11. DOWODZENIE II

REGUŁY ≡ELIM, ∨WPR, MTP

Cele

- Umiejętność stosowania reguł pierwotnych ≡Elim, ∨Wpr oraz reguły wtórnej MTP.
- Umiejętność przeprowadzania prostych dowodów z użyciem tych reguł.

11.1. Reguła ≡Elim (reguła opuszczania równoważności)

Jeżeli w pewnym wierszu dowodu występuje (swobodnie) równoważność, a w innym wierszu dowodu występuje (swobodnie) jeden z jej członów, to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje pozostały jej człon.

i.	$p \equiv r$	
j.	p	
➢	r	≡Elim *i*, *j*

i.	$p \equiv r$	
j.	r	
➢	p	≡Elim *i*, *j*

Intuicje

Reguła ≡Elim jest podobna do reguły →Elim, choć w przeciwieństwie do reguły →Elim ma dwie wersje. Wiąże się to z tym, że o równoważności „*p* wtedy i tylko wtedy, gdy *r*" można myśleć jako o koniunkcji implikacji „*p* wtedy, gdy *r*" ($r \rightarrow p$) oraz implikacji „*p* tylko wtedy, gdy *r*" ($p \rightarrow r$).

Odmienność reguły ≡Elim – a zarazem jej intuicyjność – pokazuje również refleksja nad wartościami logicznymi. Jeżeli równoważność $p \equiv r$ jest prawdziwa, a jeden z jej członów (pierwszy lub drugi) jest również prawdziwy, to pozostały człon (odpowiednio: drugi lub pierwszy) musi mieć tę samą wartość logiczną, tj. musi być prawdziwy.

Wpiszcie brakujące wnioski:

Zofia dostanie ocenę celującą wtedy, ale tylko wtedy, gdy otrzyma 100% na teście.
Zofia dostała ocenę celującą.

Rafał dostanie ocenę celującą wtedy, ale tylko wtedy, gdy otrzyma 100% na teście.
Rafał otrzymał 100% na teście.

Porada babuni (o regule ≡Elim)
Nie mieszaj ≡Elim z →Elim.

© Katarzyna Paprzycka

Stosowanie reguły ≡Elim

Regułę ≡Elim można stosować tylko w *jeden sposób* (uwaga: druga wersja reguły ≡Elim wymaga, aby dane były inne zdania):

1.	~A ≡ ~(B • C)	Zał.
2.	~A	Zał.
3.	~(B • C)	≡Elim 1, 2

1.	B ≡ (~B ∨ A)	Zał.
2.	~B ∨ A	Zał.
3.	B	≡Elim 1, 2

Nie wolno reguły ≡Elim stosować do członów zdań:

1.	A ≡ B	Zał.
2.	A ∨ C	Zał.
~~3.~~	~~B~~	~~≡Elim 1, 2~~

1.	(A ≡ B) ≡ D	Zał.
2.	B	Zał.
~~3.~~	~~A~~	~~≡Elim 1, 2~~

Ćwiczenie 11.A „≡Elim – 1”

Uzupełnij brakujące informacje. (*Rozwiązania*, s. 368-369).

(a)

1.	C ≡ D	Zał.
2.	C	Zał.
3.		≡Elim 1, 2

(b)

1.	C ≡ D	Zał.
2.	D	Zał.
3.		≡Elim 1, 2

(c)

1.	B ≡ ~D	Zał.
2.		Zał.
3.	B	≡Elim 1, 2

(d)

1.	(C ∨ A) ≡ B	Zał.
2.		Zał.
3.	B	≡Elim 1, 2

(e)

1.	A ≡ (D • B)	Zał.
2.		Zał.
3.	A	≡Elim 1, 2

(f)

1.	M ≡ ~~N	Zał.
2.		Zał.
3.	M	≡Elim 1, 2

(g)

1.	~A ≡ ~B	Zał.
2.		Zał.
3.	~B	≡Elim 1, 2

(h)

1.		Zał
2.	~C ≡ (A • B)	Zał.
3.	~C	≡Elim 1, 2

(i)

1.	(A → B) ≡ (C ≡ D)	Zał
2.		Zał.
3.	A → B	≡Elim 1, 2

(j)

1.	A ≡ B	Zał
2.		Zał.
3.	B	≡Elim 1, 2

(k)

1.		Zał.
2.	(~D ≡ A) • C	Zał.
3.	~D ≡ A	Zał.
4.	~D	≡Elim 1, 3

(l)

1.	~A ≡ ~C	Zał
2.	~A ≡ D	Zał.
3.		Zał.
4.	~A	≡Elim 1, 3

(m)

1.	C	Zał
2.	A	Zał.
3.	[A ≡ (A ≡ B)] ≡ C	Zał.
4.		≡Elim 1, 3

(n)

1.	~D ≡ ~C	Zał
2.	A ≡ C	Zał.
3.		Zał.
4.	~D	≡Elim 1, 3

(o)

1.	~(D • A)	Zał.
2.	(~D → A) ≡ C	Zał.
3.	~(D • A) ≡ ~C	Zał.
4.		≡Elim 1, 3

(p)

1.	A ≡ B	Zał
2.	B ≡ C	Zał.
3.	B	Zał.
4.		≡Elim 1, 3

(q)

1.	(A ≡ B) ≡ C	Zał
2.	~(B ≡ C)	Zał.
3.		Zał.
4.	C	≡Elim 1, 3

(r)

1.	~A ≡ ~C	Zał
2.	A ≡ (D → (A ≡ C))	Zał.
3.		Zał.
4.	A	≡Elim 2, 3

11.2. Przykłady dowodów

Każdy z następujących dowodów spróbujcie skonstruować samodzielnie. Pełne dowody znajdziesz w *Rozwiązaniach*, s. 367.

Przykład 1

1.	(A • D) • B	Zał.	Dowieść: C
2.	C ≡ (A • D)	Zał.	

Zaczynamy, jak zwykle od analizy docelowej. Naszym celem jest wyprowadzenie zdania C, które jest pierwszym członem równoważności w wierszu 2. Znamy regułę, która pozwala na wyprowadzenie członu równoważności – jest to ≡Elim. Moglibyśmy zastosować regułę ≡Elim pod warunkiem, że dany byłby również swobodnie stojący drugi człon tej równoważności, tj. w naszym przypadku A • D, którego jednak nie mamy.

