	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Zał.
2.	$D \rightarrow B$	Zał.

(l) Dowiedz:  $(A \vee B) \rightarrow C$ 

1.	$(A \rightarrow C) \bullet \sim B$	Zał.
2.	$(B \vee C) \vee D$	Zał.