7. TAUTOLOGIE, KONTRTAUTOLOGIE I SCHEMATY LOGICZNIE NIEZDETERMINOWANE

W rozdziale tym poznamy cztery własności zdań (prawdę logiczną, fałsz logiczny, prawdę przygodną, fałsz przygodny) oraz trzy własności schematów zdaniowych (tautologiczność, kontrtautologiczność i logiczne niezdeterminowanie). Dowiemy się też, jakie relacje zachodzą między tymi własnościami. Zastosujemy poznaną już metodę zero-jedynkową do badania tych własności.

Cele

- Intuicyjne rozróżnienie zdań przygodnie prawdziwych (fałszywych) od zdań logicznie prawdziwych (fałszywych).
- Pojęcia tautologiczności, kontrtautologiczności, logicznego niezdeterminowania schematów zdaniowych.
- Zastosowanie nieskróconej metody zero-jedynkowej dla sprawdzenia, czy dany schemat zdaniowy jest tautologią, kontrtautologią, czy schematem logicznie niezdeterminowanym.
- Pojęcie zdań przygodnie prawdziwych (fałszywych) i zdań logicznie prawdziwych (fałszywych).
- Umiejętność sprawdzenia, czy zdanie jest przygodnie (ew. logicznie) prawdziwe (ew. fałszywe).

7.1. Cztery własności zdań

7.1.1. Zdania prawdziwe przygodnie i logicznie

Każde z poniższych zdań jest prawdziwe:

Zdania przygodnie prawdziwe	**Zdania logicznie prawdziwe**
• W 2005 roku prezydentem RP był mężczyzna. • Niektórzy czytelnicy są znudzeni. • Paryż jest stolicą Francji. • Są róże czerwone, ale nie ma czarnych.	• Albo w 2005 roku prezydentem RP był mężczyzna, albo w 2005 roku prezydentem RP nie był mężczyzna. • Jeżeli cię lubię, to cię lubię. • Albo wszyscy studenci chodzą na zajęcia z logiki, albo nie wszyscy studenci chodzą na zajęcia z logiki.

Wyczuwamy jednak intuicyjnie pewną różnicę między nimi. Mówi się niekiedy – trochę nieściśle – że zdania w prawej kolumnie nie mogłyby być fałszywe, podczas gdy zdania w lewej kolumnie mogłyby być fałszywe. Intuicję tę lepiej jest wyrazić nieco inaczej, a mianowicie, że prawdziwość zdań w prawej kolumnie zdeterminowana jest przez ich strukturę logiczną, podczas gdy prawdziwość zdań w lewej kolumnie nie jest zdeterminowana przez ich strukturę logiczną, a przez fakty – przez to, jak się rzeczy mają w świecie.

Zdania logicznie prawdziwe są prawdziwe ze względu na swoją strukturę logiczną. Co to znaczy? Niech dane będzie pewne logicznie prawdziwe zdanie – weźmy za przykład zdanie o prezydencie RP:

(1) Albo w 2005 roku prezydentem RP był mężczyzna, albo w 2005 roku prezydentem RP nie był mężczyzna.

Otóż każde zdanie, które ma tę samą strukturę logiczną, co zdanie (1), będzie również zdaniem prawdziwym. Jak wiemy z rozdziału 5, strukturę logiczną naszego zdania daje się ująć za pomocą właściwego schematu logicznego danego zdania, czyli formuły o kształcie $p \vee \sim p$. Schemat zdaniowy zdań logicznie prawdziwych określany jest też mianem tautologii. Jakiekolwiek zdania podstawimy pod zmienne w schemacie tautologicznym otrzymamy w rezultacie zdanie prawdziwe. Schemat $p \vee \sim p$ jest schematem tautologicznym, zwanym też prawem wyłączonego środka.