Musimy się zastanowić, jak otrzymać zdanie A • D. Zdanie A • D jest koniunkcją. Zwykle otrzymywaliśmy koniunkcję, łącząc ją z elementów za pomocą reguły •Wpr. Tym razem jednakże nie mamy elementów do złączenia, natomiast cała koniunkcja A • D jest pierwszym członem koniunkcji w wierszu 1, możemy ją zatem uzyskać, stosując regułę •Elim:

3.	A • D	•Elim 1

Skoro mamy równoważność C ≡ (A • D) w wierszu 2 oraz jej drugi człon A • D w wierszu 3, to możemy wyprowadzić pierwszy człon tej równoważności, o którego wyprowadzenie w dowodzie chodziło:

4.	C	≡Elim 2, 3

Przykład 2

1.	A • (B ≡ C)	Zał.	Dowieść: ~D
2.	A → C	Zał.	
3.	B ≡ ~D	Zał.	

Ponieważ będziemy musieli wykorzystać informację zawartą w przesłance 1 (pozostałe przesłanki to implikacja i równoważność, z którymi nie zrobimy nic bez jakiejś dodatkowej informacji), więc dostosujemy się do porady babuni dla koniunkcji – zastosujemy regułę •Elim:

4.	A	•Elim 1
5.	B ≡ C	•Elim 1

Teraz pomyślmy. Naszym celem jest wyprowadzenie zdania ~D, które występuje tylko w przesłance 3, jako drugi człon równoważności B ≡ ~D; będziemy mogli wyprowadzić zdanie ~D, stosując regułę ≡Elim, jeśli będziemy dysponowali pierwszym członem tej równoważności, tj. swobodnie stojącym zdaniem B, którego jednak nie mamy.

Jak wyprowadzić zdanie B? Poza zdaniem w wierszu 3, zdanie B występuje też w zdaniu w wierszu 5, gdzie jest pierwszym członem równoważności B ≡ C. (O wierszu 1 nie wspominamy, gdyż tam zdanie B występuje jako komponent członu koniunkcji; ponadto zdanie w wierszu 5 jest przecież właśnie wynikiem wyciągnięcia informacji ze zdania w wierszu 1, całość informacji dotyczącej zdania B, którą zawierało zdanie w wierszu 1 zawiera teraz zdanie w wierszu 5). Stosując regułę ≡Elim, moglibyśmy wyprowadzić zdanie B, gdybyśmy mieli drugi człon równoważności B ≡ C, tj. swobodnie stojące zdanie C, którego nie mamy.

Jak wyprowadzić C? Poza wierszem 5 zdanie C występuje też w wierszu 2, gdzie jest następnikiem implikacji A → C. Moglibyśmy więc wyprowadzić zdanie C, stosując regułę →Elim, jeśli mielibyśmy swobodnie stojący poprzednik tej implikacji, tj. zdanie A, które – na szczęście – mamy w wierszu 4.

Możemy zatem przystąpić do dalszej części dowodu, kierując się powyższym rozumowaniem. Zaczynamy od wyprowadzenia zdania C za pomocą reguły →Elim zastosowanej do swobodnie stojącej implikacji A → C (wiersz 2) oraz swobodnie stojącego poprzednika tej implikacji, tj. zdania A (wiersz 4):

6.	C	→Elim 2, 4

Ponieważ mamy już swobodnie stojące zdanie C (wiersz 6), możemy zastosować regułę ≡Elim do tego zdania oraz do swobodnie stojącej równoważności B ≡ C (wiersz 5), żeby wyprowadzić zdanie B:

7.	B	≡Elim 5, 6

Ponieważ mamy już swobodnie stojące zdanie B (wiersz 7), możemy zastosować regułę ≡Elim ponownie, tym razem do swobodnie stojącej równoważności B ≡ ~D (wiersz 3), żeby wyprowadzić wniosek, o którego wyprowadzenie chodziło w dowodzie:

8.	~D	≡Elim 3, 7

Ćwiczenie 11.B „≡Elim – 2”

W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go oraz uzasadnij krok ostatni. (*Rozwiązania*, s. 369).

(a)

1.	(A ≡ B) • C	Zał.
2.	B	Zał.
3.		
4.	A	

(b)

1.	C ≡ B	Zał.
2.	B • ~A	Zał.
3.		
4.	C	

(c)

1.	B ≡ C	Zał.
2.	A → B	Zał.
3.	A	Zał.
4.		
5.	C	

(d)

1.	C → B	Zał.
2.	~A ≡ B	Zał.
3.	C	Zał.
4.		
5.	~A	

(e)

1.	A ≡ B	Zał.
2.	B ≡ C	Zał.
3.	A	Zał.
4.		
5.	C	

(f)

1.	A ≡ B	Zał.
2.	B ≡ C	Zał.
3.	C	Zał.
4.		
5.	A	

Ćwiczenie 11.C „≡Elim – 3”

W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je oraz uzasadnij krok ostatni. (*Rozwiązania*, s. 370).

(a)

1.	(A ≡ B) • C	Zał.
2.	C • A	Zał.
3.		
4.		
5.	B	

(b)

1.	(A ≡ B) • C	Zał.
2.	B • D	Zał.
3.		
4.		
5.	A	

(c)

1.	B ≡ C	Zał.
2.	C ≡ D	Zał.
3.	A • B	Zał.
4.		
5.		
6.	D	

(d)

1.	B ≡ C	Zał.
2.	A ≡ B	Zał.
3.	D • C	Zał.
4.		
5.		
6.	A	

(e)

1.	B ≡ C	Zał.
2.	(A → C) • C	Zał.
3.	A ≡ B	Zał.
4.		
5.		
6.	A	

(f)

1.	(A ≡ B) ≡ (~C • A)	Zał.
2.	~C	Zał.
3.	A	Zał.
4.		
5.		
6.	B	

Ćwiczenie 11.D „dowody – 1”

Skonstruuj następujące dowody. (*Rozwiązania*, s. 370).

(a) Dowiedź: C

1.	$A \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \equiv B$	Zał.
3.	A	Zał.

(b) Dowiedź: A

1.	$(A \equiv B) \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$B \equiv C$	Zał.
3.	C	Zał.

(c) Dowiedź: C

1.	$B \equiv (B \equiv C)$	Zał.
2.	$A \rightarrow (B \bullet D)$	Zał.
3.	A	Zał.

