8. SKRÓCONA METODA ZERO-JEDYNKOWA

W rozdziale tym poznamy skróconą metodę zero-jedynkową. Zakłada ona umiejętność określania wartości logicznych «wstecz», a pozwoli nam dość sprawnie dowieść, że (a) pewien schemat jest tautologiczny, bądź że tautologiczny nie jest; (b) pewien schemat jest kontrtautologiczny, bądź że kontrtautologiczny nie jest; (c) pewien schemat jest logicznie niezdeterminowany; (d) dwa schematy są logicznie równoważne, bądź że nie są logicznie równoważne. W rozdziale 9 zastosujemy tę metodę do określania dalszych relacji między schematami zdaniowymi.

Cele

- Umiejętność określania wartości logicznych «wstecz», tj. określania wartości zdań składowych na podstawie danej wartości logicznej zdania złożonego.
- Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej w określaniu tautologiczności schematu zdaniowego.
- Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej w określaniu kontrtautologiczności schematu zdaniowego.
- Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej w określaniu logicznego niezdeterminowania schematu zdaniowego.
- Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej w określaniu logicznej równoważności dwóch schematów zdaniowych.

8.1. Szukanie wartości logicznych «wstecz»

Aby móc stosować skróconą metodę zero-jedynkową, konieczne jest opanowanie umiejętności znajdowania wartości logicznych zdań składowych na podstawie danej wartości logicznej zdania złożonego. Umiejętność tę określimy mianem „szukania wartości logicznych wstecz”, gdyż proces określania wartości logicznych przebiegać będzie odwrotnie niż do tej pory.

Opanowanie tej umiejętności zakłada bezbłędne opanowanie podstawowych matryc logicznych. Wypełnij je teraz dla przypomnienia.

p	$\sim p$
1	
0	

p	q	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \equiv q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

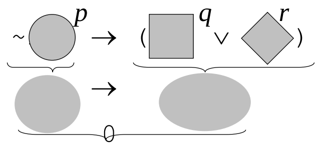
Należy od razu też zwrócić uwagę na to, że nie zawsze będzie można jednoznacznie określić wartość logiczną zdań składowych na podstawie wartości logicznej zdań złożonych. Jeżeli wiemy, np. że alternatywa dwóch zdań jest fałszywa, to wiemy również, że oba człony alternatywy muszą być fałszywe (tylko bowiem w wypadku, gdy oba człony alternatywy są fałszywe, fałszywa jest alternatywa). Jeżeli wiemy natomiast, że pewna równoważność jest fałszywa, to nie jesteśmy w stanie jednoznacznie określić, jaka jest wartość logiczna członów równoważności. W takim wypadku będziemy musieli rozstrzygać w indywidualnych przykładach, czy może dane będą nam dodatkowe informacje, czy będziemy musieli po prostu rozważać więcej możliwości niż jedną. Rozpoczniemy jednak od przykładów najprostszych.

8.1.1. Prostsze przykłady

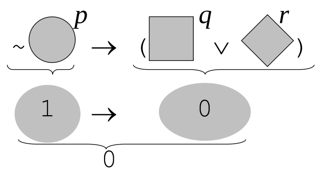
Przykład 1

Przy jakich wartościach zmiennych *p, q* i *r* podstawionych w schemacie ~*p* → (*q* ∨ *r*) otrzymamy fałsz?

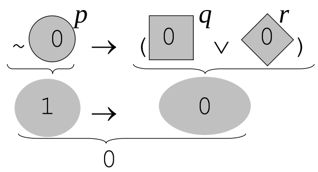
Zadanie to wymaga od nas myślenia «wstecz», opierając się na wiedzy o matrycach logicznych. Jednym z kłopotów w nauczeniu się umiejętności dociekania wartości logicznych wstecz jest kwestia zapisu. Zanim przejdziemy do konwencjonalnego zapisu, rozpoczniemy od zapisu najprostszego z użyciem znanych już z rozdziału 4 ramek. Nasze zadanie możemy przedstawić w następujący sposób:



Dana jest nam wartość implikacji – implikacja jest fałszywa. Wiemy, że implikacja jest fałszywa w dokładnie jednym wypadku, mianowicie gdy poprzednik implikacji jest prawdziwy, a jej następnik fałszywy. Możemy zatem uczynić pierwszy krok w rozumowaniu wstecz:



Wiemy teraz, że pewna negacja (~*p*) będąca poprzednikiem implikacji jest prawdziwa oraz że pewna alternatywa (*q* ∨ *r*) będąca następnikiem implikacji jest fałszywa. Negacja będzie prawdziwa tylko wówczas, gdy zdanie negowane będzie fałszywe – zatem *p* musi przybrać wartość 0. Natomiast alternatywa będzie fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe, zatem zarówno *q*, jak i *r* muszą przybrać wartość 0:



W ten sposób określiliśmy, jakie wartości *p, q* i *r* podstawione w schemacie ~*p* → (*q* ∨ *r*) dadzą zdanie fałszywe.

Zapis «balonikowy» jest może bardziej czytelny, ale też bardziej pracochłonny, dlatego zwykle będziemy stosować konwencję zapisywania wartości logicznych nad zmiennymi i spójnikami zdaniowymi. Wartości logiczne zapisywane nad zmiennymi oznaczają wartości, jakie przyjąć muszą zmienne, aby spełnić nałożony warunek. Wartości logiczne zapisywane nad spójnikami logicznymi natomiast oznaczają wartości logiczne zdań złożonych, w których dany spójnik jest spójnikiem głównym.

Tok naszego rozumowania przebiegać będzie w analogiczny sposób. Dana jest wartość logiczna implikacji:

```
        0
~p  →  (q  ∨  r)
```

Kiedy implikacja jest fałszywa? Tylko wtedy, gdy poprzednik (tu: ~*p*) jest prawdziwy, a następnik (tu: *q* ∨ *r*) jest fałszywy. Zapiszemy to zatem:

```
1       0        0
~p  →  (q  ∨  r)
```

(Zwróć uwagę, że jedynka wpisana zostaje nad znak negacji – jest on bowiem spójnikiem głównym zdania, które jest poprzednikiem; natomiast zero wpisane zostaje nad znak alternatywy – jest ona bowiem spójnikiem głównym następnika implikacji). Jeżeli negacja (~*p*) jest prawdziwa, to zdanie negowane (*p*) jest fałszywe; natomiast alternatywa (*q* ∨ *r*) będzie fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony będą fałszywe:

```
10 0  0 0 0
~p → (q ∨ r)
```

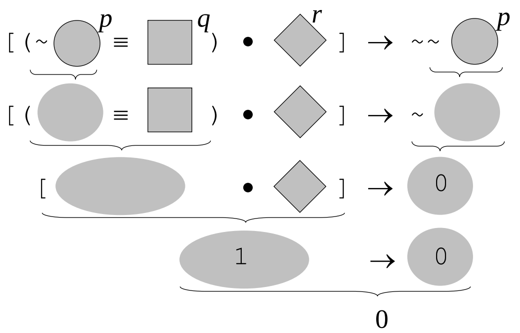
Mamy zatem odpowiedź na nasze pytanie: Po podstawieniu wartości 0 pod wszystkie zmienne w schemacie ~*p* → (*q* ∨ *r*) otrzymujemy fałsz.

Sprawdzenie. Za każdym razem, kiedy obliczamy wartości logiczne wstecz, warto dokonać sprawdzenia, aby wykluczyć ewentualną pomyłkę. Podstawiając odkryte wartości pod zmienne, mamy: ~0 → (0 ∨ 0), czyli 1 → 0, czyli 0. Uzyskujemy w ten sposób potwierdzenie, że podstawienie odkrytych wartości zmiennych w schemacie ~*p* → (*q* ∨ *r*) daje fałsz.

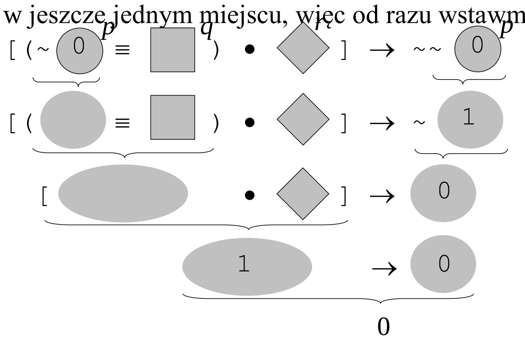
Przykład 2

Przy jakich wartościach zmiennych *p*, *q* i *r* podstawionych w schemacie [(~*p* ≡ *q*) •*r*] → ~~*p* otrzymamy fałsz?

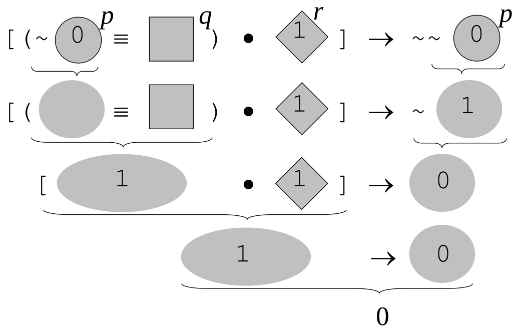
Wiemy, że implikacja ta jest fałszywa, więc prawdziwy musi być poprzednik implikacji, a fałszywy jej następnik:



Musimy rozważyć konsekwencje tych informacji. Rozpocznijmy od następnika. Następnikiem jest negacja (zwróćcie uwagę, że w zapisie «balonikowym» wartość następnika nie jest obliczana w rzędzie środkowym, tylko przepisywana do rzędu przedostatniego – stąd wartość 0 od razu przeskakuje wyżej). Negacja będzie fałszywa tylko wówczas, gdy zdanie negowane będzie prawdziwe. Zdanie negowane samo jest negacją (mianowicie ~*p*), będzie zatem prawdziwe tylko, gdy pod *p* podstawimy wartość 0. W ten sposób określiliśmy, jaką wartość należy podstawić pod *p*. Ponieważ zmienna *p* występuje w jeszcze jednym miejscu, więc od razu wstawmy odkrytą wartość wszędzie, gdzie *p* występuje:



Wróćmy teraz do poprzednika głównej implikacji, który ma być prawdziwy. Poprzednikiem implikacji jest koniunkcja – będzie ona prawdziwa tylko w jednym wypadku, a mianowicie, gdy prawdziwe będą oba jej człony. Zwróćmy uwagę, że ponieważ drugim członem koniunkcji jest zmienna *r*, więc wiemy już, że pod zmienną *r* należy podstawić wartość 1. Pierwszym członem koniunkcji jest natomiast równoważność – ma ona być prawdziwa.



