

9. INNE ZASTOSOWANIA METODY ZERO-JEDYNKOWEJ

W rozdziale tym poznamy kolejne pojęcia logiczne, jak również ich operacjonalizacje za pomocą maczy logicznych. Wskażemy metodę określania, czy wnioskowanie jest prawidłowe, a co się z tym wiąże, zero-jedynkową operacjonalizację pojęcia implikacji logicznej. Poznamy pojęcie zdań wzajemnie niezgodnych, zdań wzajemnie dopełniających się, zdań wzajemnie sprzecznych oraz zdań logicznie niezależnych.

Cele

- Zastosowanie metody zero-jedynkowej do stwierdzania prawidłowości wnioskowania.
- Zastosowanie metody zero-jedynkowej do stwierdzania, czy dany schemat zdaniowy wynika logicznie ze zbioru schematów zdaniowych.
- Zastosowanie metody zero-jedynkowej do stwierdzenia, czy dwa schematy zdaniowe są wzajemnie niezgodne, wzajemnie dopełniające się, wzajemnie sprzeczne czy logicznie niezależne.

9.1. Prawidłowość wnioskowania

Przypomnijcie sobie, co powiedzieliśmy na temat zależności między logiczną prawidłowością wnioskowania a prawdziwością przesłanek i wniosku w rozdziale 1 (§1.3). Powiedzieliśmy wtedy, że jeżeli wnioskowanie jest logicznie prawidłowe, a wszystkie jego przesłanki są prawdziwe, to wniosek musi być prawdziwy, a więc jeżeli przesłanki są prawdziwe, to niemożliwe jest, aby wniosek był fałszywy. Prawidłowość rozumowania dotyczy wyciągania konsekwencji z tego, co nam jest dane, ale to co nam jest dane, może się okazać fałszem. Jednocześnie jednak mimo że związek prawidłowości z prawdą nie jest prosty, to jakiś musi być – takim minimalnym wymogiem jest, aby prawidłowe rozumowanie *zachowywało* prawdę, tj. aby niemożliwe było wyciągnięcie fałszywych wniosków z prawdziwych przesłanek. Jeżeli można wyciągnąć fałszywy wniosek z prawdziwych przesłanek, to dowód na to, że wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe. Zaczniemy właśnie tu, to jest od metody pokazywania, że wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe, znanej też jako metoda kontrprzykładu.

9.1.1. Metoda kontrprzykładu

Załóżmy, że ktoś rozumuje w następujący sposób:

- Jeżeli John F. Kennedy został zamordowany, to nie żyje.
John F. Kennedy nie żyje.
- (1) _____
Zatem John F. Kennedy został zamordowany.

Pomyśl przez chwilę, czy wnioskowanie to jest logicznie prawidłowe, czy nie. (Oczywiście, zarówno przesłanki, jak i wniosek są w tym wypadku prawdziwe, ale pytanie dotyczy tego, czy wniosek wynika logicznie z przesłanek).

W tym wypadku odpowiedź jest negatywna: wniosek nie wynika z przesłanek. Aby to wykazać, moglibyśmy argumentować w ten sposób:

Oczywiście jest prawdą, że Kennedy został zamordowany, ale to, że został zamordowany, nie wynika z tego, że nie żyje. Wszakże pewni ludzie nie żyją, mimo że nie zostali zamordowani. Nie możemy wnioskować o tym, jak zmarli, na podstawie faktu, że zmarli.

Aby argumentację tę wzmocnić (a z logicznego punktu widzenia: aby udowodnić, że wnioskowanie (1) jest logicznie nieprawidłowe), wystarczy podać przykład wnioskowania o tej samej strukturze logicznej, gdzie przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy. Nietrudno o taki przykład:

	Jeżeli Ronald Reagan został zamordowany, to nie żyje.	1
(2)	Ronald Reagan nie żyje.	1
	Zatem Ronald Reagan został zamordowany.	0

W ten sposób dowodzimy, że wnioskowanie (1) jest logicznie nieprawidłowe – wskazaliśmy bowiem kontrprzykład, tj. przykład wnioskowania o tej samej formie logicznej, co wnioskowanie (1), w którym przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy.

Ogólnie: aby wykazać, że wnioskowanie W jest logicznie nieprawidłowe, trzeba wskazać na wnioskowanie W' spełniające następujące warunki:

- (a) wnioskowanie W' musi mieć tę samą strukturę logiczną, co wnioskowanie W ,
- (b) przesłanki wnioskowania W' muszą być prawdziwe, a jego wniosek fałszywy.

Wnioskowanie spełniające warunki (a)-(b) jest zwane kontrprzykładem dla logicznej prawidłowości wnioskowania W , bądź krótko: kontrprzykładem.