7.1.2. Zdania fałszywe przygodnie i logicznie

Każde z poniższych zdań jest fałszywe:

Zdania przygodnie fałszywe	**Zdania logicznie fałszywe**
• Prezydent Kwaśniewski jest szczupły.	• Kocham Cię i nie kocham Cię.
• Nikt nie lubi logiki.	• Śnieży zawsze i tylko wtedy, gdy nie śnieży.
• Warszawa jest stolicą Francji, a nie Belgii.	• Maria jest znudzona i nie jest znudzona.
• Niektóre róże pachną jak brudne skarpetki.	• Zosia chudnie wtedy i tylko wtedy, gdy nie chudnie.

Ponownie zdania w lewej kolumnie różnią się od zdań w prawej kolumnie – mimo że zdania w obu kolumnach są fałszywe. Otóż różnicę tę można ująć w analogiczny sposób – fałszywość zdań w prawej kolumnie zdeterminowana jest przez ich strukturę logiczną, podczas gdy fałszywość zdań w lewej kolumnie nie jest zdeterminowana przez ich strukturę logiczną, a przez fakty.

Za fałszywość zdania ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły’ odpowiedzialne są fakty, a nie logika. Natomiast fałszywość zdania ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły i prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły’ jest już kwestią logiki, a nie faktów. Każde zdanie, którego schematem jest schemat $p \bullet \sim p$, jest fałszywe. Nieważne, jakie zdanie podstawimy pod zmienną p w schemacie $p \bullet \sim p$ – zawsze i tak otrzymamy zdanie fałszywe. Schemat zdań wyłącznie fałszywych określany jest też mianem kontrtautologii. Oczywiście wartość logiczna zdania składowego zależy od faktów. To, że zdanie składowe ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły’ jest fałszywe, jest zdeterminowane przez to, jak się rzeczy w świecie mają.

Podsumowując, zdania logicznie fałszywe są fałszywe ze względu na swój schemat logiczny. Znaczy to, że każde zdanie, które ma ten sam schemat logiczny, co np. logicznie fałszywe zdanie ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły i prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły’, będzie fałszywe. Schemat zdań logicznie fałszywych określany jest mianem kontrtautologii.

7.2. Tautologie, kontrtautologie i schematy logicznie niezdeterminowane

Zanim wprowadzimy metodę rozróżniania zdań logicznie i przygodnie prawdziwych (fałszywych), musimy odwołać się do własności schematów zdaniowych. Okazuje się bowiem, że:

- zdania logicznie prawdziwe są to zdania o tautologicznych schematach zdaniowych
- zdania logicznie fałszywe są to zdania o kontrtautologicznych schematach zdaniowych
- zdania przygodnie prawdziwe i zdania przygodnie fałszywe są to zdania o logicznie niezdeterminowanych schematach zdaniowych.

Większość zdań, z którymi się spotykamy w życiu codziennym, to zdania, których schematy są logicznie niezdeterminowane, tj. takie, które mają zarówno instancje prawdziwe, jak i fałszywe (§7.2.1). Istnieją jednak schematy zdaniowe, które mają wyłącznie prawdziwe instancje, tzw. tautologie (§7.2.2), a także takie schematy, które mają wyłącznie fałszywe instancje, tzw. kontrtautologie (§7.2.3).

7.2.1. Schematy logicznie niezdeterminowane

Większość zdań, z którymi się spotykamy w życiu codziennym, to zdania, których schematy są logicznie niezdeterminowane, tj. takie, które mają zarówno instancje prawdziwe, jak i fałszywe. Przyjrzyjmy się następującemu schematowi.

Przykład 1

(i) $p \bullet {\sim}q$

Schemat (i) jest logicznie niezdeterminowany. Znaczy to, że ma on zarówno instancje fałszywe, jak i prawdziwe. Przyjrzyjmy się następującym podstawieniom pod zmienną *p* (ramka prostokątna) i pod zmienną *q* (ramka owalna). Za każdym razem określ, czy otrzymana instancja schematu (i) jest prawdziwa czy fałszywa:

Praga jest stolicą Czech	ale nieprawda, że	Lwów jest stolicą Polski	☐ prawdziwe ☐ fałszywe
Żyrafy są gadami	ale nieprawda, że	węże są gadami	☐ prawdziwe ☐ fałszywe
Warszawa jest stolicą Polski	ale nieprawda, że	Berlin jest stolicą Niemiec	☐ prawdziwe ☐ fałszywe
Rekiny są ssakami	ale nieprawda, że	węże są ssakami	☐ prawdziwe ☐ fałszywe

W pierwszym wypadku podstawiliśmy prawdziwe zdanie ‘Praga jest stolicą Czech’ pod zmienną *p*, a fałszywe zdanie ‘Lwów jest stolicą Polski’ pod zmienną *q*. W rezultacie otrzymaliśmy zdanie ‘Praga jest stolicą Czech, ale Lwów nie jest stolicą Polski’, które jest oczywiście zdaniem prawdziwym. Wiemy zatem, że schemat (i) ma przynajmniej jedną instancję prawdziwą. W drugim wypadku podstawiamy fałszywe zdanie ‘Żyrafy są gadami’ pod zmienną *p*, a prawdziwe zdanie ‘Węże są gadami’ pod zmienną *q*. W rezultacie otrzymujemy zdanie ‘Żyrafy są gadami, ale węże nie są gadami’, które jest oczywiście fałszywe. Innymi słowy istnieje przynajmniej jedna fałszywa instancja schematu (i). To wystarczy, żeby wykazać, że schemat (i) jest logicznie niezdeterminowany – ma on przynajmniej jedną instancję prawdziwą i przynajmniej jedną instancję fałszywą. (Dla ciekawych – pozostałe dwa zdania też są fałszywe).

Definicja schematu logicznie niezdeterminowanego

Schemat zdaniowy jest logicznie niezdeterminowany zawsze i tylko wtedy, gdy istnieje przynajmniej jedna prawdziwa instancja tego schematu oraz gdy istnieje przynajmniej jedna fałszywa instancja tego schematu.

Czasem możemy akurat łatwo znaleźć zarówno prawdziwe zdanie będące instancją badanego schematu, jak i fałszywe zdanie będące instancją tegoż schematu. Niekiedy jednak łatwiej jest skonstruować matrycę logiczną dla danego schematu i znaleźć przynajmniej jeden rząd, w którym instancje tego schematu są prawdziwe i przynajmniej jeden rząd, w którym instancje tego schematu są fałszywe.

Operacjonalizacja definicji schematu logicznie niezdeterminowanego

Schemat zdaniowy jest logicznie niezdeterminowany zawsze i tylko wtedy, gdy w matrycy logicznej tego schematu występuje przynajmniej jeden rząd z wartością 1 oraz przynajmniej jeden rząd z wartością 0.

Matryca logiczna przybiera następującą postać (oblicz wartości logiczne w rzędach matrycy; sprawdź z wynikami w *Rozwiązaniach*, s. 343):

p	q	$p \bullet {\sim}q$		
1	1	$1 \bullet {\sim}1$		
1	0	$1 \bullet {\sim}0$		
0	1	$0 \bullet {\sim}1$		
0	0	$0 \bullet {\sim}0$		

Jeżeli dobrze wykonaliście obliczenia, to w rzędzie drugim otrzymaliście 1, a w pozostałych rzędach 0. Schemat (i) jest zatem schematem logicznie niezdeterminowanym – dlatego, że wartość logiczna zdań złożonych powstałych przez podstawienie zdań prostych pod zmienne w tym schemacie *zależy* od tego, jaka jest wartość logiczna podstawianych zdań prostych. Jak zobaczymy, schematy logicznie niezdeterminowane są schematami zarówno zdań przygodnie fałszywych, jak i zdań przygodnie prawdziwych.

Ćwiczenie 7.A

Połącz zdania będące instancjami schematu (i) z odpowiednimi rzędami powyższej matrycy logicznej. Aby to zrobić, zastanów się, jakie są wartości logiczne zdań składowych. (*Rozwiązania*, s. 343).

7.2.2. Schematy tautologiczne

Schematy tautologiczne to schematy cechujące się następującą własnością: jakiekolwiek zdania podstawimy pod zmienne zdaniowe, wszystkie powstałe w ten sposób zdania będą prawdziwe. Przyjrzyjmy się jednej z najprostszych tautologii – tzw. prawu wyłączonego środka.