Kłopot teraz polega na tym, że równoważność może być prawdziwa w dwóch wypadkach – albo gdy oba jej człony są prawdziwe, albo gdy oba jej człony są fałszywe. W naszym wypadku akurat można jednoznacznie określić, która z tych sytuacji zachodzi, wiemy bowiem już coś o jednym członie tej równoważności. Wiemy mianowicie, że pierwszy człon równoważności jest negacją zdania fałszywego, więc musi być prawdziwy. Jeżeli tak, to drugi człon równoważności też musi być prawdziwy, aby równoważność była prawdziwa. Ponieważ drugim członem równoważności jest *q*, więc wiemy już, jaką wartość logiczną musi przybrać ostatnia zmienna *q*. (Uzupełnij powyższy zapis).

Dokonajmy obliczeń na tym samym przykładzie w zapisie, który odtąd będziemy zawsze stosować. Wiemy, że implikacja ta jest fałszywa, więc prawdziwy musi być poprzednik implikacji, a fałszywy jej następnik:

```
                1    0 0
[(~p ≡ q) • r] → ~~p
```

Wyżej rozpoczęliśmy od określenia wartości logicznej następnika. Odwróćmy teraz kolejność rozważań i zacznijmy od określenia wartości logicznej poprzednika. Poprzednikiem jest koniunkcja – będzie ona prawdziwa tylko wówczas, gdy prawdziwe będą oba jej człony. Drugim członem koniunkcji jest zmienna *r*, więc wiemy już, jaką wartość należy pod nią podstawić, co możemy odnotować na marginesie. Gdyby zmienna *r* występowała gdzieś jeszcze, to w tym momencie należałoby jej wartość tam przepisać.

```
          1     1 1  0 0
[(~p ≡ q) • r] → ~~p
```
$v(r) = 1$[*]

Okazuje się teraz, że doszliśmy do wniosku, iż równoważność $\sim p \equiv q$ jest prawdziwa. Wiemy jednak, że równoważność może być prawdziwa w dwóch wypadkach (gdy oba człony są prawdziwe lub gdy oba człony są fałszywe). Aby rozstrzygnąć, który z tych przypadków ma miejsce, musimy sprawdzić, czy jesteśmy w stanie odnaleźć wartość logiczną któregoś z członów tej równoważności. W tym przykładzie możemy określić wartość logiczną pierwszego członu, o ile wpierw wykorzystamy informację na temat odnalezionej już wartości następnika. Następnikiem jest negacja – ma być ona fałszywa, zatem zdanie negowane (~*p*) musi być prawdziwe:

```
          1     1 1  0 01
[(~p ≡ q) • r] → ~~p
```
$v(r) = 1$

Dokończmy obliczenia w następniku – negacja będzie prawdziwa tylko wtedy, gdy to, co negowane (tym razem samo *p*), będzie fałszywe. W ten sposób odkrywamy, jaką wartość należy podstawić pod *p*. Przepisujemy tę wartość wszędzie tam, gdzie *p* występuje:

```
        0 1     1 1  0 01**0**
```

[*] Wyrażenie '$v(r) = 1$' odczytujemy 'zmienna *r* przybiera wartość 1'.

```
[(~p ≡ q) • r] → ~~p
```
$v(p) = 0, v(r) = 1$

Skierowujemy teraz uwagę na brakującą wartość zmiennej q. Wiemy, że równoważność, której q jest członem, jest prawdziwa. Możemy łatwo obliczyć («wprzód»), że pierwszy człon tej równoważności ($\sim p$) jest prawdziwy, gdyż negacja zdania fałszywego jest prawdziwa:

```
 10 1    1 1  0 010
[(~p ≡ q) • r] → ~~p
```
$v(p) = 0, v(r) = 1$

Stąd już w prosty sposób wynika, że q również musi przybrać wartość 1:

```
 10 1 1  1 1  0 010
[(~p ≡ q) • r] → ~~p
```
$v(p) = 0, v(q) = 1, v(r) = 1$

Sprawdźmy: $[(\sim 0 \equiv 1) \bullet 1] \rightarrow \sim\sim 0$, stąd $[(1 \equiv 1) \bullet 1] \rightarrow \sim 1$, stąd $[(1) \bullet 1] \rightarrow 0$, stąd $[1] \rightarrow 0$, stąd 0.

Konkludujemy, że gdy w schemacie $[(\sim p \equiv q) \bullet r] \rightarrow \sim\sim p$ podstawimy odkryte wartości zmiennych, tj. $v(p) = 0$, $v(q) = 1$, $v(r) = 0$, to otrzymamy fałsz.

Przykład 3

Przy jakich wartościach zmiennych p, q, r podstawionych w schemacie $(p \equiv r) \rightarrow \sim[\sim(q \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow p)]$ otrzymamy fałsz?

Implikacja będzie fałszywa tylko wtedy, gdy poprzednik (tu: $p \equiv r$) jest prawdziwy, a następnik (tu: $\sim[\sim(q \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow p)]$) jest fałszywy:

```
  1     0 0
(p ≡ r) → ~[~(q → r) • (r → p)]
```

Stajemy teraz przed wyborem, czy zająć się najpierw poprzednikiem czy następnikiem tej implikacji. W tym wypadku lepiej się zająć najpierw następnikiem. Poprzednik wygląda przystępniej, ale przecież równoważność jest prawdziwa w *dwóch* sytuacjach, tj. kiedy oba człony są prawdziwe lub kiedy oba człony są fałszywe. Gdybyśmy zatem chcieli rozważać najpierw poprzednik, to wiązałoby się to z koniecznością rozważenia dwóch możliwości – a każdą z nich musielibyśmy sprawdzić osobno. Niekiedy bywa, że trzeba rozważać dwie możliwości (sytuacje takie omówimy w §8.1.2), ale jeśli można ich uniknąć, to warto próbować. W naszym wypadku możemy najpierw rozważyć następnik. Ponieważ następnik, będący negacją $\sim[\sim(q \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow p)]$ ma być fałszywy, więc zdanie negowane (czyli koniunkcja $\sim(q \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow p)$) musi być prawdziwe:

```
  1     0 0          1
(p ≡ r) → ~[~(q → r) • (r → p)]
```

Koniunkcja $\sim(q \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow p)$ będzie z kolei prawdziwa, gdy prawdziwe będą oba jej człony. Pierwszy człon $\sim(q \rightarrow r)$, będący negacją, ma być prawdziwy, więc zdanie negowane $q \rightarrow r$ musi być fałszywe. Drugi człon $r \rightarrow p$ ma być prawdziwy:

```
  1     0 0 1   0    1    1
(p ≡ r) → ~[~(q → r) • (r → p)]
```

Pierwsza implikacja $q \rightarrow r$ musi być fałszywa, to znaczy, że jej poprzednik musi być prawdziwy, a jej następnik – fałszywy. W ten sposób odkrywamy wartości logiczne zmiennych q oraz r, więc skopiujmy je od razu wszędzie, gdzie występują:

```
  1 0   0 0 1 1 0 0  1  0 1
(p ≡ r) → ~[~(q → r) • (r → p)]
```
$v(q) = 1, v(r) = 0$

Pozostało nam tylko odkrycie wartości logicznej zmiennej *p*. Możemy jej szukać w dwóch miejscach – zmienna *p* występuje jako pierwszy człon równoważności $p \equiv r$ oraz jako następnik implikacji $r \to p$. Wartość logiczną zmiennej *p* jesteśmy w stanie odkryć na podstawie pierwszego jej wystąpienia w równoważności $p \equiv r$ (w drugim wystąpieniu wartość logiczna *p* nie jest jednoznacznie określona: ponieważ *r* jest fałszywe, to implikacja $r \to p$ będzie prawdziwa, jakąkolwiek wartość będzie miała zmienna *p*). Ponieważ równoważność $p \equiv r$ ma być prawdziwa, a wiemy, że *r* jest fałszywe, to wiemy też, że *p* musi być fałszywe:

```
0 1 0   0 0 1 1 0 0   1   0 1 0
(p ≡ r) → ~[~(q → r) • (r → p)]
```

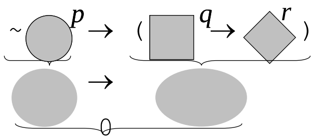
$v(p) = 0$, $v(q) = 1$, $v(r) = 0$

Sprawdzenie. Podstawiając znalezione wartości, mamy: $(0 \equiv 0) \to \sim[\sim(1 \to 0) \bullet (0 \to 0)]$, czyli $(1) \to \sim[\sim(0) \bullet (1)]$, czyli $1 \to \sim[1 \bullet 1]$, czyli $1 \to \sim[1]$, czyli $1 \to 0$, czyli 0. Konkludujemy więc, że podstawiając odkryte wartości logiczne ($v(p) = 0$, $v(q) = 1$, $v(r) = 0$) pod zmienne w badanym schemacie, otrzymamy fałsz.

Ćwiczenie 8.A „wartości wstecz – 1”

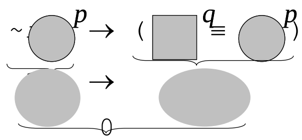
Jakie wartości muszą przybrać zmienne, aby po podstawieniu w podanych niżej schematach zdaniowych otrzymać fałsz. Przykłady zostały tak dobrane, aby można było jednoznacznie określić te wartości. Po każdym obliczeniu dokonaj sprawdzenia. (*Rozwiązania*, s. 348).