Zwróćcie uwagę, że wnioskowanie (2) ma nie tylko tę samą strukturę logiczną, ale jest też pokrewne tematycznie. Pokrewność tematyczna nie jest jednak wymogiem ścisłym – aby wykazać, że dane wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe, wystarczy pokazać dowolny kontrprzykład nawet niezwiązany tematycznie z danym. Innym kontrprzykładem dla tego wnioskowania byłby np.:

	Jeżeli Katarzyna Paprzycka jest małpą, to nie jest gadem.	1
(3)	Katarzyna Paprzycka nie jest gadem.	1
	Zatem Katarzyna Paprzycka jest małpą.	0

Jest to bowiem wnioskowanie o tym samym schemacie logicznym, co wnioskowanie (1), a mianowicie:

	$p \rightarrow \sim q$	
(i)	$\sim q$	
	p	

Aczkolwiek, jeżeli uda się odnaleźć wnioskowanie tematycznie bliższe danemu, to tym bardziej przekonujący będzie kontrprzykład. Należy też zwrócić uwagę, że w praktyce oczywiście często toczy my spory co do prawdziwości czy fałszywości zdań. Kontrprzykłady będą skuteczne, o ile znajdziemy przesłanki i wniosek, które nie są kontrowersyjne.

Umiejętności stosowania metody kontrprzykładu trzeba się nauczyć, a jest ona bardzo pomocna w toczeniu rozmaitych dyskusji. Opanowanie technik logicznych może w tej umiejętności dopomóc.

Ćwiczenie 9.B „kontrprzykłady – 1”

Wykaż, że wnioskowania poniższe są logicznie nieprawidłowe, wskazując odpowiedni kontrprzykład. (Ćwiczenie to może być trudne na tym etapie. Jeżeli tak jest, to spróbuj do niego wrócić po zapoznaniu się z całym rozdziałem). (Rozwiązania, s. 353).

	Jeżeli Asia dostanie 92 punkty z testu, to dostanie ocenę bdb.	
(a)	Asia dostała ocenę bdb.	
	Zatem Asia dostała 92 punkty z testu.	

	Jeżeli Asia dostanie 92 punkty z testu, to dostanie ocenę bdb.	
(b)	Asia nie dostała 92 punktów na teście.	
	Zatem Asia nie dostała oceny bdb.	

- Jeżeli wydatki rządowe wzrosną, to gospodarka się załamie.
 Jeżeli bezrobocie wzrośnie, to gospodarka się załamie.
- (c) _____
 Zatem jeżeli wydatki rządowe wzrosną, to wzrośnie bezrobocie.

Ćwiczenie 9.A „kontrprzykłady – 2”

Ustal, przy których podstawieniach (podanych w tabeli A) otrzymane wnioskowanie (podane w tabeli B) jest kontrprzykładem dla wnioskowania (1). Podaj jeszcze dwa podstawienia tego schematu wnioskowania, z których przynajmniej jedno byłoby kontrprzykładem. (*Rozwiązania*, s. 352).

Tabela A. Podstawienia zmiennych p i q dla przykładów (a)-(f) w Tabeli B.

(a)	p : John Lennon został zabity. q : John Lennon żyje.	(b)	p : Brad Pitt został zabity. q : Brad Pitt żyje.	(c)	p : Marilyn Monroe była blondynką. q : Marilyn Monroe była łysa.
(d)	p : John Travolta jest blondynem. q : John Travolta jest łysy.	(e)	p : Lassie jest psem. q : Lassie jest owadem.	(f)	p : Lassie jest psem. q : Lassie jest ssakiem.

Tabela B

	Przesłanka: $p \rightarrow \sim q$	Przesłanka: $\sim q$	Wniosek: p	Czy jest to kontrprzykład?
(a)	Jeżeli John Lennon został zabity, to nie żyje. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	John Lennon nie żyje. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	John Lennon został zabity. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(b)	Jeżeli Brad Pitt został zabity, to nie żyje. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Brad Pitt nie żyje. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Brad Pitt został zabity. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(c)	Jeżeli Marilyn Monroe była blondynką, to nie była łysa. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Marilyn Monroe nie była łysa. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Marilyn Monroe była blondynką. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(d)	Jeżeli John Travolta jest blondynem, to nie jest łysy. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	John Travolta nie jest łysy. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	John Travolta jest blondynem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(e)	Jeżeli Lassie jest psem, to nie jest owadem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Lassie nie jest owadem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Lassie jest psem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(f)	Jeżeli Lassie jest psem, to nie jest ssakiem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Lassie nie jest ssakiem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	Lassie jest psem. <input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(g)	<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input checked="" type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
(h)	<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe	<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie

9.1.2. Logiczna nieprawidłowość wnioskowań

Pojęcie logicznej prawidłowości wnioskowań jest dopełnieniem pojęcia logicznej nieprawidłowości wnioskowań. Zacznijmy więc od pojęcia logicznej nieprawidłowości, które jest bezpośrednio oparte na metodzie kontrprzykładów:

Definicja wnioskowania logicznie nieprawidłowego

Wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy właściwy schemat logiczny tego wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy.