(d) Dowiedź: $B \bullet D$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$A \bullet C$	Zał.

(e) Dowiedź: $A \bullet C$

1.	$A \equiv B$	Zał.
2.	$C \equiv D$	Zał.
3.	$B \bullet D$	Zał.

(f) Dowiedź: H

1.	$(\sim A \bullet C) \equiv (B \vee C)$	Zał.
2.	$H \equiv (B \vee C)$	Zał.
3.	$(\sim A \bullet D) \bullet C$	Zał.

11.3. Reguła ∨Wpr (reguła dołączania alternatywy)

> Jeżeli w pewnym wierszu dowodu występuje (swobodnie) zdanie *p*, to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje alternatywa, której członem jest zdanie *p*.
>
> | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | *i.* | p | | | *i.* | p | |
> | ➢ | $p \vee r$ | ∨Wpr *i* | | ➢ | $r \vee p$ | ∨Wpr *i* |

Reguła wprowadzania alternatywy zwana jest także regułą dodawania.

Intuicje

Załóżmy, że zdanie B jest prawdziwe. Czy następujące zdania są prawdziwe?

$B \vee \sim C$	O prawdziwe	O fałszywe
$B \vee \sim(C \bullet B)$	O prawdziwe	O fałszywe
$B \vee \sim\sim[\sim A \vee \sim(B \rightarrow \sim C)]$	O prawdziwe	O fałszywe
$C \vee B$	O prawdziwe	O fałszywe
$[\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim\sim(C \vee A)] \vee B$	O prawdziwe	O fałszywe

Mam nadzieję, że odpowiedzieliście, że każde z tych zdań jest prawdziwe. A wiemy to z pewnością, ponieważ wiemy, że jeżeli zdanie B jest prawdziwe, to prawdziwa jest *każda* alternatywa, której członem jest zdanie B. Ta zależność między prawdziwością członu alternatywy a prawdziwością alternatywy stanowi właśnie uzasadnienie dla reguły ∨Wpr.

W wypadku reguły ∨Wpr nie należy się oszukiwać i sugerować, że jest ona regułą intuicyjną. Jej zastosowania wydają nam się właśnie wysoce nieintuicyjne, choć przyciśnięci do muru powyższym rozumowaniem powiedzielibyśmy inaczej. Na wszelki wypadek samodzielnie przekonajcie się, czy poniższe wnioskowania wydają się Wam intuicyjne:

Teoria Einsteina jest prawdziwa.

Teoria Einsteina lub teoria Newtona jest prawdziwa.

Będzie padać deszcz.

Będzie padać deszcz lub będzie świecić słońce.

Mam wrażenie, że wnioskowania te nie wydają się Wam intuicyjne. Warto jednak zwrócić uwagę, że ich nieintuicyjność *nie* bierze się stąd, że wydają się Wam *nieprawidłowe*. Przecież – po chwili refleksji – przyznamy, że we wnioskowaniach tych wniosek nie może być fałszywy, *jeżeli* przesłanka jest prawdziwa! Wydają się nam jednak nieintuicyjne, gdyż trudno nam sobie wyobrazić, dlaczego ktoś, kto wie już, że *p*, chciałby «rozmydlać» tę wiedzę w alternatywę „*p* lub coś tam”. Okazuje się jednak, że reguła ∨Wpr jest niezbędna dla uchwycenia mnóstwa prawidłowych wnioskowań, a my stosujemy ją po prostu intuicyjnie, nie zdając sobie z niej sprawy. Oto przykład.

Dlaczego reguła ∨Wpr jest użyteczna

Rozważmy następujące wnioskowanie, którego prawidłowość jest tak bezsporna, że pozwolę Wam wpisać wniosek:

Jeżeli Jaś otrzyma 99 lub 100 punktów na teście z matematyki, to otrzyma ocenę celującą.
Jaś otrzymał 99 punktów na teście z matematyki.

Po symbolizacji:

$(D \vee S) \rightarrow C$
D

C

C: Jaś otrzyma ocenę ***c***elującą z matematyki.
D: Jaś otrzyma ***d***ziewięćdziesiąt dziewięć punktów na teście z matematyki.
S: Jaś otrzyma ***s***to punktów na teście z matematyki.

Spróbujmy wykazać prawidłowości tego rozumowania za pomocą dowodu:

1.	$(D \vee S) \rightarrow C$	Zał.	Dowieść: C
2.	D	Zał.	

Aby wyprowadzić zdanie C, musielibyśmy zastosować regułę →Elim do implikacji $(D \vee S) \rightarrow C$ w wierszu 1; a moglibyśmy to zrobić, o ile mielibyśmy swobodnie stojący poprzednik tej implikacji, tj. musielibyśmy mieć wolno stojące zdanie $D \vee S$. Tego zdania jednak nie mamy. Możemy je jednak wyprowadzić, korzystając właśnie z reguły ∨Wpr, ponieważ mamy człon tej alternatywy, tj. zdanie D.

3.	$D \vee S$	∨Wpr 2

Zwróćmy uwagę, że w tym kontekście rozumowanie oparte na regule ∨Wpr nie wzbudza żadnych intuicyjnych wątpliwości. Wiemy, że jeżeli Jaś otrzyma 99 lub 100 punktów na teście z matematyki, to otrzyma ocenę celującą. Skoro Jaś otrzymał 99 punktów, to prawdziwy jest poprzednik danej nam implikacji: „Jaś otrzymał 99 lub 100 punktów na teście z matematyki". Możemy zatem wyciągnąć wniosek, który bez wahania wyciągamy, nie zdając sobie sprawy, ile zawdzięczamy regule ∨Wpr:

4.	C	→Elim 1, 3

Dlaczego reguła ∨Wpr jest kłopotliwa

Właściwą odpowiedź na pytanie, dlaczego reguła ∨Wpr jest kłopotliwa, już znacie, ale warto to sobie jeszcze raz uświadomić. Reguła ∨Wpr pozwala na dołączenie *dowolnego* zdania jako drugiego członu alternatywy do zdania, które już mamy. Niech dane będą dwie przesłanki:

1.	$A \rightarrow C$	Zał.
2.	A	Zał.