(a)



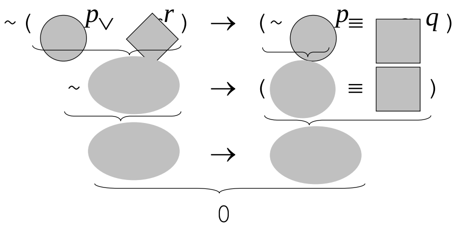
Spr.:

(b)



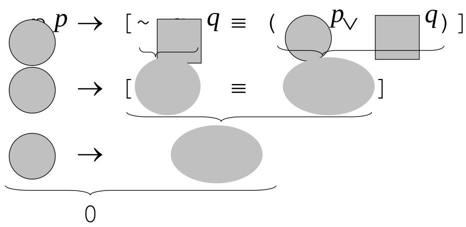
Spr.:

(c)



Spr.:

(d)

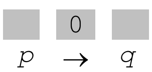


Spr.:

Ćwiczenie 8.B „wartości wstecz – 2”

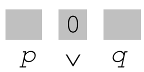
Jakie wartości muszą przybrać zmienne, aby po podstawieniu w podanych niżej schematach zdaniowych otrzymać fałsz. Przykłady zostały tak dobrane, aby można było jednoznacznie określić te wartości. Po każdym obliczeniu dokonaj sprawdzenia. (*Rozwiązania*, s. 348-349).

(a)



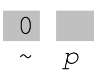
Spr.:

(b)



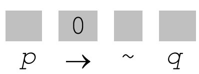
Spr.:

(c)



Spr.:

(d)



Spr.:

(e) $\sim p \vee \sim q$

Spr.:

(f) $\sim p \rightarrow \sim \sim q$

Spr.:

(g) $\sim (p \bullet \sim q)$

Spr.:

(h) $\sim (\sim \sim p \bullet \sim q)$

Spr.:

(i) $p \vee (\sim q \rightarrow r)$

Spr.:

(j) $\sim ((p \equiv q) \bullet p)$

Spr.:

(k) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \sim r)$

Spr.:

(m) $\sim [(p \bullet r) \bullet (r \equiv q)]$

Spr.:

(n) $(p \bullet r) \rightarrow (q \equiv \sim p)$

Spr.:

(o) $\sim [\sim (p \bullet r) \bullet \sim \sim r]$

Spr.:

(p) $\sim (p \vee r) \vee (r \rightarrow \sim p)$

Spr.:

(q) $(p \equiv r) \vee \{p \rightarrow [\sim q \equiv (q \vee p)]\}$

Spr.:

(r) $[(p \vee r) \bullet q] \rightarrow [r \rightarrow (\sim p \equiv q)]$

Spr.:

Przykład 4

Jakie wartości zmiennych *p*, *q*, *r* trzeba podstawić w schemacie $(p \equiv r) \bullet \sim[\sim(q \rightarrow r) \vee r]$, aby otrzymać prawdę?

Tym razem naszym zadaniem jest znalezienie takich wartości, aby po podstawieniu otrzymać prawdę, nie fałsz. Metoda jest jednak analogiczna. Musimy jedynie na wstępie rozpocząć od założenia, że wartość logiczna nad głównym spójnikiem wynosi 1:

```
              1
(p ≡ r) • ~[~(q → r) ∨ r]
```

Koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe:

```
  1           1 1
(p ≡ r) • ~[~(q → r) ∨ r]
```

Ponieważ pierwszym członem jest równoważność, która może być prawdziwa w dwóch sytuacjach, rozważmy najpierw drugi człon, bo być może uda nam się dookreślić wartość, jaką przybrać musi zmienna *r*, a wtedy już będzie jednoznacznie określona wartość, jaką przybierze zmienna *p*.

Drugi człon to negacja, która będzie prawdziwa, o ile zdanie negowane (alternatywa) będzie fałszywe. Alternatywa ta będzie fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony będą fałszywe. Drugi jej człon to zmienna *r* – możemy więc uzupełnić jej wartości wszędzie tam, gdzie występuje:

```
  1 0       1 1 0       0   0 0
(p ≡ r) • ~[~(q → r) ∨ r]          v(r) = 0
```

Możemy teraz określić wartości pozostałych zmiennych.

Wiemy, że równoważność $p \equiv r$ ma być prawdziwa, a ponieważ zmienna *r* przybiera wartość 0, więc takąż wartość przybrać musi zmienna *p*.

Wiemy, że negacja implikacji $\sim(q \rightarrow r)$ będzie fałszywa, a zatem implikacja $q \rightarrow r$ musi być prawdziwa. Ponieważ zmienna *r* przybiera wartość 0, więc implikacja $q \rightarrow 0$ będzie prawdziwa tylko wtedy, gdy zmienna *q* przybierze wartość 0.

```
0 1 0       1 1 0 0 1 0     0 0
(p ≡ r) • ~[~(q → r) ∨ r]          v(p) = 0, v(q) = 0, v(r) = 0
```

Sprawdzenie:
$(0 \equiv 0) \bullet \sim[\sim(0 \rightarrow 0) \vee 0]$, stąd $(1) \bullet \sim[\sim(1) \vee 0]$, stąd $1 \bullet \sim[0 \vee 0]$, stąd $1 \bullet \sim[0]$, stąd $1 \bullet 1$, stąd 1.

Ćwiczenie 8.C „wartości wstecz – 3”

Jakie wartości muszą przybrać zmienne, aby po podstawieniu w podanych niżej schematach zdaniowych otrzymać prawdę. Przykłady zostały tak dobrane, aby można było jednoznacznie określić te wartości. Po każdym obliczeniu dokonaj sprawdzenia. (*Rozwiązania*, s. 349).

(a)

	1	
p	•	q

Spr.:

(b)

1	
~	p

Spr.:

(c)

1		
~	~	q

Spr.:

(d)

	1		
p	•	~	q

Spr.:

(e)

		1		
~	p	•	~	q

Spr.:

(f)

1						
~	(	p	→	~	q	)

Spr.:

(g)

(	p	•	r	)	•	(	q	≡	~	p	)

Spr.:

(h)

~	[(	p	→	r	)	∨	(	r	≡	q	)]

Spr.:

(i)

~	[(	p	•	~	r	)	∨	(	r	∨	q	)]

Spr.:

(j)

~	(	p	→	r	)	•	(	q	∨	~	p	)

Spr.:

(k)

~	[	~	(	p	∨	r	)	∨	~	~	p	]

Spr.:

(l)

~	(	p	∨	r	)	•	(	r	→	~	p	)

Spr.:

8.1.2. Trudniejsze przykłady

Nie zawsze będzie można określić jednoznacznie, jaka jest wartość logiczna składowych. Musimy wówczas rozważać dwie, a nawet więcej możliwości.

Przykład 5

Przy podstawieniu jakich wartości pod zmienne *p*, *q* i *r* w schemacie ~(*p* ∨ (*r* ∨ *p*)) ≡ ~(~*p* • *q*) otrzymamy prawdę?

```
                  1
~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)
```

Jak pamiętamy, równoważność może być prawdziwa w dwóch sytuacjach – gdy oba człony są prawdziwe lub gdy oba człony są fałszywe. Tym razem nie mamy możliwości znalezienia dodatkowych informacji, które pozwoliłyby nam na jednoznaczne wyznaczenie wartości logicznych. Musimy zatem rozważyć obydwie możliwe sytuacje. Oznaczymy je odpowiednio (a) i (b), a rozważać je będziemy po kolei:

```
(a)   1               1 1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)
(b)   0               1 0
```

(a) W tej sytuacji lepiej jest zacząć od rozważania pierwszego członu (jeżeli nie jesteście pewni dlaczego, to spróbujcie zacząć od drugiego członu). Negacja alternatywy ma być prawdziwa, a zatem alternatywa musi być fałszywa:

```
(a)   1   0           1 1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)
```

Alternatywa jest fałszywa dokładnie wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe. W ten sposób ustalamy wartość logiczną, którą trzeba podstawić pod zmienną *p*.

```
(a)   1 0 0     0 0   1 1  0
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0
```

Łatwo też ustalamy brakującą wartość logiczną, którą trzeba podstawić pod zmienną *r*. Skoro alternatywa (*r* ∨ *p*) musi być fałszywa, to oba jej człony, w tym i *r*, muszą być fałszywe. Możemy teraz przejść do drugiego członu równoważności będącego negacją. Negacja ~(~*p* • *q*) będzie prawdziwa, o ile fałszywa będzie negowana koniunkcja:

```
(a)   1 0 0   0 0 0   1 1   0 0
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0; v(r) = 0
```

Koniunkcja jest fałszywa w trzech przypadkach. W naszym przykładzie mamy jednak informację wystarczającą, aby rozstrzygnąć, z którym z tych przypadków mamy do czynienia. Pierwszy człon tej koniunkcji (~*p*) musi być prawdziwy, ponieważ ustaliliśmy już, że *p* przybiera wartość 0. Skoro pierwszy człon koniunkcji jest prawdziwy, to koniunkcja będzie fałszywa tylko wtedy, gdy drugi jej człon (*q*) będzie fałszywy.

```
(a)   1 0 0   0 0 0   1 1 10 0 0
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0; v(q) = 0; v(r) = 0
```

Ustaliliśmy tym samym wszystkie wartości, które muszą przybrać zmienne, aby równoważność była prawdziwa w pierwszym z dwóch możliwych przypadków. Musimy teraz rozważyć drugą z możliwych sytuacji, tj. sytuację (b), w której oba człony równoważności są fałszywe.