Schemat logiczny wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w schemacie tego wnioskowania dadzą prawdziwe instancje schematów wszystkich przesłanek oraz fałszywą instancję schematu wniosku.

Zastosowanie metody zero-jedynkowej

Pojęcie logicznej nieprawidłowości wnioskowań możemy zoperacjonalizować za pomocą matryc logicznych:

Operacjonalizacja definicji wnioskowania logicznie nieprawidłowego

Schemat wnioskowania jest logicznie nieprawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje rząd kontrprzykładów w matrycy logicznej dla tego schematu, tj. taki rząd, w którym instancje wszystkich przesłanek są prawdziwe, a instancje wniosku fałszywe.

Przykład 1

Wykaż, że schemat wnioskowania

$$\frac{p \rightarrow \sim q}{\sim q} \\ p$$

jest logicznie nieprawidłowy, wskazując rząd matrycy logicznej zawierający kontrprzykłady (sprawdź odpowiedź z *Rozwiązaniami*, s. 352).

p	q	$p \rightarrow \sim q$	$\sim q$	p	Czy jest to kontrprzykład?
1	1				<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
1	0				<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
0	1				<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie
0	0				<input type="radio"/> tak <input type="radio"/> nie



Porada babuni

Zapisywanie matryc dla wielu schematów bywa mylące. Warto wprowadzić pewne konwencje oddzielania tych matryc. Matryce logiczne dla przesłanek oddzielać będziemy podwójną linią, a matrycę dla wniosku linią pogrubioną.

Ćwiczenie 9.C „logiczna nieprawidłowość”

Wykaż, że następujące schematy wnioskowań są logicznie nieprawidłowe. Skorzystaj z poniższych matryc. (Rozwiązania, s. 353-354).

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \vee q \\ \hline p \bullet q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \equiv \sim q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \sim r \\ \hline \sim p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline q \bullet r \end{array}$$

(a)

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$p \bullet q$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Czy jest to kontrprzykład?

- tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie

(b)

p	q	$p \equiv \sim q$	q	p
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Czy jest to kontrprzykład?

- tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie

(c)

p	q	r	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\sim r$	$\sim p$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Czy jest to kontrprzykład?

- tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie

(d)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$q \bullet r$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Czy jest to kontrprzykład?

- tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie
 tak nie

9.1.3. Logiczna prawidłowość wnioskowań

Pojęcie logicznej prawidłowości wnioskowań jest dopełnieniem pojęcia logicznej nieprawidłowości wnioskowań:

Wnioskowanie jest logicznie prawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy nie jest logicznie nieprawidłowe.

Opierając się na tej myśli, możemy podać stosowne definicje i operacjonalizację:

Definicja wnioskowania logicznie prawidłowego

Wnioskowanie jest logicznie prawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy właściwy schemat logiczny tego wnioskowania jest logicznie prawidłowy.

Schemat logiczny wnioskowania jest logicznie prawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w schemacie tego wnioskowania dadzą prawdziwe instancje schematów wszystkich przesłanek oraz fałszywą instancję schematu wniosku.

Operacjonalizacja definicji wnioskowania logicznie prawidłowego

Schemat wnioskowania jest logicznie prawidłowy zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje rząd kontrprzykładów w matrycy logicznej dla tego schematu, tj. taki rząd, w którym instancje wszystkich przesłanek są prawdziwe, a instancje wniosku fałszywe.

Aby wykazać, że *nie istnieje* rząd kontrprzykładów, trzeba zbadać *wszystkie* rzędy matrycy logicznej. Dopiero gdy zbadamy każdy rząd matrycy logicznej i stwierdzimy, że nie jest on rzędem kontrprzykładów, możemy stwierdzić, że dany schemat jest schematem wnioskowań prawidłowych. Prześledźmy to na przykładzie. Wykażemy, że logicznie prawidłowe jest następujące wnioskowanie:

Jeżeli LPR stworzy z Samoobroną nową partię, to nie będzie wczesnych wyborów. Wczesne wybory się odbyły.	$p \rightarrow \sim q$ q
Zatem, LPR nie stworzył z Samoobroną nowej partii.	$\sim p$

p	q	$p \rightarrow \sim q$		q	$\sim p$	Czy jest to kontrprzykład?		
1	1	$1 \rightarrow \sim 1$	$1 \rightarrow 0$	0	1	1	0	○ tak ○ nie
1	0	$1 \rightarrow \sim 0$	$1 \rightarrow 1$	1	0	1	0	○ tak ○ nie
0	1	$0 \rightarrow \sim 1$		1	1	0	1	○ tak ○ nie
0	0	$0 \rightarrow \sim 0$		1	0	0	1	○ tak ○ nie

Aby wykazać, że jest to schemat wnioskowań logicznie prawidłowych, musimy pokazać, że żaden z rzędów matrycy nie jest kontrprzykładem.