Czy wolno dołączyć zdanie ~A do przesłanki 2? Tak (por. wiersz 3, niżej). A do przesłanki pierwszej? Też (por. wiersz 4, niżej). A czy wolno dołączyć do przesłanki 1 chorobliwie wyglądające zdanie $[\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim\sim(C \vee A)] \bullet \sim[\sim(\sim D \equiv \sim B) \bullet \sim\sim(\sim D \vee \sim(C \vee \sim B))]$? Tak (por. wiersz 6, niżej). A do przesłanki drugiej? Też (por. wiersz 5, niżej).

3. $A \vee {\sim}A$ $\vee$Wpr 2
4. ${\sim}A \vee (A \to C)$ $\vee$Wpr 1
5. $\{[{\sim}({\sim}A \to B) \equiv {\sim}{\sim}(C \vee A)] \bullet {\sim}[{\sim}({\sim}D \equiv {\sim}B) \bullet {\sim}{\sim}({\sim}D \vee {\sim}(C \vee {\sim}B))]\} \vee A$ $\vee$Wpr 2
6. $(A \to C) \vee \{[{\sim}({\sim}A \to B) \equiv {\sim}{\sim}(C \vee A)] \bullet {\sim}[{\sim}({\sim}D \equiv {\sim}B) \bullet {\sim}{\sim}({\sim}D \vee {\sim}(C \vee {\sim}B))]\}$ $\vee$Wpr 1

Dozwolone są w tej sytuacji powyższe kroki, jak i tryliony innych. W dowodzeniu zawsze musicie dążyć do celu! Nigdy nie należy podejmować kroku tylko dlatego, że wolno! Inaczej zginiecie pod ciężarem nieskończonej liczby bezsensownych – ale dozwolonych – kroczków.

Porada babuni (o regule $\vee$Wpr)

Nigdy nie stosuj $\vee$Wpr, chyba że dobrze wiesz, co chcesz zrobić z wyprowadzonym za jej pomocą zdaniem.

Zwróćcie uwagę, że powyżej nie powiedziane zostało, co z przesłanek 1 i 2 ma niby wynikać. Jeżeli chodzi o to, aby dowieść, że C, to można to zrobić w jednym kroku. Jeżeli chodzi o to, żeby dowieść, że $C \bullet A$, to można to zrobić w dwóch krokach. Ale może chodzić o to, aby dowieść, że $[(A \to C) \vee B] \bullet (D \vee A)$.

Przykład 3

Spróbuj skonstruować dowód samodzielnie (*Rozwiązania*, s. 367).

1. $A \to C$ Zał. Dowieść: $[(A \to C) \vee B] \bullet (D \vee A)$
2. A Zał.

Nasz wniosek jest koniunkcją i będziemy go mogli wyprowadzić za pomocą reguły $\bullet$Wpr, o ile będziemy dysponowali swobodnie stojącymi członami: z jednej strony alternatywą $(A \to C) \vee B$, a z drugiej strony alternatywą $D \vee A$. Zastanówmy się kolejno, jak je otrzymać?

Moglibyśmy otrzymać alternatywę $D \vee A$ za pomocą reguły $\vee$Wpr, gdyby dany nam był swobodnie stojący jeden z członów tej alternatywy: albo zdanie D, albo zdanie A. Istotnie mamy zdanie A swobodnie stojące w wierszu 2, a ponieważ reguła $\vee$Wpr mówi, że możemy dołączyć jako pozostały człon alternatywy dowolne zdanie do zdania A, więc pozwala *również* na dodanie zdania D, tak aby uzyskać zdanie:

3. $D \vee A$ $\vee$Wpr 2

Chwila refleksji wystarczy, żeby sobie uświadomić, iż reguła $\vee$Wpr pozwoli również na wyprowadzenie zdania $(A \to C) \vee B$. Mamy przecież jeden z członów tej alternatywy. Nie mamy jej drugiego członu (zdania B), ale mamy jej pierwszy człon (zdanie $A \to C$), stojące swobodnie w wierszu 1. Wolno nam zatem dołączyć nowy wiersz dowodu, w którym zdanie $A \to C$ będzie pierwszym członem alternatywy, a drugim jej członem będzie dowolne zdanie, w szczególności zaś to, którego potrzebujemy w tym dowodzie, a mianowicie zdanie B:

4. $(A \to C) \vee B$ $\vee$Wpr 1

Ostatni krok to zastosowanie reguły $\bullet$Wpr do dwóch właśnie uzyskanych alternatyw:

5. $[(A \to C) \vee B] \bullet (D \vee A)$ $\bullet$Wpr 4, 3

Stosowanie reguły ∨Wpr

Regułę ∨Wpr można stosować na *nieograniczoną liczbę sposobów* – lecz gdy już zdecydujemy, co ma być dodanym członem alternatywy, reguła może być zastosowana dwojako. W poniższym przypadku do zdania ~A zdecydowaliśmy się dodać zdanie D ≡ C:

1.	~A	Zał.
2.	(D ≡ C) ∨ ~A	∨Wpr 1
3.	~A ∨ (D ≡ C)	∨Wpr 1

Nie wolno reguły ∨Wpr stosować do członów zdań:

1.	~A	Zał.
2.	~~~(A ∨ (D ≡ C))~~	~~∨Wpr 1~~

1.	A • B	Zał.
2.	~~(A ∨ C) • B~~	~~∨Wpr 1~~

Ćwiczenie 11.E „∨Wpr – 1”

Zastosuj regułę ∨Wpr, dodając zdanie B. (*Rozwiązania*, s. 371).

(a)

1.	A	Zał.
2.	A → C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(b)

1.	A	Zał.
2.	A → C	Zał.
3.		∨Wpr 2
4.		∨Wpr 2

(c)

1.	~B	Zał.
2.	B → B	Zał.
3.		∨Wpr 2
4.		∨Wpr 2

(d)

1.	~B	Zał.
2.	B → B	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(e)

1.	B	Zał.
2.	A ∨ C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 2
5.		∨Wpr 2

(f)

1.	~A	Zał.
2.	A ≡ C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1
5.		∨Wpr 2
6.		∨Wpr 2

Ćwiczenie 11.F „∨Wpr – 2”

Zastosuj regułę ∨Wpr, dodając zdanie ~B. (*Rozwiązania*, s. 371).