(b) W tej sytuacji lepiej jest zacząć od rozważania drugiego członu (jeżeli nie jesteście pewni dlaczego, to spróbujcie zacząć od pierwszego członu). Negacja koniunkcji będzie fałszywa tylko wtedy, gdy prawdziwa będzie owa koniunkcja.

```
(b)   0             1 0   1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)
```

Skoro prawdziwa jest koniunkcja, to prawdziwe muszą być oba jej człony. W ten sposób ustalamy wartość, którą musi przybrać zmienna *q*, ale też jesteśmy krok od ustalenia wartości przybranej przez zmienną *p*. Skoro ~*p* jest prawdziwe, to *p* musi przybrać wartość 0:

```
(b)   0 0       0   1 0 10 1 1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0; v(q) = 1
```

Po przeniesieniu ustalonych wartości, skierujmy uwagę na pierwszy człon równoważności, który ma być fałszywy. Pierwszym członem jest negacja, która będzie fałszywa, o ile zdanie negowane (tu: alternatywa) będzie prawdziwa:

```
(b)   0 0 1     0   1 0 10 1 1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0; v(q) = 1
```

Alternatywa jest prawdziwa w trzech możliwych sytuacjach. W naszym wypadku jednak wiemy już, że pierwszy człon tej alternatywy (*p*) jest fałszywy, a zatem wnioskujemy, że drugi jej człon (sam będący alternatywą: *r* ∨ *p*) jest prawdziwy.

```
(b)   0 0 1   1 0   1 0 10 1 1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0; v(q) = 1
```

Ponownie powtarzamy nasze rozumowanie. Alternatywa (*r* ∨ *p*), której drugi człon (*p*) jest fałszywy, będzie prawdziwa, tylko jeżeli jej pierwszy człon (*r*) będzie prawdziwy.

```
(b)   0 0 1 1 1 0   1 0 10 1 1
      ~(p ∨ (r ∨ p)) ≡ ~(~p • q)          v(p) = 0; v(q) = 1; v(r) = 1
```

Możemy zatem odpowiedzieć na zadane pytanie. W schemacie ~(*p* ∨ (*r* ∨ *p*)) ≡ ~(~*p* • *q*) otrzymamy prawdę po podstawieniu albo (a) wartości 0 pod każdą z trzech zmiennych, albo (b) wartości 0 pod zmienną *p*, a wartości 1 pod zmienne *q* i *r*. Sprawdźmy, że tak jest istotnie:

(a) ~(0 ∨ (0 ∨ 0)) ≡ ~(~0 • 0), zatem ~(0 ∨ 0) ≡ ~(0), zatem ~(0) ≡ 1, zatem 1 ≡ 1, zatem 1.
(b) ~(0 ∨ (1 ∨ 0)) ≡ ~(~0 • 1), zatem ~(0 ∨ 1) ≡ ~(1 • 1), zatem ~(1) ≡ ~(1), zatem 0 ≡ 0, zatem 1.

Przykład 6

Przy podstawieniu jakich wartości pod zmienne *p* i *r* w schemacie ~(~*p* ≡ (~*r* • *p*)) otrzymamy prawdę?

```
      1
      ~(~p ≡ (~r • p))
```

Negacja będzie prawdziwa, gdy zdanie negowane, tj. równoważność ~*p* ≡ (~*r* • *p*) będzie fałszywa:

```
      1   0
      ~(~p ≡ (~r • p))
```

Równoważność jest jednak fałszywa nie w jednej, lecz w dwóch sytuacjach. Oznaczymy je odpowiednio (a) i (b), a rozważać je będziemy po kolei:

```
(a)   1 0 0     1
      ~(~p ≡ (~r • p))
(b)   1 1 0     0
```

W sytuacji (a) negacja (~*p*) ma być fałszywa, zatem zdanie negowane (*p*) musi być prawdziwe; jednocześnie koniunkcja (~*r* • *p*) ma być prawdziwa, zatem oba jej człony muszą być prawdziwe:

```
(a)     1 01 0  1  1 1                  v(p) = 1
        ~(~p ≡ (~r • p))
```

Ponieważ negacja (~*r*) ma być prawdziwa, więc zdanie negowane (*r*) musi być fałszywe:

```
(a)     1 01 0  10 1 1                  v(p) = 1, v(r) = 0
        ~(~p ≡ (~r • p))
```

Odkryliśmy zatem pierwszą kombinację wartości, po podstawieniu których w schemacie ~(~*p* ≡ (~*r* • *p*)) otrzymamy fałsz.

Nie jest to jednak jedyna taka kombinacja wartości, przy których otrzymamy fałsz. Nie rozważyliśmy jeszcze możliwości (b). Tym razem negacja (~*p*) ma być prawdziwa, więc zdanie negowane (*p*) musi być fałszywe:

```
        ~(~p ≡ (~r • p))
(b)     1 10 0     0 0                  v(p) = 0
```

Ustaliliśmy w ten sposób wartość logiczną, jaką przybrać musi zmienna *p* w sytuacji (b), pozostaje do ustalenia wartość logiczna dla zmiennej *r*. Koniunkcja ~*r* • *p* ma być fałszywa. Wiemy, że drugi człon tej koniunkcji jest fałszywy. W takim wypadku pierwszy człon tej koniunkcji (~*r*) może być albo prawdziwy albo fałszywy. Wartość logiczna tego członu (~*r*) ponownie nie jest jednoznacznie określona, więc musimy znów wyróżnić dwie możliwości:

```
(a)     1 01 0  10 1 1                  v(p) = 1, v(r) = 0
        ~(~p ≡ (~r • p))
(b1)    1 10 0  1  0 0                  v(p) = 0, v(r) = 0
(b2)    1 10 0  0  0 0                  v(p) = 0, v(r) = 1
```

W sytuacji (b_1) negacja (~*r*) ma być prawdziwa, więc zmienna *r* musi przybrać wartość 0; w sytuacji (b_2) negacja (~*r*) ma być fałszywa, więc zmienna *r* musi przybrać wartość 1.

Istnieją zatem trzy kombinacje wartości, jakie mogą przybrać zmienne w tym schemacie, aby otrzymać prawdę.

Sprawdzenia. Musimy dokonać sprawdzenia dla każdej z tych kombinacji:

(a) ~(~1 ≡ (~0 • 1)), zatem ~(0 ≡ (1 • 1)), zatem ~(0 ≡ (1)), zatem ~(0), zatem 1.

(b_1) ~(~0 ≡ (~0 • 0)), zatem ~(1 ≡ (0)), zatem ~(0), zatem 1.

(b_2) ~(~0 ≡ (~1 • 0)), zatem ~(1 ≡ (0)), zatem ~(0), zatem 1.

Ćwiczenie 8.D „wartości wstecz – 4"

Jakie wartości muszą przybrać zmienne, aby po podstawieniu w podanych niżej schematach zdaniowych otrzymać zadaną wartość logiczną. Po każdym obliczeniu dokonaj sprawdzenia. (*Rozwiązania*, s. 349-350).

(a)

	1	
p	≡	*q*
	1	

Spr. 1:

Spr. 2:

(b)

		0		
~	*p*	≡	~	*q*
		0		

Spr. 1:

Spr. 2:

(c)

~	p	•	~	q
		0		
		0		
		0		

Spr. 1:
Spr. 2:
Spr. 3:

(d)

~	p	∨	~	q
		1		
		1		
		1		

Spr. 1:
Spr. 2:
Spr. 3:

(e)

					0	
(	p	•	q	)	∨	q
					0	

Spr. 1:
Spr. 2:

(f)

		1						
~	q	•	(	p	∨	~	q	)
		1						

Spr. 1:
Spr. 2:

(g)

					1	
(	p	→	q	)	•	q
					1	

Spr. 1:
Spr. 2:

(h)

1							
~	[(	p	≡	r	)	∨	q]
1							

Spr. 1:
Spr. 2:

(i)

0										
~	[(	p	∨	q	)	•	(	p	•	r)]
0										

Spr. 1:
Spr. 2:

(j)

						0					
~	(	p	∨	q	)	≡	(	~	p	•	q)
						0					

Spr. 1:
Spr. 2:

(k)

	1								
p	≡	[(	p	≡	~	q	)	≡	p]
	1								

Spr. 1:
Spr. 2:

8.1.3. Metoda szukania wartości wstecz a matryce logiczne

Zanim przejdziemy do zastosowań poznanej umiejętności określania wartości logicznych «wstecz», warto uświadomić sobie, na czym metoda ta polega. Otóż jest to *de facto* metoda odnajdywania tych rzędów w pełnej matrycy logicznej danego schematu, w których instancje tego schematu charakteryzują się poszukiwaną wartością logiczną. Dlatego też, gdy szukamy wartości zmiennych p i q, przy których schemat $p \vee q$ przybiera wartość 0, to jednoznacznie możemy określić, że są to $v(p) = 0$ i $v(q) = 0$, gdyż tylko w jednym (ostatnim) rzędzie matrycy logicznej dla alternatywy jest ona fałszywa. Natomiast gdy szukamy wartości zmiennych p i q, przy których schemat $p \vee q$ przybiera wartość 1, to okazuje się, że są trzy kombinacje takich podstawień odpowiadające trzem pierwszym rzędom matrycy logicznej dla alternatywy, w których jest ona prawdziwa.

Ćwiczenie 8.E

Zastosuj metodę zero-jedynkową, aby odszukać wartości zmiennych, po podstawieniu których otrzymamy (a) fałsz, (b) prawdę. Następnie (c) uzupełnij matrycę logiczną oraz (d) skoreluj odkryte kombinacje wartości logicznych z odpowiednimi rzędami w matrycy logicznej. (*Rozwiązania*, s. 350).

(a)

		0		
~	p	→	~	q

(b)

~	p	→	~	q
		1		
		1		
		1		

(c)

p	*q*	$\sim p \to \sim q$		
1	1	$\sim 1 \to \sim 1$		
1	0	$\sim 1 \to \sim 0$		
0	1	$\sim 0 \to \sim 1$		
0	0	$\sim 0 \to \sim 0$		

8.2. Badanie tautologiczności skróconą metodą zero-jedynkową

Powiedzieliśmy, że tautologią jest taki schemat zdaniowy, który nie może mieć fałszywych instancji, jakiekolwiek wartości przybiorą zmienne. Jeżeli tak, to uznalibyśmy, że schemat zdaniowy α *nie jest* schematem tautologicznym, wtedy gdy można znaleźć takie wartości zmiennych zdaniowych, po podstawieniu których otrzymalibyśmy fałsz. Gdyby się natomiast okazało, że nie ma kombinacji wartości zmiennych zdaniowych, po podstawieniu których otrzymalibyśmy fałsz, wówczas musielibyśmy uznać, że schemat ten *jest* tautologią.

Na tej myśli oparta jest skrócona metoda zero-jedynkowa badania tautologiczności. Można ją przedstawić w postaci następującego algorytmu:

(i) Załóż, że dany schemat zdaniowy może mieć fałszywe instancje (to znaczy, załóż że nie jest on tautologią); innymi słowy, wpisz wartość 0 pod głównym spójnikiem.

(ii) Wnioskując wstecz, ustal, jakie wartości logiczne musiałyby przybrać zmienne zdaniowe, aby otrzymać wartość 0.