- Czy rząd 1 jest kontrprzykładem? Nie, co prawda wniosek jest fałszywy, ale nie wszystkie przesłanki są prawdziwe (instancje pierwszej przesłanki $p \rightarrow \sim q$ są fałszywe).
- Czy rząd 2 jest kontrprzykładem? Nie, z identycznego powodu (tym razem instancje drugiej przesłanki q są fałszywe).
- Czy rząd 3 jest kontrprzykładem? Nie, tym razem co prawda obie przesłanki są prawdziwe, ale wniosek nie jest fałszywy.
- Czy rząd 4 jest kontrprzykładem? Nie, ani wniosek nie jest fałszywy, ani nie wszystkie przesłanki są prawdziwe.

Ponieważ żaden rząd matrycy logicznej nie jest rzędem kontrprzykładów, tj. nie zawiera prawdziwych przesłanek i fałszywego wniosku, zatem badany schemat jest logicznie prawidłowy.

Porada babuni



Najczęstszym błędem przy badaniu logicznej prawidłowości jest szukanie rzędu, w którym wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek też prawdziwy. Otóż znalezienie takiego rzędu nie jest ani warunkiem wystarczającym, ani warunkiem koniecznym dla logicznej prawidłowości wnioskowania.

Ćwiczenie 9.D „logiczna prawidłowość «na sucho»”

Dane są niżej matryce logiczne pewnych schematów wnioskowań. Stwierdź, które z reprezentowanych przez te matryce schematów są logicznie prawidłowe, a które logicznie nieprawidłowe. (*Rozwiązania*, s. 354).

(a)

	Przesłanka 1	Przesłanka 2	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	1	1	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
2	0	0	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
3	1	1	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
4	1	0	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:

- logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów;
 logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, *viz.* rząd: .

(b)

	Przesłanka 1	Przesłanka 2	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	0	1	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
2	1	0	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
3	1	0	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
4	0	1	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:

- logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów;
 logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, *viz.* rząd: .

(c)

	Przesłanka 1	Przesłanka 2	Przesłanka 3	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	0	0	0	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
2	1	0	0	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
3	0	1	1	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
4	1	0	0	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:

- logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów;
 logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, *viz.* rząd: .

(d)

	Przesłanka	Wniosek	Czy jest to kontrprzykład?	
1	0	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
2	0	1	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
3	1	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie
4	1	0	<input type="radio"/> tak	<input type="radio"/> nie

Schemat reprezentowany przez tę matrycę logiczną jest:

- logicznie prawidłowy, ponieważ nie istnieje rząd kontrprzykładów;
 logicznie nieprawidłowy, ponieważ istnieje przynajmniej jeden rząd kontrprzykładów, *viz.* rząd: .

Ćwiczenie 9.E „logiczna prawidłowość – 1”

Zdecyduj, czy podane schematy wnioskowań są logicznie prawidłowe, czy nie. (Rozwiązania, s. 355).

$$(a) \frac{p \rightarrow q}{\sim p \rightarrow \sim q}$$

$$(b) \frac{p \rightarrow q}{\sim q \rightarrow \sim p}$$

$$(c) \frac{p}{p \bullet q}$$

$$(d) \frac{p}{p \vee q}$$

$$(e) \frac{p}{p \rightarrow q}$$

$$(f) \frac{p}{q \rightarrow p}$$

9.1.4. Skrócona metoda zero-jedynkowa w badaniu logicznej prawidłowości i nieprawidłowości wnioskowań

Logiczną prawidłowość i nieprawidłowość wnioskowań można też badać metodą skróconą.

	Definicja	Operacjonalizacja	Skrócona metoda	
Logiczna prawidłowość	Niemożliwe są fałszywe instancje wniosku, przy prawdziwych instancjach przesłanek tego schematu.	Nie istnieje rząd kontrprzykładów.	Spróbuj znaleźć rząd kontrprzykładów.	Jeżeli próba jest nieudana *, to wnioskowanie <i>jest</i> logicznie prawidłowe.
				Jeżeli próba jest udana , to wnioskowanie <i>jest</i> logicznie nieprawidłowe.

*Próba znalezienia rzędu jest nieudana, gdy prowadzi do sprzeczności.