Przykład 2

(ii) $p \vee \sim p$

W schemacie tym występuje jedna zmienna zdaniowa *p*. Spróbujmy podstawić najpierw zdanie prawdziwe pod *p*.

Rekiny są rybami	lub nieprawda, że	rekiny są rybami	☑ prawdziwe ☐ fałszywe

Podstaw dowolne zdanie prawdziwe pod *p* i stwierdź, czy po podstawieniu otrzymasz zdanie prawdziwe czy fałszywe:

	lub nieprawda, że		☐ prawdziwe ☐ fałszywe

Teraz pomyślmy o jakimś zdaniu fałszywym, np. ‘Rekiny są ssakami’, i podstawmy je w naszą formę tautologiczną:

Rekiny są ssakami	lub nieprawda, że	Rekiny są ssakami	☑ prawdziwe ☐ fałszywe

Otrzymaliśmy w ten sposób ponownie zdanie prawdziwe. Podobnie będzie jeżeli podstawimy jakieś inne zdanie fałszywe pod *p*:

	lub nieprawda, że		☐ prawdziwe ☐ fałszywe

Definicja tautologii

Schemat zdaniowy jest tautologią zawsze i tylko wtedy, gdy wszystkie zdania będące instancjami tego schematu są prawdziwe.

Zwróćmy uwagę, że pojęcie tautologii odnosi się do schematów zdaniowych, ale nie do instancji tych schematów. Tautologiczność jest własnością schematów zdaniowych, a nie zdań będących instancjami tych schematów. Jak zobaczymy, instancje schematów tautologicznych określa się mianem zdań logicznie prawdziwych.

Warto też odnotować, że powyższa definicja tautologii jest nieefektywna (podobnie jak pierwsza definicja logicznej równoważności poznana w rozdziale 6). Nie możemy bowiem sprawdzić wszystkich instancji danego schematu. Możemy jednak definicję tę zoperacjonalizować w poznany już sposób:

Operacjonalizacja definicji tautologii

> Schemat zdaniowy jest tautologią zawsze i tylko wtedy, gdy w każdym rzędzie matrycy logicznej instancje tego schematu są prawdziwe, tj. gdy w każdym rzędzie matrycy logicznej tego schematu otrzymujemy wartość 1.

Zilustrujmy to na przykładzie prawa wyłączonego środka (oblicz wartości logiczne w rzędach matrycy; sprawdź z wynikami w *Rozwiązaniach*, s. 343):

p	$p \vee \sim p$		
1	$1 \vee \sim 1$		
0	$0 \vee \sim 0$		

Jeżeli dobrze wykonaliście obliczenia, to w każdym rzędzie matrycy logicznej schematu $p \vee \sim p$ otrzymaliście wartość 1.

7.2.3. Schematy kontrtautologiczne

Schematy kontrtautologiczne to takie schematy zdaniowe, które po podstawieniu jakichkolwiek zdań pod zmienne zdaniowe generują zawsze zdania fałszywe.

Definicja kontrtautologii

> Schemat zdaniowy jest kontrtautologią zawsze i tylko wtedy, gdy wszystkie instancje tego schematu są fałszywe.

Operacjonalizacja definicji kontrtautologii

> Schemat zdaniowy jest kontrtautologią zawsze i tylko wtedy, gdy w każdym rzędzie matrycy logicznej instancje tego schematu są fałszywe, tj. gdy w każdym rzędzie matrycy logicznej tego schematu otrzymujemy wartość 0.

Przykład 3

(iii) $p \bullet \sim p$

O tym, że schemat zdaniowy (iii) jest kontrtautologią, możemy się przekonać, konstruując matrycę logiczną dla tego schematu zdaniowego (oblicz wartości logiczne w rzędach matrycy; sprawdź z wynikami w *Rozwiązaniach*, s. 343):

p	$p \bullet \sim p$		
1	$1 \bullet \sim 1$		
0	$0 \bullet \sim 0$		

Jeżeli dobrze wykonaliście obliczenia, to w każdym rzędzie matrycy logicznej schematu $p \bullet \sim p$ otrzymaliście wartość 0.