(iii) Wyciągnij wnioski:

- Jeżeli można znaleźć przynajmniej jedną kombinację takich wartości logicznych dla zmiennych zdaniowych, to dany schemat *nie jest tautologią*.
- Jeżeli nie można znaleźć żadnej kombinacji takich wartości logicznych dla zmiennych zdaniowych (a każda próba prowadzi do sprzeczności; por. porada babuni), to dany schemat *jest tautologią*.

Porada babuni

Jednym z kłopotów w stosowaniu metody skróconej jest to, że wykorzystuje się formę rozumowania znaną jako *reductio ad absurdum* (omówimy ją szerzej w rozdziale 13 – możecie zajrzeć tam teraz i przeczytać ramkę o dowodach nie wprost Parmenidesa, s. 271). Sednem tej formy rozumowania jest wykazanie fałszywości pewnego zdania poprzez pokazanie, że przyjęcie go jako założenia prowadzi do absurdu (sc. sprzeczności).

Na razie prześledźcie uważnie dość proste przykłady 7 i 8. W pierwszym nie zobaczycie sprzeczności; w drugim – już tak.

8.2.1. Prostsze przykłady

Przykład 7

Zacznijmy od prostego przykładu, gdzie można znaleźć takie podstawienie wartości logicznych pod zmienne zdaniowe w badanym schemacie zdaniowym, by otrzymać fałsz. Innymi słowy, zaczynamy od przykładu schematu nietautologicznego, np. $\sim p \vee \sim p$.

(i) Zakładamy, że schemat ten może mieć fałszywe instancje; nad głównym spójnikiem wpisujemy 0.

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ \sim & p & \vee & \sim & p \end{array}$$

(ii) Następnie ustalamy, jaką wartość logiczną musiałaby w takim razie przybrać zmienna zdaniowa p:

- alternatywa będzie fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe;

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & 0 & \\ \sim & p & \vee & \sim & p \end{array}$$

- zarówno pierwszy, jak i drugi człon jest negacją ($\sim p$), więc będzie fałszywy tylko wtedy, gdy zdanie negowane (p) będzie prawdziwe.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \sim & p & \vee & \sim & p \end{array}$$

  Sprawdzenie: $\sim 1 \vee \sim 1$, stąd $0 \vee 0$, stąd 0.

(iii) Ustaliliśmy, że jeżeli p przybiera wartość 1, to schemat $\sim p \vee \sim p$ przybiera wartość 0, a więc ustaliśmy, że schemat ten *nie jest* tautologią, gdyż istnieje takie podstawienie wartości logicznych pod zmienne zdaniowe, przy którym otrzymujemy fałsz.

Przykład 8

Zobaczmy teraz, co się dzieje, gdy zastosujemy metodę zero-jedynkową do schematu $\sim p \vee p$.

(i) Zaczynamy od założenia, że schemat ten może mieć instancje fałszywe.

$$\begin{array}{cccc} & & 0 & \\ \sim & p & \vee & p \end{array}$$

(ii) Następnie ustalamy, jaką wartość logiczną musiałyby przybrać zmienne zdaniowe, żeby otrzymać fałsz:

- alternatywa będzie fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe;

$$\begin{array}{cccc} 0 & & 0 & \mathbf{0} \\ \sim & p & \vee & p \end{array}$$

- ponieważ ustaliśmy, jaką wartość logiczną (mianowicie 0) musi przybrać zmienna p, więc przenosimy ją wszędzie tam, gdzie zmienna ta występuje;

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & p & \vee & p \end{array}$$

- przyjrzyjmy się pierwszemu członowi alternatywy: aby był fałszywy, p musiałoby przybrać wartość 1, co jest sprzeczne z wcześniejszym ustaleniem.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & p & \vee & p \end{array}$$

sprzeczność!

(iii) Nasza próba znalezienia takiego podstawienia wartości logicznych pod zmienną zdaniową w tym schemacie, aby otrzymać fałsz, nie powiodła się – próbując znaleźć kontrprzykład dla tautologiczności tego schematu, doszliśmy do sprzeczności. Co to znaczy? To znaczy, że *nie można* znaleźć kontrprzykładu dla tautologiczności tego schematu. Dowiedliśmy tym samym, że schemat $\sim p \vee p$ jest tautologią (gdyż założenie, że nie jest on tautologią, prowadzi do absurdu).

Uwaga. Warto odnotować, że w kroku (ii) można było uzyskać sprzeczność, również rozumując w następujący sposób:

- przyjrzyjmy się pierwszemu członowi alternatywy: ponieważ p przybiera wartość 0, więc $\sim p$ musi przybrać wartość 1, co jest sprzeczne z dotychczasowymi ustaleniami.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & p & \vee & p \end{array}$$

sprzeczność!

Przykład 9

Zbadamy wspólnie jeszcze jeden przykład schematu $p \to (p \lor r)$.

(i) Zaczynamy od założenia, że schemat ten może mieć instancje fałszywe.

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ p & \to & (p & \lor & r) \end{array}$$

(ii) Następnie ustalamy, jaką wartość logiczną musiałyby przybrać zmienne zdaniowe, żeby schemat ten był fałszywy:

- implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy;

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & 0 & & 0 & \\ p & \to & (p & \lor & r) \end{array}$$

- ponieważ ustaliliśmy wartość logiczną zmiennej *p*, więc przenosimy ją wszędzie tam, gdzie *p* występuje;

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \\ p & \to & (p & \lor & r) \end{array}$$

- przyjrzyjmy się następnikowi: jest on alternatywą, która aby być fałszywa, musiałaby mieć oba człony fałszywe (zarówno *p*, jak i *r* musiałyby być fałszywe), co jest sprzeczne z wcześniejszymi ustaleniami.

sprzeczność!

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & \to & (p & \lor & r) \end{array}$$

(iii) Nasza próba znalezienia takiego podstawienia wartości logicznych pod zmienne zdaniowe, przy którym otrzymujemy fałsz, doprowadziła do sprzeczności. Dowiedliśmy tym samym, że schemat $p \to (p \lor r)$ jest tautologią (gdyż hipoteza, że nie jest on tautologią, prowadzi do absurdu).

Porada babuni

W każdym wypadku, gdy wydaje się Wam, że dowiedliście nietautologiczności pewnego schematu, sprawdźcie, że tak istotnie jest. Pozwoli to uniknąć błędu.
Jeżeli przy sprawdzeniu otrzymacie wartość 1 (a nie 0, jak powinniście), to znaczy, że nie zauważyliście sprzeczności.

Ćwiczenie 8.F „tautologie – 1”

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową sprawdź, które z następujących schematów są tautologiami, a które nie. Zgodnie z powyższą poradą babuni dokonaj sprawdzeń dla schematów nietautologicznych. (*Rozwiązania*, s. 350).

(a) $[(p \rightarrow r) \vee q] \vee \sim s$

(b) $[(\sim p \equiv r) \bullet r] \rightarrow p$

(c) $[(p \equiv r) \bullet r] \rightarrow p$

(d) $[(p \rightarrow r) \bullet r] \rightarrow p$

(e) $[(p \rightarrow r) \bullet p] \rightarrow r$

(f) $[(p \rightarrow r) \bullet \sim r] \rightarrow \sim p$

(g) $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim p)$

(h) $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim r)$

(i) $p \rightarrow p$

(j) $\sim p \rightarrow p$

(k) $\sim (p \vee p)$

(l) $\sim (p \bullet p)$

(m) $[(p \rightarrow r) \bullet (r \rightarrow s)] \rightarrow (p \rightarrow s)$

(n) $\{(p \vee r) \bullet [(p \rightarrow s) \bullet (r \rightarrow s)]\} \rightarrow s$

(o) $\{(p \vee q) \bullet [(p \rightarrow r) \bullet (q \rightarrow s)]\} \rightarrow (r \vee s)$

8.2.2. Trudniejsze przykłady

W powyższych przykładach zawsze mogliśmy jednoznacznie ustalić, jakie wartości przyjmują zmienne zdaniowe. Nie zawsze tak jednak będzie. Widzieliśmy w szczególności w §8.1.2, że gdy np. próbujemy znaleźć wartości zmiennych występujących w schematach zdań równoważnościowych, to będziemy mogli znaleźć przynajmniej dwie możliwe kombinacje podstawień. Możliwość ta wiąże się z pewną komplikacją w zastosowaniu metody skróconej, którą ilustruje następujący przykład.

Przykład 10

Czy jest tautologią schemat $(p \bullet (p \to q)) \equiv q$?

(i) Załóżmy, że schemat ten może mieć fałszywe instancje.

```
                        0
    (p • (p → q)) ≡ q
```

(ii) Równoważność jest fałszywa w dokładnie dwóch sytuacjach:

```
(a)     1           0 0
    (p • (p → q)) ≡ q
(b)     0           0 1
```

(a)

- Zmienna q przybiera wartość 0 – wartość tę przenosimy wszędzie tam, gdzie zmienna ta występuje.

```
(a)     1       0   0 0
    (p • (p → q)) ≡ q
```

- Koniunkcja $p \bullet (p \to q)$ będzie prawdziwa, tylko jeśli oba człony są prawdziwe; zmienna p musi zatem przybrać wartość 1.

```
(a)  1  1   1 1 0   0 0
    (p • (p → q)) ≡ q
```

- Ponieważ p przybiera wartość 1, a q – wartość 0, więc implikacja $p \to q$ musi być fałszywa, co jest sprzeczne z wcześniejszymi ustaleniami.

```
                0   sprzeczność!
(a)  1  1   1   1 0   0 0
    (p • (p → q)) ≡ q
```

Czy możemy wnioskować, że schemat $(p \bullet (p \to q)) \equiv q$ jest tautologią? Nie. Nie wykazaliśmy bowiem jeszcze, że *nie można* znaleźć żadnej kombinacji podstawień pod zmienne, przy których schemat ten miałby fałszywe instancje. Rozważyliśmy dopiero jedną z dwóch wyróżnionych wstępnie możliwości (a). Dopiero gdy również w przypadku (b) nie udałoby się nam znaleźć kontrprzykładu, moglibyśmy wnioskować, że mamy do czynienia z tautologią. W przypadku (b) jednak można taką kombinację wartości logicznych znaleźć.