Musimy spróbować znaleźć rząd, będący kontrprzykładem dla logicznej prawidłowości wnioskowania, czyli taki rząd matrycy logicznej, w którym instancje schematów wszystkich przesłanek są prawdziwe, a instancje schematu wniosku są fałszywe. Jeżeli nasza próba uwieczniona będzie powodzeniem, to wykażemy tym samym, że wnioskowanie jest logicznie nieprawidłowe (bo istnieje kontrprzykład). Jeżeli nasza próba uwieczniona będzie niepowodzeniem – tj. jeżeli założenie, że istnieje kontrprzykład doprowadzi do sprzeczności – wówczas wykażemy tym samym, że wnioskowanie jest logicznie prawidłowe.

Prześledźmy to na paru przykładach.

Przykład 2

Dany jest następujący schemat wnioskowań.

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow \sim q \\ \sim q \end{array}}{p}$$

Aby stwierdzić, czy jest to schemat logicznie prawidłowy czy nie, musimy spróbować poszukać kontrprzykładu, tj. takiej instancji wnioskowania, której przesłanki będą prawdziwe, a wniosek fałszywy:

$$\begin{array}{ccc} \blacksquare & 1 & \blacksquare \quad \blacksquare \\ p & \rightarrow & \sim \quad q \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & \blacksquare \\ \sim & q \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ p \end{array}$$

Po obliczeniu okaże się, że kontrprzykład można znaleźć, gdy zarówno pod p , jak i pod q , podstawimy wartość 0. Schemat ten jest zatem logicznie nieprawidłowy.

Przykład 3

Rozważmy teraz drugi rozważany wyżej schemat wnioskowań:

$$\frac{p \rightarrow \sim q}{q} \quad \sim p$$

1	→	1	~	1	q	q	~	0	p
p									

Próba znalezienia kontrprzykładu kończy się niepowodzeniem. Pod q podstawić musimy 1. O wartości podstawianej pod zmienną p najłatwiej się przekonać z wniosku $\sim p$, który ma być fałszywy, a zatem pod p podstawić musimy wartość 1. Przy takim podstawieniu jednak okazuje się, że przesłanka pierwsza będzie fałszywa ($1 \rightarrow \sim 1$, czyli $1 \rightarrow 0$, czyli 0), a nie prawdziwa, jak zakładaliśmy. Innymi słowy, nasza próba znalezienia kontrprzykładu doprowadziła do sprzeczności – wnioskujemy zatem, że nie ma kontrprzykładu dla tego schematu wnioskowań. Schemat ten jest zatem logicznie prawidłowy.

Ćwiczenie 9.F „logiczna prawidłowość – 2”

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową, zbadaj, czy podane schematy wnioskowań są logicznie prawidłowe, czy nie. Aby zadanie ułatwić, przesłanki i wnioski zostały oddzielone poziomą kreską. (*Rozwiązania*, s. 355).

- | | | | | | | | |
|-----|-----------------------------------|--|-----------------------------------|--|-----------------------------------|--|-------------------|
| (a) | $p \equiv p$ | | p | | | | |
| (b) | $p \rightarrow q$ | | $\sim p$ | | $\sim q$ | | |
| (c) | $p \vee q$ | | $\sim q$ | | p | | |
| (d) | $p \rightarrow q$ | | $\sim q$ | | $\sim p$ | | |
| (e) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | | $p \rightarrow \sim q$ | | $\sim r$ | | |
| (f) | $p \rightarrow q$ | | $q \rightarrow r$ | | $p \rightarrow r$ | | |
| (g) | $p \rightarrow q$ | | $p \rightarrow r$ | | $q \rightarrow r$ | | |
| (h) | $p \rightarrow r$ | | $q \rightarrow r$ | | $(p \vee q) \rightarrow r$ | | |
| (i) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | | $q \rightarrow (p \rightarrow s)$ | | $p \rightarrow s$ | | |
| (j) | $p \rightarrow q$ | | $(p \bullet q) \rightarrow r$ | | $p \rightarrow (r \rightarrow s)$ | | $p \rightarrow s$ |
| (k) | $p \rightarrow q$ | | $r \rightarrow s$ | | $p \vee r$ | | $q \vee s$ |
| (l) | $p \equiv p$ | | $p \rightarrow p$ | | | | |

Ćwiczenie 9.G „logiczna prawidłowość – 3”

Zbadajcie, które z następujących wnioskowań są logicznie prawidłowe. Powinniście (i) dokonać symbolizacji podanego wnioskowania, (ii) podać właściwy schemat wnioskowania, (iii) skonstruować macierz logiczną dla tego schematu, (iv) zdecydować, czy schemat jest logicznie prawidłowy, czy nie, stosownie decyzyjnie uzasadniając. (*Rozwiązania*, s. 355).