Ćwiczenie 7.B

Podstaw dowolne zdanie pod *p* w schemacie (iii) i przekonaj się, że otrzymana instancja tego schematu będzie fałszywa. (*Rozwiązania*, s. 344).

Ćwiczenie 7.C „tautologie – 1”

Stosując metodę zero-jedynkową, zbadaj, czy następujące schematy zdaniowe są schematami tautologicznymi, kontrtautologicznymi, czy logicznie niezdeterminowanymi. Możesz zastosować skróty. (*Rozwiązania*, s. 345).

(a)

p	$\sim(p \vee \sim p)$	
1		
0		

Schemat ten jest
○ tautologią
○ kontrtautologią
○ logicznie niezdeterminowany

(b)

p	q	$p \rightarrow (p \bullet q)$	
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Schemat ten jest
○ tautologią
○ kontrtautologią
○ logicznie niezdeterminowany

(c)

p	q	$(p \bullet q) \rightarrow p$	
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Schemat ten jest
○ tautologią
○ kontrtautologią
○ logicznie niezdeterminowany

(d)

p	q	$((p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \vee q)$	
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Schemat ten jest
○ tautologią
○ kontrtautologią
○ logicznie niezdeterminowany

(e)

p	q	r	$(p \bullet q) \equiv [((p \bullet r) \bullet q) \vee (p \bullet (\sim r \bullet q))]$	
1	1	1		
1	1	0		
1	0	1		
1	0	0		
0	1	1		
0	1	0		
0	0	1		
0	0	0		

Schemat ten jest ○ tautologią ○ kontrtautologią ○ logicznie niezdeterminowany

Ćwiczenie 7.D „tautologie – 2"

Stosując metodę zero-jedynkową, zbadaj, czy następujące schematy zdaniowe są schematami tautologicznymi, kontrtautologicznymi, czy logicznie niezdeterminowanymi. Możesz zastosować skróty. (*Rozwiązania*, s. 346).

(a) $p \bullet p$

(b) $p \vee p$

(c) $p \rightarrow p$

(d) $\sim p \rightarrow p$

(e) $\sim(p \bullet \sim p)$

(f) $\sim p$

(g) p

(h) $p \rightarrow (p \vee q)$

(i) $(p \vee q) \rightarrow p$

(j) $((p \equiv q) \bullet (p \equiv \sim q)) \rightarrow p$

(k) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(l) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

(m) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$

(n) $(p \rightarrow q) \bullet (p \bullet \sim q)$

(o) $(p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)$

(p) $\sim[(p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)]$

(q) $[(p \equiv q) \equiv r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$

(r) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

7.3. Słynne tautologie

W każdym podręczniku powinna się znaleźć lista słynnych tautologii, więc niniejszym ją załączam. Analizując większość z nich powinniście – po krótkim namyśle – dojść do wniosku, że są bardzo «logiczne». Dotyczy to w szczególności tych tautologii, które mają formę implikacji i równoważności. Ale oczywiście nasze poczucie «logiczności» często nas zawodzi. Dlatego możecie wykorzystać tę listę jako dodatkowe ćwiczenie w zastosowaniu metody zero-jedynkowej, która na pewno nie zawodzi (poprawnie zastosowana oczywiście).