(a)

1.	A	Zał.
2.	A → C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(b)

1.	A	Zał.
2.	A → C	Zał.
3.		∨Wpr 2
4.		∨Wpr 2

(c)

1.	~A	Zał.
2.	A ≡ C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(d)

1.	B	Zał.
2.	A ∨ C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(e)

1.	~B	Zał.
2.	B → B	Zał.
3.		∨Wpr 1

(f)

1.	~B	Zał.
2.	B → B	Zał.
3.		∨Wpr 2
4.		∨Wpr 2

Ćwiczenie 11.G „∨Wpr – 3"

Zastosuj regułę ∨Wpr, dodając zdanie ~B ≡ A. (*Rozwiązania*, s. 371-372).

(a)

1.	A	Zał.
2.	A → C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(b)

1.	~A	Zał.
2.	A ≡ C	Zał.
3.		∨Wpr 1
4.		∨Wpr 1

(c)

1.	A	Zał.
2.	A → C	Zał.
3.		∨Wpr 2
4.		∨Wpr 2

(d)

1.	~B	Zał.
2.	B → B	Zał.
3.		∨Wpr 2
4.		∨Wpr 2

Czy wiesz, że…

Istnieją dwa rodzaje systemów dowodzenia: systemy aksjomatyczne i systemy dedukcji naturalnej.

Systemy aksjomatyczne wyróżniają pewne tautologie (aksjomaty), z których starają się wyprowadzić resztę tautologii za pomocą minimalnej ilości reguł. Aksjomatyzacja logiki zdań zaproponowana przez Jana Łukasiewicza np. wyróżnia trzy aksjomaty:

$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
$(\sim\alpha \to \sim\beta) \to (\beta \to \alpha)$

Pod zmienne α, β, γ można podstawiać dowolne (i dowolnie złożone) schematy zdaniowe na mocy tzw. reguły podstawiania. Jedyną dodatkową regułą jest tzw. reguła odrywania, czyni *modus ponens* (niżej omawiana jako reguła →Elim).

Systemy aksjomatyczne są niezwykle eleganckie i teoretycznie doniosłe. W praktyce jednak są bardzo trudne do stosowania. Właśnie dlatego powstały systemy dedukcji naturalnej. Jeden z twórców systemów dedukcji naturalnej, Stanisław Jaśkowski, rozpoczął swe badania w odpowiedzi na pytanie postawione przez jego nauczyciela, Jana Łukasiewicza, który zwrócił uwagę, że systemy aksjomatyczne nie oddają rzeczywistej praktyki dowodzenia przez matematyków.

Systemy dedukcji naturalnej nie wprowadzają żadnych aksjomatów, lecz jedynie reguły dowodzenia, które można wykorzystać również do dowodzenia tautologii. Pierwsze systemy dedukcji naturalnej zostały niezależnie odkryte przez Stanisława Jaśkowskiego właśnie oraz Gerharda Gentzena, którzy opublikowali swoje pierwsze prace w tym zakresie w 1934 roku. Od tego czasu powstało bardzo wiele systemów dedukcji naturalnej. Różnią się one przyjmowanymi regułami, a także metodami (w tym graficznymi) reprezentacji dowodów.

11.4. Jeszcze jeden przykład dowodu z regułą ∨Wpr

Jeden przykład dowodu stosującego regułę ∨Wpr widzieliśmy. Zróbmy jeszcze jeden. Jak zwykle spróbujcie go skonstruować samodzielnie. Pełen dowód znajdziesz w *Rozwiązaniach*, s. 367.

Przykład 4

1.	(C • D) ≡ (~A ∨ B)	Zał.	Dowieść: C
2.	B	Zał.	

Naszym celem jest wyprowadzenie swobodnie stojącego zdania C, które jest członem koniunkcji będącej z kolei członem równoważności z wiersza 1. Jeśli uda nam się wyprowadzić koniunkcję C • D, otrzymanie C jest proste – zastosujemy •Elim. Musimy się tylko zastanowić:

Jak otrzymać zdanie C • D? Zauważyliśmy już, że jest to pierwszy człon równoważności. Gdybyśmy mieli drugi jej człon, tj. ~A ∨ B, wówczas moglibyśmy zastosować regułę ≡Elim.

Jak zatem otrzymać zdanie ~A ∨ B? Zdanie ~A ∨ B jest alternatywą – moglibyśmy ją uzyskać, stosując regułę ∨Wpr, gdybyśmy mieli którykolwiek z jej członów, i – na szczęście – drugi jej człon, zdanie B, występuje swobodnie w wierszu 2. Do zdania B z wiersza 2 możemy – na mocy reguły ∨Wpr – dodać dowolne zdanie, w szczególności możemy dodać zdanie ~A, gdyż potrzebujemy alternatywę ~A ∨ B:

3.	~A ∨ B	∨Wpr 2

Mamy teraz równoważność (C •D) ≡ (~A ∨ B) w wierszu 1 oraz drugi jej człon (~A ∨ B) w wierszu 3, możemy zatem wyprowadzić pierwszy człon tej równoważności za pomocą reguły ≡Elim:

4.	C • D	≡Elim 1, 3

Teraz pozostaje zastosowanie reguły •Elim, aby uzyskać żądany wniosek:

5.	C	•Elim 4

Czy wiesz, że…

Pionierzy badań nad sztuczną inteligencją, A. Newell, J.C. Shaw i H.A. Simon, stworzyli program *Logic Theorist*, którego zadanie polegało na dowodzeniu twierdzeń. Nie jest to zadanie banalne, gdyż proces dowodzenia nie jest algorytmizowalny.

Programowi *Logic Theorist* udało się dowieść 38 z pierwszych 52 twierdzeń przedstawionych przez B. Russella i A. N. Whiteheada w *Principia Mathematica*. W przypadku jednego twierdzenia dowód przedstawiony przez program *Logic Theorist* był elegantszy niż dowód podany przez sławnych logików. Trzej autorzy pośpiesznie napisali krótki artykuł na temat otrzymanego dowodu, dopisując do swych nazwisk czwartego autora: *Logic Theorist*. Był to pierwszy artykuł, którego współautorem była maszyna. Niestety, artykuł się nie ukazał – redakcja prestiżowego czasopisma *The Journal of Symbolic Logic* tekst odrzuciła.

Źródło: J. Weizenbaum, *Computer Power and Human Reason* (San Francisco: W.H. Freeman, 1976).

Ćwiczenie 11.H „∨Wpr – 4”

W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go oraz uzasadnij krok ostatni. (*Rozwiązania*, s. 372).