(a) Jeżeli Monika Olejnik ma dobre źródła, to Andrzej Lepper albo zostanie zdymisjonowany, albo wyjdzie z koalicji. Andrzej Lepper nie wyjdzie z koalicji. Zatem Monika Olejnik nie ma dobrych źródeł.

(b) Jeżeli Rosja wejdzie do Unii Europejskiej, to jeśli Rumunia wejdzie do Unii, to i Turcja wejdzie do Unii. Rumunia wejdzie do Unii. Zatem jeżeli Turcja nie wejdzie do Unii, to Rosja też nie wejdzie do Unii.

(c) Jeżeli Rosja nie wejdzie do Unii Europejskiej, to jeśli Rumunia wejdzie do Unii, to Turcja nie wejdzie do Unii. Rumunia wejdzie do Unii. Zatem jeżeli Turcja wejdzie do Unii, to Rosja też wejdzie do Unii.

(d) Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi. Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu. Zatem stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu, jeśli USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi.

(e) Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi, chyba że „oś państw zła” się poszerzy. Jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu. Zatem jeżeli Polska wybuduje tarczę antyrakietową na swoim terenie, to USA będzie lepiej chronione przed atakami rakietowymi, ale stosunki dyplomatyczne między Polską a Rosją ulegną dalszemu pogorszeniu.

(f) Jeżeli ludzie są całkowicie racjonalni, to albo wszystkie ludzkie działania można z góry przewidzieć, albo świat jest całkowicie deterministyczny. Nie wszystkie ludzkie działania można z góry przewidzieć. Zatem jeżeli świat jest całkowicie deterministyczny, to ludzie nie są całkowicie racjonalni.

(g) Kowalski powinien złożyć formularz podatkowy 12A lub 12C, tylko jeżeli w zeszłym roku złożył formularz 40B. Kowalski powinien złożyć formularz podatkowy 12A, tylko jeżeli jego całkowite przychody wynosiły ponad 80 000,00 zł, a formularz podatkowy 12C tylko jeżeli jego całkowite przychody nie wynosiły więcej niż 80 000,00 zł. Zatem jeżeli przychody Kowalskiego wynosiły więcej niż 80 000,00zł, to powinien złożyć formularz 12A.

9.2. Wynikanie logiczne

Pojęcie wynika logicznego nie powinno stanowić niespodzianki, jeżeli opanowaliście pojęcie logicznej prawidłowości wnioskowań. Jest bowiem tak, że wnioskowanie jest logicznie prawidłowe zawsze i tylko wtedy, gdy wniosek wynika logicznie z przesłanek.

Definicja wynikania logicznego

Schemat zdaniowy γ wynika logicznie ze zbioru schematów zdaniowych $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w schematach $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma$ dałyby prawdziwe instancje schematów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, a fałszywą instancję schematu γ .

Operacjonalizacja definicji wnioskowania logicznie prawidłowego

Schemat zdaniowy γ wynika logicznie ze zbioru schematów zdaniowych $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki rząd w łącznej macierzy logicznej dla tych schematów, w którym instancje $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ byłyby prawdziwe, a instancje γ – fałszywe.

Zatem aby wykazać, że pewien schemat zdaniowy γ wynika logicznie ze zbioru schematów $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, trzeba wykazać, że wnioskowanie:

$$\frac{\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{array}}{\gamma}$$

jest logicznie prawidłowe.

9.3. Wzajemna niezgodność, wzajemne dopełnianie, wzajemna sprzeczność i logiczna niezależność

9.3.1. Zdania wzajemnie niezgodne (wykluczające się)

Intuicyjnie można powiedzieć, że zdania wzajemnie niezgodne (wykluczające się) to zdania, które nie mogą być współprawdziwe. Ponownie: zdania są wzajemnie niezgodne zawsze i tylko wtedy, gdy wzajemnie niezgodne są właściwe schematy logiczne tych zdań.

Definicja schematów wzajemnie niezgodnych

Schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie niezgodnych zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w tych schematach dałyby instancje prawdziwe wszystkich tych schematów.

Operacjonalizacja definicji schematów wzajemnie niezgodnych

Schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie niezgodnych zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki rząd w łącznej macierzy logicznej dla tych schematów, w którym instancje $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ byłyby wszystkie prawdziwe.

Przykład 4

Rozważmy następujący przykład:

- (1) Aldona nie zda logiki.
- (2) Aldona zda logikę, choć nie zda psychologii.

Otóż o tym, że są to w istocie zdania wzajemnie się wykluczające, przekonujemy się, konstruując macierz logiczną dla ich właściwych schematów logicznych:

p	q	$\sim p$		$p \bullet \sim q$		
1	1		0	$1 \bullet \sim 1$	$1 \bullet 0$	0
1	0		0	$1 \bullet \sim 0$	$1 \bullet 1$	1
0	1		1	$0 \bullet \sim 1$		0
0	0		1	$0 \bullet \sim 0$		0

Okazuje się, że nie ma rzędu w ich łącznej macierzy logicznej, w którym instancje tych schematów byłyby jednocześnie prawdziwe. Zdania (1) i (2) są zatem zdaniami wzajemnie niezgodnymi.