prawo wyłączonego środka	$p \vee \sim p$
prawo wyłączonej sprzeczności (prawo niesprzeczności)	$\sim(p \bullet \sim p)$
prawo podwójnej negacji	$p \equiv \sim\sim p$
prawo idempotentności dla alternatywy	$p \equiv (p \vee p)$
prawo idempotentności dla koniunkcji	$p \equiv (p \bullet p)$
prawo przemienności alternatywy	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
prawo przemienności koniunkcji	$(p \bullet q) \equiv (q \bullet p)$
prawo łączności alternatywy	$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
prawo łączności koniunkcji	$[(p \bullet q) \bullet r] \equiv [p \bullet (q \bullet r)]$
prawo rozdzielności alternatywy wzgl. koniunkcji	$[(p \vee q) \bullet r] \equiv [(p \bullet r) \vee (q \bullet r)]$
prawo rozdzielności koniunkcji wzgl. alternatywy	$[(p \bullet q) \vee r] \equiv [(p \vee r) \bullet (q \vee r)]$
prawo De Morgana dla koniunkcji	$\sim(p \bullet q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
prawo De Morgana dla alternatywy	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \bullet \sim q)$
prawo sylogizmu konstrukcyjnego (*modus ponendo ponens*)	$[(p \rightarrow q) \bullet p] \rightarrow q$

prawo sylogizmu destrukcyjnego (*modus tollendo tollens*)	$[(p \to q) \bullet \sim q] \to \sim p$
prawo sylogizmu alternatywnego (*modus tollendo ponens*)	$[(p \vee q) \bullet \sim q] \to p$
prawo tożsamości dla implikacji	$p \to p$
prawo negacji implikacji	$\sim(p \to q) \equiv (p \bullet \sim q)$
prawo eliminacji implikacji	$(p \to q) \equiv (\sim p \vee q)$
prawo transpozycji prostej	$(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$
prawo transpozycji złożonej	$[(p \bullet q) \to r] \to ((\sim r \bullet p) \to \sim q)$ $[(p \bullet q) \to r] \to ((\sim r \bullet q) \to \sim p)$
prawo eksportacji	$[(p \bullet q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$
prawo importacji	$[p \to (q \to r)] \to [(p \bullet q) \to r]$
prawo komutacji	$[p \to (q \to r)] \to [q \to (p \to r)]$
prawo łączenia	$[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$
prawo rozłączania	$[(p \vee q) \to r] \to [(p \to r) \bullet (q \to r)]$
prawo kompozycji	$[(p \to q) \bullet (p \to r)] \equiv [p \to (q \bullet r)]$
prawo mnożenia implikacji	$[(p \to q) \bullet (r \to s)] \equiv [(p \bullet r) \to (q \bullet s)]$
prawo Fregego	$[p \to (q \to r)] \to [(p \to q) \to (p \to r)]$
prawo sylogizmu hipotetycznego (koniunkcyjne)	$[(p \to q) \bullet (q \to r)] \to (p \to r)$
prawo sylogizmu hipotetycznego (bezkoniunkcyjne)	$(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$
prawo redukcji do absurdu (*reductio ad absurdum*)	$[(p \to r) \bullet (p \to \sim r)] \to \sim p$
prawo dylematu konstrukcyjnego prostego	$\{(p \vee q) \bullet [(p \to r) \bullet (q \to r)]\} \to r$
prawo dylematu konstrukcyjnego złożonego	$\{(p \vee q) \bullet [(p \to r) \bullet (q \to s)]\} \to (r \vee s)$
prawo dylematu destrukcyjnego złożonego	$\{(\sim r \vee \sim s) \bullet [(p \to r) \bullet (q \to s)]\} \to (\sim p \vee \sim q)$
prawo tożsamości dla równoważności	$p \equiv p$
prawo symetrii równoważności	$(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$
prawo łączności równoważności	$[(p \equiv q) \equiv r] \equiv [p \equiv (q \equiv r)]$
prawo eliminacji równoważności I	$(p \equiv r) \equiv [(p \to r) \bullet (r \to p)]$
prawo eliminacji równoważności II	$(p \equiv r) \equiv [(p \bullet r) \vee (\sim p \bullet \sim r)]$
prawo negacji równoważności	$\sim(p \equiv r) \equiv [(p \bullet \sim r) \vee (\sim p \bullet r)]$
prawo symplifikacji dla koniunkcji	$(p \bullet q) \to p$