(b)

- Zmienna q przybiera wartość 1; koniunkcja $p \bullet (p \to q)$ będzie fałszywa w trzech przypadkach, więc spróbujmy jakoś te przypadki ograniczyć. Skoro q przybiera wartość 1, to implikacja $(p \to q)$ będzie prawdziwa.

```
    (p • (p → q)) ≡ q
(b)     0     1 1   0 1
```

- Koniunkcja, której drugi człon jest prawdziwy, będzie fałszywa, o ile jej pierwszy człon będzie fałszywy; zatem p musi przybrać wartość 0.

```
    (p • (p → q)) ≡ q
(b)  0  0   0 1 1   0 1
```

- *Sprawdzenie*: $(0 \bullet (0 \to 1)) \equiv 1$, stąd $(0) \equiv 1$, stąd 0.

(iii) Nasza próba znalezienia takiego podstawienia wartości logicznych pod zmienne zdaniowe, przy którym otrzymujemy fałsz, powiodła się ostatecznie w sytuacji (b). Dowiedliśmy tym samym, że schemat $(p \bullet (p \to q)) \equiv q$ nie jest tautologią.

Przykład 11

Czy jest tautologią schemat $(p \rightarrow r) \equiv (\sim p \vee r)$?

(i) Załóżmy, że schemat ten może mieć fałszywe instancje.

```
               0
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
```

(ii) Równoważność jest fałszywa w dokładnie dwóch sytuacjach:

```
(a)     1      0      0
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
(b)     0             1
```

(a)

- zaczniemy od drugiego członu równoważności, tj. od alternatywy $\sim p \vee r$, która ma być fałszywa; alternatywa jest bowiem fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej człony będą fałszywe, więc *r* musi przybrać wartość 0

```
(a)     1 0  0  0  0 0
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
```

- implikacja, której następnik jest fałszywy, będzie prawdziwa tylko wówczas, gdy poprzednik jest fałszywy; zatem *p* musi przybrać wartość 0

```
(a) 0 1 0  0  00 0 0
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
```

- skoro *p* przybiera wartość 0, to $\sim p$ przybiera wartość 1, co jest sprzeczne z wcześniejszymi ustaleniami.

```
               1  sprzeczność!
(a) 0 1 0  0  00 0 0
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
```

(b)

- tym razem zaczynamy od implikacji, która jest fałszywa dokładnie w jednej sytuacji, a mianowicie gdy *p* przybiera wartość 1, a *r* – wartość 0.

```
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
(b) 1 0 0        1 1 0
```

- skoro *p* przybiera wartość 1, to $\sim p$ przybiera wartość 0, ale w takim razie alternatywa $(\sim p \vee r)$, której oba człony są fałszywe, musi być fałszywa, co jest sprzeczne z wcześniejszymi ustaleniami.

```
   (p → r)  ≡  (~p ∨ r)
(b) 1 0 0      01 1 0
                  0  sprzeczność!
```

(iii) Nasza próba znalezienia takiego podstawienia wartości logicznych pod zmienne zdaniowe w schemacie $(p \rightarrow r) \equiv (\sim p \vee r)$, aby otrzymać fałsz, doprowadziła do sprzeczności w obydwu możliwych sytuacjach. Dowiedliśmy tym samym, że schemat ten jest tautologią.

Ćwiczenie 8.G „tautologie – 2"

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową, sprawdź, które z następujących schematów są tautologiami, a które nie. Dokonaj sprawdzeń dla schematów nietautologicznych. (*Rozwiązania*, s. 350).

(a) $\sim(p \bullet r) \equiv (\sim p \vee \sim r)$

(b) $\sim(p \vee r) \equiv (\sim p \bullet \sim r)$

(c) $\sim(p \rightarrow r) \equiv (p \bullet \sim r)$

(d) $\sim(p \rightarrow r) \equiv \sim(p \vee \sim r)$

(e) $[(p \rightarrow r) \bullet (p \rightarrow \sim r)] \rightarrow p$

(f) $\sim(p \vee r) \equiv (\sim p \vee \sim r)$

(g) $\sim(p \bullet r) \equiv (\sim p \bullet \sim r)$

Ćwiczenie 8.H „tautologie – 3" (dla chętnych)

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową, dowiedź, że wszystkie tautologie wymienione w rozdziale 7 są tautologiami.

8.2.3. Co można ustalić metodą skróconą?

Warto zwrócić uwagę na to, że stosując skróconą metodę zero-jedynkową (dla badania tautologiczności), możemy jedynie ustalić, czy dany schemat zdaniowy jest tautologią, czy nią nie jest. Jeżeli ustalimy, że schemat ten nie jest tautologią, to nie wiemy tym samym, czy jest on kontrtautologią czy schematem logicznie niezdeterminowanym. Jest tak dlatego, że znalezienie wartości zmiennych zdaniowych, po podstawieniu których otrzymamy fałsz, jest jednoznaczne z odkryciem przynajmniej jednego rzędu w matrycy logicznej, w którym instancje danego schematu są fałszywe. Nie wiemy jednak, jak wyglądają pozostałe rzędy matrycy logicznej – czy zawierają tylko instancje fałszywe (w którym to wypadku schemat byłby kontrtautologią), czy też nie (w którym to wypadku schemat byłby logicznie niezdeterminowany).

Podsumowanie

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej do zbadania, czy schemat zdaniowy α jest tautologią, wiąże się z próbą znalezienia takich wartości zmiennych, które podstawione w schemacie α dadzą wartość 0:

- schemat zdaniowy α **nie jest tautologią**, jeżeli możliwe jest znalezienie takich wartości;
- schemat zdaniowy α **jest tautologią**, jeżeli niemożliwe jest znalezienie takich wartości (próba kończy się znalezieniem sprzeczności).

8.3. Badanie kontrtautologiczności skróconą metodą zero-jedynkową

Badanie kontrtautologiczności danego schematu zdaniowego przebiega w sposób analogiczny. Kontrtautologią jest schemat zdań wyłącznie fałszywych, tj. niemożliwe są prawdziwe instancje schematu kontrtautologicznego. Aby się przekonać, że dany schemat *nie jest* kontrtautologiczny, wystarczy znaleźć wartości zmiennych, po podstawieniu których w danym schemacie otrzymamy wartość 1. Aby się przekonać, że dany schemat *jest* kontrtautologiczny, próba znalezienia wartości zmiennych, po podstawieniu których w danym schemacie otrzymamy wartość 1, musi się skończyć niepowodzeniem.

Aby zbadać, czy dany schemat jest kontrtautologiczny, czy nie, zaczynamy od założenia, że dany schemat zdaniowy może mieć prawdziwe instancje (to znaczy, że nie jest kontrtautologią). Wnioskując wstecz, ustalamy, jakie wartości logiczne musiałyby mieć zmienne zdaniowe w tym schemacie, by otrzymać prawdę. Jeżeli można znaleźć przynajmniej jedną kombinację takich wartości logicznych dla zmiennych zdaniowych, to dany schemat *nie jest kontrtautologią*, gdyż istnieje przynajmniej jeden rząd matrycy logicznej, w którym instancje tego schematu są prawdziwe. Jeżeli nie można (bez sprzeczności) znaleźć żadnej kombinacji takich wartości logicznych dla zmiennych zdaniowych, aby po podstawieniu ich w danym schemacie otrzymać wartość 1, to dany schemat *jest kontrtautologią*.

Czy jest kontrtautologią schemat $p \bullet {\sim}p$?

(i) Zaczynamy od założenia, że schemat ten może mieć prawdziwe instancje.

```
  1
p • ~p
```

(ii) Następnie ustalamy, jaką wartość logiczną musiałaby w takim razie przybrać zmienna zdaniowa:

- koniunkcja będzie prawdziwa tylko wtedy, gdy prawdziwe będą oba jej człony.

```
1 1 1
p • ~p
```

- ustaliliśmy, że *p* przybiera wartość 1.

```
1 1 11
p • ~p
```

- jeżeli *p* przybiera wartość 1, to ~*p* przybiera wartość 0, co jest sprzeczne z tym, co właśnie ustaliliśmy.

```
      0  sprzeczność!
1 1  11
p • ~p
```

(iii) Nasza próba znalezienia takiego podstawienia wartości logicznych pod zmienne zdaniowe w schemacie *p* • ~*p*, by otrzymać prawdę, doprowadziła do sprzeczności. Dowiedliśmy tym samym, że schemat ten jest kontrtautologią.

Podsumowanie

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej do zbadania, czy schemat zdaniowy α jest kontrtautologią, wiąże się z próbą znalezienia takich wartości zmiennych, które w schemacie α dadzą wartość 1:

- schemat zdaniowy α **nie jest kontrtautologią**, jeżeli możliwe jest znalezienie takich wartości;
- schemat zdaniowy α **jest kontrtautologią**, jeżeli niemożliwe jest znalezienie takich wartości (próba kończy się wykryciem sprzeczności).

Ćwiczenie 8.I „kontrtautologie"

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową, sprawdź, które z następujących schematów są kontrtautologiami, a które nie. Dokonaj sprawdzeń dla schematów, które nie są kontrtautologiczne. (*Rozwiązania*, s. 351).

(a) ~[(p → q) ∨ (q → p)]

(b) (p → q) • ~(p ∨ q)

(c) (p → q) • ~(~p ∨ q)

(d) (p → q) • (p → ~q)

(e) (p ∨ ~p) • ~(p ∨ ~p)

(f) (p • ~p) ∨ ~(p • ~p)

(g) (p → q) • (p • ~q)

(h) (p ∨ ~q) → ~[p → (~q ∨ p)]

8.4. Badanie logicznego niezdeterminowania skróconą metodą zero--jedynkową

Powiedzieliśmy, że skróconą metodę zero-jedynkową można stosować zarówno do zbadania tautologiczności (ew. nietautologiczności) schematu zdaniowego, jak również do zbadania kontrtautologiczności (ew. niekontrtautologiczności) schematu zdaniowego. Teoretycznie stosując tę metodę, można stwierdzić, czy dany schemat zdaniowy jest logicznie niezdeterminowany. Takie stwierdzenie będzie się jednak wiązało ze znalezieniem zarówno prawdziwej instancji danego schematu, jak i fałszywej instancji tego schematu. Innymi słowy, aby dowieść, że schemat jest logicznie niezdeterminowany, musimy wykazać zarówno, że nie jest on kontrtautologiczny (znajdując instancję prawdziwą), jak i że nie jest on tautologiczny (znajdując instancję fałszywą).