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej

Aby zbadać, czy schematy są wzajemnie niezgodne, możemy też użyć skróconej metody zero-jedynkowej. Musimy próbować szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 1. Jeżeli nie można takich wartości znaleźć, badane schematy są wzajemnie niezgodne, a jeżeli takie wartości można znaleźć, to schematy nie są wzajemnie niezgodne.

9.3.2. Zdania wzajemnie dopełniające się

Zdania wzajemnie dopełniające się, to zdania, które nie mogą być współfałszywe. Ponownie: zdania wzajemnie się dopełniają zawsze i tylko wtedy, gdy wzajemnie dopełniają się właściwe schematy logiczne tych zdań.

Definicja schematów wzajemnie dopełniających się

Schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie dopełniających się zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieją takie zdania, które podstawione pod zmienne w tych schematach dałyby instancje fałszywe wszystkich tych schematów.

Operacjonalizacja definicji schematów wzajemnie dopełniających się

Schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie dopełniających się zawsze i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki rząd w łącznej macierzy logicznej dla tych schematów, w którym instancje $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ byłyby wszystkie fałszywe.

Przykład 5

Rozważmy następujący przykład:

- (3) Aldona zda logikę.
- (4) Jeżeli Aldona zda logikę, to zda psychologię.

Otóż para zdań (3)-(4) ma tę ciekawą cechę, że nie mogą one być współfałszywe – nie ma rzędu w ich łącznej macierzy logicznej, w którym instancje tych schematów byłyby jednocześnie fałszywe.

p	q	p	$p \rightarrow q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Zdania (3) i (4) są zatem zdaniem wzajemnie dopełniającymi się.

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej

Aby zbadać, czy schematy są wzajemnie dopełniające się, musimy próbować szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 0. Jeżeli nie można takich wartości znaleźć, badane schematy są wzajemnie dopełniające się, a jeżeli takie wartości można znaleźć, to schematy nie są wzajemnie dopełniające się.

9.3.3. Zdania wzajemnie sprzeczne

Zdania wzajemnie sprzeczne to zdania, które są zarówno wzajemnie wykluczające się, jak i wzajemnie dopełniające się.

Definicja schematów wzajemnie sprzecznych

Schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są schematami zdań wzajemnie sprzecznych zawsze i tylko wtedy, gdy schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są zarazem wzajemnie dopełniające się, jak i wzajemnie niezgodne.

Przykład 6

Rozważmy następujący przykład:

- (5) Jeżeli Aldona zda logikę, to zda też psychologię.
- (6) Aldona zda logikę, ale nie zda psychologii.

Otóż w macierzy logicznej dla pary zdań (5)-(6) zarówno nie ma rzędu, w którym instancje tych schematów byłyby oba prawdziwe, jak i nie ma rzędu, w których instancje tych schematów byłyby obie fałszywe:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \bullet \sim q$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

Zdania (5) i (6) są zatem zdaniami wzajemnie sprzecznymi.

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej

Aby zbadać, czy schematy są wzajemnie sprzeczne, musimy (a) próbować szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 0, oraz (b) szukać takich wartości zmiennych, przy których we wszystkich badanych schematach otrzymalibyśmy wartość 1. Jeżeli nie można znaleźć ani wartości wspomnianych w (a), ani wartości wspomnianych w (b), to badane schematy są wzajemnie sprzeczne. Jeżeli można znaleźć albo wartości wspomniane w (a), albo wartości wspomniane w (b), wówczas schematy nie są wzajemnie sprzeczne.

9.3.4. Zdania logicznie niezależne

Zdania logicznie niezależne to zdania, które nie są ani wzajemnie wykluczające się, ani wzajemnie dopełniające się, a przy tym żadne z tych zdań nie wynika logicznie z pozostałych.

Definicja schematów logicznie niezależnych

Schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są schematami zdań logicznie niezależnych zawsze i tylko wtedy, gdy schematy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (a) nie są wzajemnie wykluczające się, (b) nie są wzajemnie dopełniające się, (c) żaden ze schematów nie wynika logicznie z pozostałych.