(a)

1.	A	Zał.
2.	(A ∨ B) → C	Zał.
3.		
4.	C	

(b)

1.	(D ∨ ~B) → A	Zał.
2.	~B	Zał.
3.		
4.	A	

(c)

1.	~B	Zał.
2.	(A ∨ ~B) → C	Zał.
3.		
4.	C	

(d)

1.	(C ∨ ~B) → (~A ∨ ~B)	Zał.
2.	C	Zał.
3.		
4.	~A ∨ ~B	

(e)

1.	A	Zał.
2.	D ≡ (A ∨ C)	Zał.
3.		
4.	D	

(f)

1.	~B	Zał.
2.	C ≡ (~A ∨ ~B)	Zał.
3.		
4.	C	

(g)

1.	(B ∨ A) ≡ (C ∨ D)	Zał.
2.	A	Zał.
3.		
4.	C ∨ D	

(h)

1.	~A	Zał.
2.	C	Zał.
3.		
4.	(C ∨ A) ∨ (C ∨ D)	

(i)

1.	~A	Zał.
2.	C	Zał.
3.		
4.	B ∨ (C ∨ D)	

(j)

1.	~A	Zał.
2.	C	Zał.
3.		
4.	(C ∨ B) ∨ D	

Ćwiczenie 11.I „∨Wpr – 5”

W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je oraz uzasadnij krok ostatni. (*Rozwiązania*, s. 372-373).

(a)

1.	A • B	Zał.
2.	(A ∨ C) → D	Zał.
3.		
4.		
5.	D	

(b)

1.	~D ≡ (A ∨ C)	Zał.
2.	C • B	Zał.
3.		
4.		
5.	~D	

(c)

1.	A	Zał.
2.	C	Zał.
3.		
4.		
5.	(A∨ B) • (D ∨ C)	

(d)

1.	A	Zał.
2.	A → [(A ∨ B) → D]	Zał.
3.		
4.		
5.	D	

(e)

1.	(C ∨ A) → [D ≡ (C ∨ A)]	Zał.
2.	A	Zał.
3.		
4.		
5.	D	

(f)

1.	A	Zał.
2.	(C ∨ A) → B	Zał.
3.		
4.		
5.	B ∨ C	

Ćwiczenie 11.J „dowody – 2"

Skonstruuj następujące dowody. (*Rozwiązania*, s. 373).

(a) Dowiedź: ~C

1.	(A ∨ B) → D	Zał.
2.	(~E ∨ D) → ~C	Zał.
3.	A	Zał

(b) Dowiedź: [(A ∨ B) ∨ C] • (D ∨ A)

1.	A	Zał.
2.	~B	Zał.

11.5. Reguła wtórna MTP (*modus tollendo ponens*)

Pozwolimy sobie teraz przerwać nasz ciąg uczenia się reguł pierwotnych systemu SD i wprowadzimy jedną, bardzo użyteczną regułę wtórną, a mianowicie regułę MTP pozwalającą nam na wykorzystanie informacji zawartej w alternatywie. W rozdziale 15 wykażemy, że reguła MTP jest regułą wtórną, tj. że wszystkie kroki wnioskowania, na które pozwala reguła MTP, można uzasadnić wyłącznie za pomocą reguł pierwotnych systemu SD. Tymczasem jednak pozwolimy sobie na stosowanie reguły MTP:

Jeżeli w pewnym wierszu dowodu występuje (swobodnie) alternatywa, a w innym wierszu dowodu występuje (swobodnie) negacja jednego jej członu, to wolno do dowodu dołączyć wiersz, gdzie (swobodnie) występuje pozostały człon tej alternatywy.

i.	*p* ∨ *r*	
j.	~*p*	
➢	*r*	MTP *i*, *j*

i.	*p* ∨ *r*	
j.	~*r*	
➢	*p*	MTP *i*, *j*

Porada babuni (o regule MTP)

Uważaj na negacje!

Intuicje

O intuicyjności reguły MTP nie trzeba nikogo przekonywać. Wpiszcie wnioski w następujących rozumowaniach, a przekonacie się sami:

W stołówce podadzą na deser albo lody, albo budyń.
Niestety, nie podali lodów.

Alicja może zdawać egzamin w formie albo pisemnej, albo ustnej.
Alicja musiała być w pracy i przepadły jej wszystkie terminy ustnych egzaminów.

Stosowanie reguły MTP

Regułę MTP można stosować tylko w *jeden sposób* (uwaga: druga wersja reguły MTP wymaga, aby dane były inne zdania):

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$\sim A$	Zał.
3.	B	MTP 1, 2

Ponieważ reguła wymaga, aby oprócz alternatywy dany był też *zanegowany* jeden z jej członów, warto się zastanowić nad tym, jak stosować się będzie reguła MTP do alternatyw, których człony są zanegowane. Spróbujcie zastosować regułę MTP do poniższych przykładów, uzupełniając brakujące informacje:

1.	$D \vee \sim C$	Zał.
2.	$\sim D$	Zał.
3.		MTP 1, 2

1.	$D \vee \sim C$	Zał.
2.		Zał.
3.	D	MTP 1, 2

Mamy do czynienia z alternatywą, której pierwszym członem jest zdanie proste D, a drugim członem negacja ~C. Gdy dane jest jeszcze zdanie ~D, to możemy zastosować regułę MTP, gdyż negacja ~D jest negacją pierwszego członu alternatywy $D \vee \sim C$, a w takim wypadku reguła MTP pozwala nam na wyprowadzenie drugiego członu alternatywy, czyli negacji ~C.

W drugim wypadku dana jest ponownie alternatywa $D \vee \sim C$, lecz tym razem MTP została zastosowana tak, że wyprowadzony został pierwszy jej człon, a mianowicie D. Brakuje tu informacji dotyczącej tego, co jeszcze musiało być dane. Aby wyprowadzić pierwszy człon alternatywy, musieliśmy mieć negację drugiego członu tej alternatywy. Drugim członem alternatywy $D \vee \sim C$ jest zdanie ~C, którego negacją jest zdanie ~~C. W wierszu 2 drugiego dowodu brakuje zatem zdania ~~C.