Spróbujmy wykazać, że schemat ~*p* → ~*q* jest logicznie niezdeterminowany. Konieczne są dwa kroki – po pierwsze musimy wykazać, że istnieje przynajmniej jeden rząd matrycy, w którym instancje tego schematu są prawdziwe, a po drugie, że istnieje przynajmniej jeden rząd matrycy, w którym instancje tego schematu są fałszywe.

Po pierwsze, szukamy takich wartości zmiennych, aby otrzymać prawdę:

```
     1
~p → ~q
```

Wiemy, że implikacja jest prawdziwa w trzech przypadkach. Rozpocznijmy od sytuacji, w której zarówno poprzednik, jak i następnik jest prawdziwy:

```
         1
        ~p → ~q
(a)     10    10
(b)
(c)
```

Widać wyraźnie, że już pierwsza sytuacja wystarcza, by znaleźć przynajmniej jeden rząd matrycy, w którym instancje schematu badanego są prawdziwe. Znaczy to, że badany schemat zdaniowy na pewno nie jest kontrtautologiczny. Musimy jednak pamiętać o tym, że musielibyśmy rozważyć kolejne przypadki, gdyby nie udało się wykazać, że schemat nie jest kontrtautologiczny w tak prosty sposób.

Po drugie, szukamy takich wartości zmiennych, aby otrzymać fałsz:

```
     0
~p → ~q
```

Implikacja jest fałszywa w dokładnie jednym przypadku, mianowicie, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Poprzednik (~*p*) będzie prawdziwy, gdy zmienna *p* przybierze wartość 0. Następnik (~*q*) będzie fałszywy, gdy zmienna *q* przybierze wartość 1.

```
10 0  01
~p → ~q
```

W ten sposób znaleźliśmy wartości zmiennych *p* (0) i *q* (1), po podstawieniu których otrzymamy fałsz. Znaleźliśmy też wartości zmiennych *p* (0) i *q* (0), po podstawieniu których otrzymamy prawdę. Sprawdźmy:

~0 → ~1, zatem 1 → 0, zatem 0
~0 → ~0, zatem 1 → 1, zatem 1.

Schemat ten jest więc logicznie niezdeterminowany.

Aby dowieść, że schemat zdaniowy nie jest logicznie niezdeterminowany, trzeba albo dowieść, że jest on tautologią, albo że jest on kontrtautologią.

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową, musimy się liczyć z tym, że bardzo często napotykać będziemy sytuacje, w których nie będzie można jednoznacznie wyznaczyć wartości logicznych dla zmiennych przy poszukiwaniu prawdy bądź fałszu. O tym, że tak jest, łatwo się przekonać, uświadamiając sobie, na czym zasadza się możliwość jednoznacznego określenia wartości zmiennych. Otóż wartości zmiennych, po podstawieniu których w schemacie otrzymamy np. fałsz, można będzie jednoznacznie wyznaczyć w takim schemacie, którego matryca logiczna zawiera tylko jeden wiersz z wartością 0. To znaczy, że matryca o np. 8 rzędach zawierać będzie 7 rzędów z wartością 1. A to z kolei znaczy, że poszukując wartości zmiennych, po podstawieniu których w schemacie tym otrzymamy prawdę, nie tylko nie będziemy mogli jednoznacznie określić tych wartości, ale będziemy musieli się liczyć z siedmioma możliwymi sytuacjami. Jeszcze gorzej będzie w sytuacjach, gdy liczba rzędów z wartością 0 jest zbliżona do liczby rzędów z wartością 1.

Podsumowanie

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej do zbadania, czy schemat zdaniowy α jest logicznie niezdeterminowany, wiąże się z próbą znalezienia: (a) takich wartości zmiennych, które w schemacie α dadzą wartość 1, oraz (b) takich wartości zmiennych, które w schemacie α dadzą wartość 0:

- schemat zdaniowy α **jest logicznie niezdeterminowany**, jeżeli możliwe jest znalezienie zarówno wartości spełniających warunek (a), jak i wartości spełniających warunek (b) – żadna z takich prób nie kończy się sprzecznością;
- schemat zdaniowy α **nie jest logicznie niezdeterminowany**, jeżeli albo niemożliwe jest znalezienie wartości spełniających warunek (a), albo niemożliwe jest znalezienie wartości spełniających warunek (b) – przynajmniej jedna z takich prób kończy się sprzecznością.

Ćwiczenie 8.J „schematy logicznie niezdeterminowane"

Stosując skróconą metodę zero-jedynkową, sprawdź, które z następujących schematów są logicznie niezdeterminowane. Dla schematów, które nie są logicznie niezdeterminowane, określ, czy są kontrtautologiami, czy tautologiami. (*Rozwiązania*, s. 351).

(a) $\sim[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)]$

(b) $(p \rightarrow r) \bullet \sim(p \vee q)$

(c) $(p \rightarrow q) \bullet \sim(\sim p \vee q)$

(d) $(p \rightarrow q) \vee \sim(p \rightarrow \sim q)$

(e) $(p \vee \sim p) \bullet \sim(p \vee \sim p)$

(f) $(p \bullet \sim p) \vee \sim(p \bullet \sim p)$

(g) $(\sim p \rightarrow q) \bullet (p \bullet \sim q)$

(h) $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim[p \rightarrow (\sim q \vee p)]$

8.5. Badanie logicznej równoważności skróconą metodą zero-jedynkową

Pamiętamy, że dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne wówczas, gdy mają dokładnie te same matryce logiczne, tj. nie istnieje taki rząd matrycy logicznej, w którym instancje tych schematów różnią się wartością logiczną. Zbadanie logicznej równoważności dwóch schematów α i β będzie się wiązało z założeniem, że schematy te nie są logicznie równoważne, tj. że albo (a) możliwe są takie wartości zmiennych, które po podstawieniu w schemacie α dadzą prawdę, a w schemacie β – fałsz, albo (b) możliwe są takie wartości zmiennych, które po podstawieniu w schemacie α dadzą fałsz, a w schemacie β – prawdę. Schematy te okażą się logicznie równoważne tylko wtedy, gdy obydwa podstawienia (a) i (b) okażą się niemożliwe (doprowadzą do sprzeczności).

Przykład 12

Wykażemy najpierw, że schemat zdaniowy $\sim p \bullet \sim q$ nie jest równoważny schematowi $\sim(p \bullet q)$. Jeżeli możliwe są takie wartości p i q, które albo (a) podstawione w schemacie $\sim p \bullet \sim q$ dadzą 1, a podstawione w schemacie $\sim(p \bullet q)$ dadzą 0, albo (b) podstawione w schemacie $\sim p \bullet \sim q$ dadzą 0, a podstawione w schemacie $\sim(p \bullet q)$ dadzą 1, to wykażemy tym samym, że schematy te nie są logicznie równoważne.

(a)	1	0
	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet q)$
(b)	0	1

Rozpocznijmy od możliwości (a). Z której strony zaczniemy? Odpowiedź zawsze będzie taka sama: zaczynamy od tego schematu, który obiecuje nam szybsze dotarcie do jednoznacznego określenia wartości logicznych. W tym wypadku zaczniemy od koniunkcji, która ma być prawdziwa, gdyż będzie ona prawdziwa tylko w jednym wypadku, mianowicie, gdy prawdziwe będą oba jej człony. Ponieważ człony koniunkcji są negacjami, więc zdania negowane muszą być fałszywe. W ten sposób dochodzimy do określenia wartości logicznych, które muszą przybrać zmienne p i q w sytuacji (a). Odpowiednio też przenosimy uzyskaną informację na drugi schemat:

(a)	1**0** 1 1**0**	0 0 0
	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet q)$

Koniunkcja dwóch zdań fałszywych będzie fałszywa, a negacja fałszywej koniunkcji będzie prawdziwa, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

		1 **sprzeczność!**
(a)	10 1 10	0 0 0 0
	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet q)$

Dochodzimy zatem do wniosku, że ponieważ niemożliwe jest znalezienie takich wartości zmiennych p i q, które podstawione w schemacie $\sim p \bullet \sim q$ dadzą 1, a podstawione w schemacie $\sim(p \bullet q)$ dadzą 0, więc nie istnieje taki rząd matrycy logicznej dla tych schematów, w którym instancje schematu $\sim p \bullet \sim q$ byłyby prawdziwe, a instancje schematu $\sim(p \bullet q)$ byłyby fałszywe.

Taki wniosek nie wystarcza jednak, aby stwierdzić cokolwiek na temat logicznej równoważności tych schematów. Musimy jeszcze rozważyć możliwość (b).

	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet q)$
(b)	0	1

W tym wypadku mamy mniej szczęścia niż w pierwszym, gdyż czy zaczniemy ze strony lewej, czy ze strony prawej, zawsze i tak otwierają się przed nami aż trzy możliwości. Z lewej strony – koniunkcja może być fałszywa w trzech wypadkach. Z prawej strony – negacja jest prawdziwa w dokładnie jednym wypadku, gdy zdanie negowane jest fałszywe, ale zdaniem negowanym jest koniunkcja, która fałszywa będzie w dokładnie trzech wypadkach. Zacznijmy od prawej strony (choć równie dobrze moglibyśmy zacząć od lewej):

	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet q)$
(b_1)	0	1 **1** 0 **0**
(b_2)	0	1 **0** 0 **1**
(b_3)	0	1 **0** 0 **0**

Rozważmy interpretację (b_1). Przenosząc wartości przybierane przez zmienne p i q, jesteśmy w stanie łatwo określić ich negacje: $\sim p$ przybierze wartość 0, a $\sim q$ przybierze wartość 1. Koniunkcja, której jeden człon jest fałszywy ($\sim p$), będzie fałszywa.