Przykład 7

Najprostszym przykładem zdań logicznie niezależnych są zdania proste. Rozważmy jednak następujący przykład:

- (7) Aldona nie zda logiki.
- (8) Aldona zda logikę dokładnie wtedy, gdy Bogdan nie zda psychologii.

p	q	$\sim p$	$p \equiv \sim q$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

Otóż w macierzy logicznej dla schematów właściwych pary zdań (7)-(8) jest zarówno rząd, w którym instancje tych schematów są prawdziwe (rzęd 3), jak i rząd, w którym instancje tych schematów są fałszywe (rzęd 1). Nie są to więc ani zdania wzajemnie dopełniające się, ani zdania wykluczające się. Aby się przekonać, że są to istotnie zdania logicznie niezależne, musimy też zbadać, czy $\sim p$ wynika logicznie z $p \equiv \sim q$ oraz czy $p \equiv \sim q$ wynika logicznie z $\sim p$.

Przypomnijmy sobie, że schemat α wynika logicznie ze schematu β wówczas, gdy nie ma rzędu w ich łącznej macierzy logicznej, w którym β miałoby prawdziwe instancje, a α fałszywe instancje. Musimy zatem zapytać, czy istnieje rząd, w którym $\sim p$ ma prawdziwe instancje, a $p \equiv \sim q$ fałszywe instancje? Odpowiedź jest pozytywna: rząd 4 spełnia ten warunek, co wystarczy, by orzec, że $p \equiv \sim q$ nie wynika logicznie z $\sim p$. Zapytajmy zatem, czy istnieje rząd, w którym $p \equiv \sim q$ ma prawdziwe

instancje, a $\sim p$ fałszywe? Odpowiedź jest pozytywna: rząd 2 spełnia ten warunek, co wystarcza, by orzec, że $\sim p$ nie wynika logicznie z $p \equiv \sim q$.

Zdania (7) i (8) są zatem zdaniami logicznie niezależnymi.

Ćwiczenie 9.H „wzajemne wykluczanie/dopełnianie/sprzeczność/niezależność”

Stwierdź, które z par zdań są wzajemnie niezgodne, które wzajemnie dopełniające się, które wzajemnie sprzeczne. Sprawdź też, czy ze zdania (1) wynika logicznie zdanie (2) oraz czy ze zdania (2) wynika logicznie zdanie (1). Stwierdź, czy zdania te są logicznie niezależne. (*Rozwiązania*, s. 356-358).

- (a) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Ani LPR, ani Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.
- (b) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Nie jest prawdą, że zarówno LPR, jak i Samoobrona wyjdą z koalicji.
- (c) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to LPR z koalicji nie wyjdzie.
- (d) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli LPR nie wyjdzie z koalicji, to Samoobrona wyjdzie z koalicji.
- (e) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) LPR nie wyjdzie z koalicji, tylko jeśli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.
- (f) (1) LPR wyjdzie z koalicji.
(2) LPR nie wyjdzie z koalicji, jeśli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.
- (g) (1) LPR lub Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) LPR i Samoobrona wyjdą z koalicji.
- (h) (1) Albo LPR, albo Samoobrona wyjdzie z koalicji, ale nie jest prawdą, że z koalicji wyjdą obie partie.
(2) LPR i Samoobrona wyjdą z koalicji.
- (i) (1) LPR lub Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to Samoobrona wyjdzie z koalicji.
- (j) (1) LPR i Samoobrona wyjdą z koalicji.
(2) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.
- (k) (1) LPR lub Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) LPR nie wyjdzie z koalicji, jeśli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.
- (l) (1) Samoobrona wyjdzie z koalicji, a jeżeli Samoobrona nie wyjdzie z koalicji, to LPR też nie wyjdzie z koalicji.
(2) LPR wyjdzie z koalicji, i jeżeli Samoobrona wyjdzie z koalicji, to LPR też wyjdzie z koalicji.
- (m) (1) Jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, to albo Samoobrona też wyjdzie z koalicji, albo będą wczesne wybory.
(2) LPR wyjdzie z koalicji, ale ani Samoobrona nie wyjdzie z koalicji, ani nie będzie wczesnych wyborów.
- (n) (1) Jeżeli albo LPR nie wyjdzie z koalicji albo Samoobrona nie wyjdzie z koalicji, to nie będzie wczesnych wyborów.
(2) Nie jest prawdą ani to, że wczesne wybory odbędą się, tylko jeżeli LPR wyjdzie z koalicji, ani to, że wczesne wybory odbędą się tylko jeżeli Samoobrona wyjdzie z koalicji.
- (o) (1) LPR nie wyjdzie z koalicji, a wczesne wybory odbędą się, tylko jeżeli Samoobrona wyjdzie z koalicji.
(2) Wczesne wybory odbędą się, jeżeli LPR nie wyjdzie z koalicji; jednakże albo LPR wyjdzie z koalicji albo Samoobrona nie wyjdzie z koalicji.
- (p) (1) Jeżeli nie będzie wczesnych wyborów, to LPR wyjdzie z koalicji.
(2) Jeżeli nie będzie wczesnych wyborów, to Samoobrona wyjdzie z koalicji.