Jednym z częstych błędów jest przypuszczenie, że reguła MTP jest prawidłowo zastosowana w obydwu przypadkach niżej przedstawionych:

1.	$A \vee \sim B$	Zał.
2.	$\sim\sim B$	Zał.
3.	A	MTP 1, 2

1.	$A \vee \sim B$	Zał.
2.	B	Zał.
~~3.~~	~~A~~	~~MTP 1, 2~~

W przypadku drugim zastosowanie reguły MTP nie jest jednak uprawnione. Zdanie B nie stanowi bowiem negacji zdania ~B. Musimy pamiętać bowiem, że reguły inferencyjne są regułami syntaktycznymi – dostępna im jest jedyne struktura syntaktyczna formuł (a więc to, z jakich symboli są złożone), a nie ich znaczenie. Oczywiście wnioskowanie, że A na podstawie przesłanek $A \vee \sim B$ oraz B jest wnioskowaniem prawidłowym – będziemy się o tym mogli przekonać nieco później, jak już skompletujemy nasze reguły wnioskowania.

Jak zwykle nie wolno reguły MTP stosować do członów zdań:

1.	$A \vee (B \vee C)$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
~~3.~~	~~C~~	~~MTP 1, 2~~

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$\sim A \equiv C$	Zał.
~~3.~~	~~B~~	~~MTP 1,2~~

Ćwiczenie 11.K „MTP – 1”

Uzupełnij brakujące informacje. (*Rozwiązania*, s. 373).

(a)

1.	$A \vee B$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.		MTP 1, 2

(b)

1.	$A \vee B$	Zał.
2.		Zał.
3.	B	MTP 1, 2

(c)

1.		Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.	C	MTP 1, 2

(d)

1.	$\sim A \vee \sim B$	Zał.
2.		Zał.
3.	$\sim A$	MTP 1, 2

(e)

1.		Zał.
2.	$\sim(B \bullet C)$	Zał.
3.	$\sim A$	MTP 1, 2

(f)

1.	$(A \rightarrow C) \vee B$	Zał.
2.	$\sim B$	Zał.
3.		MTP 1, 2

(g)

1.	$A \vee \sim B$	Zał.
2.		Zał.
3.	A	MTP 1, 2

(h)

1.	$\sim A$	Zał.
2.		Zał.
3.	$\sim\sim B$	MTP 1, 2

11.6. Przykłady dowodów z zastosowaniem reguły MTP

Spróbuj skonstruować następujące dowody samodzielnie. Pełne dowody znajdziesz w *Rozwiązaniach*, s. 367-368.

Przykład 5

1.	$A \vee B$	Zał.	Dowieść: A
2.	$C \rightarrow \sim B$	Zał.	
3.	C	Zał.	

Naszym celem jest wyprowadzenie swobodnie stojącego zdania A, które jest pierwszym członem alternatywy z wiersza 1. Moglibyśmy wyprowadzić zdanie A, gdybyśmy mieli negację drugiego członu alternatywy $A \vee B$, tj. gdybyśmy mieli ~B.

Zdanie ~B jest następnikiem implikacji z wiersza 2, a zatem moglibyśmy je wyprowadzić, stosując →Elim, gdybyśmy mieli poprzednik tej implikacji, tj. C, który rzeczywiście mamy w wierszu 3:

4.	$\sim B$	→Elim 2, 3

Mamy teraz alternatywę $A \vee B$ swobodnie stojącą w wierszu 1 oraz negację jej drugiego członu, tj. swobodnie stojące zdanie ~B, w wierszu 4, możemy zatem zastosować regułę MTP i wyprowadzić pierwszy człon tej alternatywy:

5.	A	MTP 1, 4

Przykład 6

1.	~A ∨ ~B	Zał.	Dowieść: ~A
2.	B • ~~B	Zał.	

Naszym celem jest wyprowadzenie zdania ~A, które jest pierwszym członem alternatywy w wierszu 1. Moglibyśmy wyprowadzić ~A, gdybyśmy mieli negację drugiego członu tej alternatywy. Ponieważ drugim członem alternatywy ~A ∨ ~B jest zdanie ~B, to negacją drugiego członu tej alternatywy będzie zdanie ~~B. Zdanie ~~B nie występuje w dowodzie swobodnie, ale możemy je wyprowadzić z wiersza 2, stosując regułę •Elim:

3.	~~B	•Elim 2

Mamy teraz alternatywę ~A ∨ ~B swobodnie stojącą w wierszu 1 oraz negację jej drugiego członu, tj. swobodnie stojące zdanie ~~B, w wierszu 3, możemy zatem zastosować regułę MTP i wyprowadzić pierwszy człon tej alternatywy:

4.	~A	MTP 1, 3

Uwaga. Aby móc zastosować regułę MTP nie wystarczyłoby wyprowadzenie zdania B, gdyż zdanie B nie jest negacją zdania ~B.

Przykład 7

Spróbujcie dowieść prawidłowości następującego rozumowania:

Jeżeli dostanę 17 lub 18 punktów na teście, to otrzymam ocenę bdb. Otrzymam ocenę bdb tylko jeśli albo przyswoję sobie regułę wprowadzania implikacji albo wkuję wszystkie możliwe dowody na pamięć. Dostałem 18 punktów, a przecież nie można wkuć wszystkich możliwych dowodów na pamięć, więc:
Przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji.

B: Otrzymam ***b***db.
O: Dostanę ***o***siemnaście punktów.
P: ***P***rzyswoję sobie →Wpr.
S: Dostanę ***s***iedemnaście punktów.
W: ***W***kuję wszystkie dowody.

1.	(S ∨ O) → B	Zał.	Dowieść: P
2.	B → (P ∨ W)	Zał.	
3.	O • ~W	Zał.	