prawo symplifikacji dla implikacji (prawo charakterystyki prawdy)	$p \to (q \to p)$
prawo Dunsa Szkota I (prawo charakterystyki fałszu)	$\sim p \to (p \to q)$
prawo Dunsa Szkota II	$(p \bullet \sim p) \to q$
prawo Claviusa	$(p \to \sim p) \to p$
prawo pochłaniania dla alternatywy (prawo addycji)	$p \to (p \vee q)$
prawo pochłaniania dla koniunkcji (prawo symplifikacji dla koniunkcji)	$(p \bullet q) \to p$
prawo pełnego pochłaniania alternatywy	$[p \bullet (p \vee q)] \equiv p$
prawo pełnego pochłaniania koniunkcji	$[p \vee (p \bullet q)] \equiv p$
prawo nowego czynnika	$(p \to q) \to [(p \bullet r) \to (q \bullet r)]$
prawo nowego składnika	$(p \to q) \to [(p \vee r) \to (q \vee r)]$

Czy wiesz, że…

Wybitny filozof nauki, Karl R. Popper, zarzucił «tautologiczność» teorii Freuda. Popper twierdził, że nie istnieją takie warunki, w których teoria Freuda mogłaby się okazać fałszywa. Uznał ją za teorię niefalsyfikowalną, a tym samym nienaukową.

Zarzut ten najlepiej zilustrować kluczową dla psychoanalizy tezą Freuda-Breuera. Otóż Breuer poddawał swoich pacjentów cierpiących na objawy neurotyczne hipnozie. Zaobserwował on, że gdy w trakcie hipnozy pacjenci przypominali sobie np. kiedy objawy te wystąpiły po raz pierwszy, wówczas – po wybudzeniu – ustępowały. Freud wysnuł dwie hipotezy. Po pierwsze: za objawy neurotyczne odpowiedzialne są pewne zepchnięte w nieświadomość treści. Po drugie: uświadomienie tych treści prowadzi do ustąpienia objawów neurotycznych.

Obie hipotezy leżą u podstaw dojrzałej psychoanalizy. Wyróżnia ją jednak odejście od hipnozy, którą Freud uznawał za metodę zbyt inwazyjną. Freud szybko się przekonał, że dotarcie do nieświadomości pacjentów napotykało zdecydowany opór. Sformułował w ten sposób trzecią hipotezę: za zepchnięcie pewnych treści w nieświadomość odpowiedzialne są siły represji i to one utrzymują te treści w nieświadomości. Freud szukał metod docierania do nieświadomości, które osłabiałyby też siły represji. Takimi metodami była analiza snów, czynności omyłkowych czy metoda wolnych skojarzeń.

Niestety, właśnie dodanie teorii represji spowodowało, że psychoanaliza znalazła się w przedziwnym położeniu metodologicznym. Załóżmy, że psychoanalityk dochodzi do wniosku, że pewna treść *Ś* leży u podłoża schorzenia neurotycznego pewnego pacjenta *X*. Jeżeli przedstawię treść *Ś* *X*-owi, symptomy neurotyczne *X*-a ustąpią. Przy założeniu, że psychoanalityk istotnie komunikuje *X*-owi treść *Ś*, możliwe są dokładnie dwie sytuacje:

(+) symptomy *X*-a ustapią,
(–) symptomy *X*-a nie ustąpią.

Mogłoby się wydawać, że w wypadku (+) teoria Freuda jest potwierdzona, a w wypadku (–) teoria Freuda zostaje sfalsyfikowana. Jeżeli jednak do psychoanalizy dodana jest teoria represji, to okazuje się, że sytuacja (–) jest również sytuacją, w której teoria Freuda jest potwierdzona. Freud bowiem uzna, że w sytuacji (–) siły represji były tak silne, że jeszcze ciągle utrzymują treść *Ś* w nieświadomości. Teoria Freuda (a przynajmniej kluczowa jej teza) jest niefalsyfikowalna.