	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet q)$
(b_1)	01 0 10	1 1 0 0

To wystarczy. Znaleźliśmy takie wartości zmiennych p i q (mianowicie, odpowiednio, wartości 1 i 0), które podstawione w schemacie $\sim p \bullet \sim q$ dadzą 0, a podstawione w schemacie $\sim(p \bullet q)$ dadzą 1. Innymi słowy, stwierdziliśmy, że istnieje przynajmniej jeden rząd matrycy logicznej tych schematów, w którym ich instancje różnią się wartością logiczną. To wystarcza, aby wykazać, że schematy te nie są logicznie równoważne.

Przykład 13

Wykażmy teraz, że schemat zdaniowy ~*p* ∨ ~*q* jest logicznie równoważny schematowi ~(*p* • *q*). Aby wykazać, że schematy te są logicznie równoważne, trzeba pokazać, że (a) nie ma takich wartości *p* i *q*, które podstawione w schemacie ~*p* • ~*q* dadzą 1, a podstawione w schemacie ~(*p* • *q*) dadzą 0, oraz że (b) nie ma takich wartości *p* i *q*, które podstawione w schemacie ~*p* • ~*q* dadzą 0, a podstawione w schemacie ~(*p* • *q*) dadzą 1. Innymi słowy, musimy uzyskać sprzeczność zarówno w sytuacji (a), jak i w sytuacji (b).

```
(a)       1                    0
        ~p ∨ ~q              ~(p • q)
(b)       0                    1
```

Rozpocznijmy od możliwości (a). Z której strony zaczniemy? Z lewej strony występuje alternatywa, która może być prawdziwa w trzech wypadkach. Spróbujmy od strony prawej. Negacja będzie fałszywa tylko wtedy, gdy zdanie negowane (tu: koniunkcja) będzie prawdziwe. Koniunkcja będzie prawdziwa, tylko jeśli oba jej człony są prawdziwe. W ten sposób dochodzimy do określenia wartości logicznych, które muszą przybrać zmienne *p* i *q* w sytuacji (a) – obie zmienne muszą przybrać wartość 1. Przenosimy te wartości do schematu z lewej strony. Ponieważ negacja zdania prawdziwego jest fałszywa, otrzymujemy alternatywę zdań fałszywych, która również jest fałszywa, co jest sprzeczne z wcześniejszym założeniem. Sytuacja (a) jest zatem niemożliwa.

Rozważmy sytuację (b). Zaczynamy tym razem z lewej strony, alternatywa jest bowiem fałszywa tylko wówczas, gdy oba jej człony są fałszywe. Oba te człony są negacjami, będą zatem fałszywe tylko wówczas, gdy prawdziwe będą zdania negowane. W ten sposób dochodzimy do określenia wartości logicznych, które muszą przybrać zmienne *p* i *q* w sytuacji (b) – obie zmienne muszą przybrać wartość 1. Przenosimy te wartości do schematu z prawej strony. Koniunkcja dwóch zdań prawdziwych jest prawdziwa. Negacja tejże prawdziwej koniunkcji musi być zatem fałszywa, a nie prawdziwa, jak zakładaliśmy. Sytuacja (b) jest więc również niemożliwa.

Ustaliliśmy zatem, że nie istnieją takie wartości zmiennych *p* i *q*, które podstawione w schemacie ~*p* ∨ ~*q* dadzą 0, a podstawione w schemacie ~(*p* • *q*) dadzą 1, oraz że nie istnieją takie wartości zmiennych *p* i *q*, które podstawione w schemacie ~*p* ∨ ~*q* dadzą 1, a podstawione w schemacie ~(*p* • *q*) dadzą 0. Innymi słowy, stwierdziliśmy, że nie istnieje taki rząd matrycy logicznej tych schematów, w którym ich instancje różnią się wartością logiczną. To wystarcza, aby wykazać, że schematy te są logicznie równoważne.

Podsumowanie

Zastosowanie skróconej metody zero-jedynkowej do zbadania, czy schematy zdaniowe α i β są logicznie równoważne wiąże się z próbą znalezienia (a) takich wartości zmiennych, które w schemacie α dadzą wartość 1, a w schemacie β wartość 0, oraz (b) takich wartości zmiennych, które w schemacie α dadzą wartość 0, a w schemacie β wartość 1:

- schematy zdaniowe α i β **nie są logicznie równoważne**, jeżeli możliwe jest znalezienie albo wartości spełniających warunek (a), albo wartości spełniających warunek (b) – przynajmniej jedna z tych prób nie kończy się znalezieniem sprzeczności;
- schematy zdaniowe α i β **są logicznie równoważne**, jeżeli niemożliwe jest znalezienie ani wartości spełniających warunek (a), ani wartości spełniających warunek (b) – obie próby kończą się znalezieniem sprzeczności.

Ćwiczenie 8.K „logiczna równoważność”

Zastosuj skróconą metodę zero-jedynkową, aby zbadać, czy następujące pary schematów zdaniowych są sobie logicznie równoważne. (*Rozwiązania*, s. 351).

(a)	1	0
	$\sim(p \vee r)$	$\sim p \vee \sim r$
	0	1
(b)	1	0
	$\sim p \bullet \sim r$	$\sim(p \vee r)$
	0	1
(c)		
	$\sim(p \rightarrow r)$	$p \bullet \sim r$
(d)		
	$p \equiv q$	$(p \bullet q) \vee (\sim p \bullet \sim q)$
(e)		
	$(p \vee q) \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim(p \bullet q)$
(f)		
	$(p \vee q) \bullet (p \vee r)$	$(p \bullet q) \vee (p \bullet r)$
(g)		
	p	$p \bullet (p \vee q)$
(h)		
	p	$p \bullet (p \bullet q)$
(i)		
	p	$p \vee (p \vee q)$
(j)		
	p	$p \vee (p \bullet q)$
(k)		
	$p \vee \sim p$	$\sim(q \bullet \sim q)$

Podsumowanie

Skrócona metoda zero-jedynkowa jest bardzo przydatna w dochodzeniu zarówno do własności schematów zdaniowych, jak i w rozstrzyganiu relacji logicznych zachodzących między schematami. Jej właściwe zastosowanie jest zawsze związane z dobrym zrozumieniem operacjonalizacji pojęć oraz z dobrym zrozumieniem tego, co metoda zero-jedynkowa pozwala nam zrobić. Otóż stosując metodę zero-jedynkową, zawsze odszukujemy pewien rząd w matrycy logicznej o zadanych właściwościach (w którym instancje danego schematu są np. fałszywe). Musimy też dobrze rozumieć konsekwencje odszukania takiego rzędu (np. odnalezienie rzędu, w którym instancje danego schematu są fałszywe, świadczy z pewnością o tym, że schemat ten nie jest tautologią). Musimy wreszcie dobrze pojmować konsekwencje niemożności znalezienia takiego rzędu (np. jeżeli do sprzeczności prowadzą wszelkie próby znalezienia podstawień pod zmienne, przy których otrzymalibyśmy prawdę, to dowód na to, że mamy do czynieniami z kontrtautologią).

<table>
<tr><th></th><th>Definicja</th><th>Operacjonalizacja</th><th colspan="2">Skrócona metoda</th></tr>
<tr><td rowspan="2">tautologia</td><td rowspan="2">Niemożliwe są fałszywe instancje tego schematu.</td><td rowspan="2">We wszystkich rzędach matrycy instancje tego schematu są prawdziwe.</td><td rowspan="2">Spróbuj znaleźć rząd, gdzie instancje badanego schematu α są fałszywe.</td><td>Jeżeli próba jest nieudana[*], to α jest tautologią.</td></tr>
<tr><td>Jeżeli próba jest udana, to α nie jest tautologią.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">kontrtautologia</td><td rowspan="2">Niemożliwe są prawdziwe instancje tego schematu.</td><td rowspan="2">We wszystkich rzędach matrycy instancje tego schematu są fałszywe.</td><td rowspan="2">Spróbuj znaleźć rząd, gdzie instancje badanego schematu α są prawdziwe.</td><td>Jeżeli próba jest nieudana, to α jest kontrtautologią.</td></tr>
<tr><td>Jeżeli próba jest udana, to α nie jest kontrtautologią.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">logiczne niezdeterminowanie</td><td rowspan="2">Możliwe są zarówno prawdziwe, jak i fałszywe instancje tego schematu.</td><td rowspan="2">Istnieje przynajmniej jeden rząd matrycy, gdzie instancje tego schematu są prawdziwe, oraz przynajmniej jeden rząd, gdzie instancje tego schematu są fałszywe.</td><td rowspan="2">Musisz dokonać dwóch prób:
(a) znalezienia rzędu, gdzie instancje schematu α są prawdziwe,
(b) znalezienia rzędu, gdzie instancje schematu α są fałszywe.</td><td>Jeżeli obie próby są udane, to schemat α jest logicznie niezdeterminowany.</td></tr>
<tr><td>Jeżeli przynajmniej jedna z prób jest nieudana, to schemat α nie jest logicznie niezdeterminowany.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">logiczna równoważność dwóch schematów</td><td rowspan="2">Niemożliwe są różnice wartości logicznych instancji tych schematów.</td><td rowspan="2">We wszystkich rzędach matrycy instancje obu schematów mają tę samą wartość logiczną: są oba fałszywe lub oba prawdziwe.</td><td rowspan="2">Musisz dokonać dwóch prób:
(a) znalezienia rzędu, gdzie instancje schematu α są prawdziwe, a instancje schematu β są fałszywe,
(a) znalezienia rzędu, gdzie instancje schematu α są fałszywe, a instancje schematu β są prawdziwe.</td><td>Jeżeli obie próby są nieudane, to α i β są logicznie równoważne.</td></tr>
<tr><td>Jeżeli przynajmniej jedna z tych prób jest udana, to α i β nie są logicznie równoważne.</td></tr>
</table>

[*] Próba znalezienia rzędu jest nieudana, gdy prowadzi do sprzeczności.

Dodatkowe utrudnienie w zastosowaniu metody zero-jedynkowej stanowi fakt, że możliwe są sytuacje, gdzie zadana wartość logiczna schematu nie określa wartości zmiennych w sposób jednoznaczny. Może to znaczyć, ale nie musi (zależeć to będzie od tego, co chcemy badać), że trzeba będzie wtedy rozważyć więcej niż jedną możliwość.