Naszym celem jest wyprowadzenie zdania P. Zdanie P jest pierwszym członem alternatywy P ∨ W znajdującej się w następniku implikacji z wiersza 2. Aby wyprowadzić P, musimy najpierw wyprowadzić alternatywę, co moglibyśmy prosto uczynić (za pomocą reguły →Elim), gdybyśmy mieli poprzednik implikacji B → (P ∨ W), czyli gdybyśmy mieli swobodnie stojące zdanie B. Jedynym sposobem na otrzymanie zdania B jest zastosowanie reguły →Elim do implikacji z wiersza 1, ale do tego potrzebujemy swobodnie występującego poprzednika tej implikacji, tj. zdania S ∨ O, którego nie mamy. Ponieważ zdanie S ∨ O jest alternatywą, więc możemy je łatwo otrzymać przez zastosowanie reguły ∨Wpr, o ile mamy któryś z członów tej alternatywy. Ani S, ani O nie występują swobodnie w dowodzie, ale możemy wyprowadzić O z wiersza 3, stosując regułę •Elim. Wykonajmy zatem wyżej obmyślone kroki:

4.	O	•Elim 3

Do zdania O możemy dodać dowolne zdanie, a w szczególności zdanie S, tak aby otrzymać alternatywę S ∨ O:

5.	S ∨ O	∨Wpr 4

Mamy teraz implikację (S ∨ O) → B w wierszu 1 oraz jej poprzednik S ∨ O w wierszu 5, więc możemy zastosować regułę →Elim:

6.	B	→Elim 1, 5

Mamy teraz implikację B → (P ∨ W) w wierszu 2 oraz jej poprzednik B w wierszu 6, więc możemy zastosować regułę →Elim:

7.	P ∨ W	→Elim 2, 6

Przypomnijmy sobie, że chodzi nam o wyprowadzenie zdania P. Zdanie P jest pierwszym członem alternatywy P ∨ W z wiersza 7. Moglibyśmy wyprowadzić P za pomocą reguły MTP, gdybyśmy mieli negację drugiego członu tej alternatywy, czyli swobodnie stojące zdanie ~W. Zdania tego nie mamy, możemy je jednak wyprowadzić z koniunkcji w wierszu 3:

8.	~W	•Elim 3
9.	P	MTP 7, 8

Jako ćwiczenie warto wyrazić kroki, które wykonywaliśmy w tym dowodzie na symbolach, w zdaniach języka naturalnego. Ćwiczenie to powinno pokazać, że właśnie skonstruowany przez nas dowód nie odbiega od naturalnego toku myślenia, choć miejscami wyda się nam zbyt drobiazgowy:

1.	Jeżeli dostanę 17 lub 18 punktów na teście, to otrzymam ocenę bdb.	Zał.
2.	Otrzymam ocenę bardzo dobrą, tylko jeśli albo przyswoję sobie regułę wprowadzania implikacji, albo wkuję wszystkie możliwe dowody na pamięć. *Parafraza:* Jeżeli otrzymałem ocenę bardzo dobrą, to [znaczy, że] albo przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji albo wkułem wszystkie możliwe dowody.	Zał.
3.	Dostałem 18 punktów, a przecież nie wkułem wszystkich możliwych dowodów.	Zał.
4.		•Elim 3
5.		∨Wpr 4
6.		→Elim 1, 5
7.		→Elim 2, 6
8.		•Elim 3
9.	Przyswoiłem sobie regułę wprowadzania implikacji.	MTP 7, 8

Ćwiczenie 11.L „MTP – 2”

W następujących dowodach brakuje dokładnie jednego kroku, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujący krok, uzasadnij go oraz uzasadnij krok ostatni. (*Rozwiązania*, s. 374).

(a)

1.	~D	Zał.
2.	(C ∨ D) ∨ D	Zał.
3.		
4.	C	

(b)

1.	~A • ~B	Zał.
2.	B ∨ D	Zał.
3.		
4.	D	

(c)

1.	~B	Zał.
2.	~B → (A ∨ B)	Zał.
3.		
4.	A	

(d)

1.	(~B ∨ ~A) ≡ ~~A	Zał.
2.	~~A	Zał.
3.		
4.	~B	

Ćwiczenie 11.M „MTP – 3”

W następujących dowodach brakuje dokładnie dwóch kroków, aby dowieść wniosku znajdującego się w ostatnim wierszu. Uzupełnij brakujące kroki, uzasadnij je oraz uzasadnij krok ostatni. (*Rozwiązania*, s. 374).

(a)

1.	~D ≡ (A ∨ D)	Zał.
2.	~D • B	Zał.
3.		
4.		
5.	A	

(b)

1.	[~A → (D ∨ A)] ∨ A	Zał.
2.	~A	Zał.
3.		
4.		
5.	D	

(c)

1.	[(A ∨ B) ∨ C] ∨ C	Zał.
2.	~C • ~B	Zał.
3.		
4.		
5.	A ∨ B	

(d)

1.	B ∨ (A ∨ B)	Zał.
2.	~B	Zał.
3.		
4.		
5.	D ∨ A	

Ćwiczenie 11.N „dowody – 3”

Skonstruuj następujące dowody. (*Rozwiązania*, s. 374).

(a) Dowiedź: B

1.	C	Zał.
2.	~A ≡ (~D ∨ C)	Zał.
3.	(C ∨ D) → (A ∨ B)	Zał.

(b) Dowiedź: ~B

1.	(D ∨ A) ∨ [A ∨ (~B ∨ A)]	Zał.
2.	~A → ~(D ∨ A)	Zał.
3.	~A • C	Zał.

Ćwiczenie 11.O „dowody – 4”

Dokonaj symbolizacji następujących wnioskowań, a następnie dowiedź ich prawidłowości. Zastanów się, czy porządek kroków w dowodzie odpowiada porządkowi rozumowania intuicyjnego. (*Rozwiązania*, s. 375).

(a) Jeżeli Ania zda logikę, to jej chłopak Tomek zaprosi ją albo do greckiej, albo do francuskiej restauracji. Nie zaprosi jej do francuskiej restauracji, jeśli oglądała dużo TV. Ania zda logikę, jeśli będzie dobrze przygotowana, a będzie dobrze przygotowana, jeśli będzie się dużo uczyć. Ania dużo się uczyła, ale też oglądała dużo TV. Zatem Tomek zaprosi Anię do greckiej restauracji.

(b) Tomek nie jest zainteresowany Beatą; Staś natomiast bardzo chciałby się z nią umówić. Beata umówi się ze Stasiem albo wtedy, gdy zostanie przewodniczącym samorządu, albo gdy się okaże, że Robert nie jest nią zainteresowany. Staś zostanie przewodniczącym samorządu, jeśli albo Cecylia nie umówi się z nim, albo Paweł nie zostanie wybrany do samorządu. Cecylia nie umówi się ze Stasiem, chyba że Beata zaprosi ją na imprezę. Jeśli Tomek nie jest zainteresowany Beatą, to Beata nie zaprosi ani jego, ani Cecylii na imprezę. Zatem Beata umówi się ze Stasiem.

(a)

1.
2.
3.
4.

(b)

1.
2.
3.
4.
5.