7.4. Określanie własności zdań

Rozdział ten rozpoczęliśmy od intuicyjnego rozróżnienia dwóch rodzajów zdań prawdziwych – zdań przygodnie i logicznie prawdziwych, oraz dwóch rodzajów zdań fałszywych – zdań przygodnie i logicznie fałszywych. Zapowiedzieliśmy też, że będziemy mogli zdania te rozróżnić, odwołując się do wiedzy na temat tego, czy schematy zdaniowe reprezentujące te zdania są schematami tautologicznymi, kontrtautologicznymi, czy też logicznie niezdeterminowanymi.

7.4.1. Zdania logicznie prawdziwe i fałszywe

Przykład 4

Powiedzieliśmy, że zdanie:

(1) Albo w 2005 roku prezydentem RP był mężczyzna, albo w 2005 roku prezydentem RP nie był mężczyzna.

jest zdaniem logicznie prawdziwym, tzn. jest nie tylko zdaniem prawdziwym, ale jego prawdziwość zagwarantowana jest jego strukturą logiczną. Jest to bowiem zdanie, którego właściwym schematem logicznym jest tautologia:

$$p \vee \sim p$$

co już wykazaliśmy w §7.2.2.

Definicja zdania logicznie prawdziwego

Zdanie logicznie prawdziwe to zdanie, którego właściwy schemat zdaniowy jest tautologią.

Przykład 5

Powiedzieliśmy wyżej, że zdanie:

(2) Śnieży zawsze i tylko wtedy, gdy nie śnieży.

jest zdaniem logicznie fałszywym, tzn. jest nie tylko zdaniem fałszywym, ale jego fałszywość jest zagwarantowana jego strukturą logiczną. Dzieje się tak dlatego, że schemat zdaniowy reprezentujący to zdanie:

$$p \equiv \sim p$$

jest schematem kontrtautologicznym. Aby to wykazać, wystarczy skonstruować i wypełnić odpowiednią matrycę logiczną (por. *Rozwiązania,* s. 343):

p	$p \equiv \sim p$		
1	$1 \equiv \sim 1$		
0	$0 \equiv \sim 0$		

Definicja zdania logicznie fałszywego

Zdanie logicznie fałszywe to zdanie, którego właściwy schemat zdaniowy jest kontrtautologią.

7.4.2. Zdania przygodnie prawdziwe i fałszywe

Podczas gdy schematy zdań logicznie prawdziwych to tautologie, a schematy zdań logicznie fałszywych to kontrtautologie, to schematy zarówno zdań przygodnie prawdziwych, jak i zdań przygodnie fałszywych są logicznie niezdeterminowane. To właśnie w ten sposób oddana jest nasza intuicja, że struktura logiczna tych zdań (przygodnie prawdziwych i przygodnie fałszywych) nie determinuje wartości logicznej tych zdań – wartość logiczną tych zdań determinuje to, jak się rzeczy w świecie *de facto* mają.

Definicja zdania przygodnie prawdziwego

Zdanie przygodnie prawdziwe to zdanie, które jest prawdziwe, a którego właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany.

Definicja zdania przygodnie fałszywego

Zdanie przygodnie fałszywe to zdanie, które jest fałszywe, a którego właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany.

Przykład 6

Powiedzieliśmy wyżej, że zdanie

(3) Są róże czerwone, ale nie ma róż czarnych.

jest zdaniem przygodnie prawdziwym. Aby to wykazać, musimy wykazać, po pierwsze, że jego właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany oraz, po drugie, że zdanie to jest prawdziwe. Właściwym schematem logicznym zdania (3) jest schemat:

$p \bullet \sim q$

O tym, że jest to schemat logicznie niezdeterminowany, mieliśmy już okazję się przekonać, gdy skonstruowaliśmy jego matrycę logiczną w §7.2.1.

Pozostaje zatem obliczyć rzeczywistą wartość logiczną tego zdania. Aby to zrobić, musimy trafnie rozpoznać zdania proste wchodzące w jego skład oraz określić ich wartość logiczną. Pomocna tu będzie symbolizacja, gdzie w legendzie wymieniamy wszystkie zdania proste:

[3] E • ~A

E: Są róże cz***e***rwone.
A: Są róże cz***a***rne.

Zdanie E jest prawdziwe (bo przecież prawdą jest, że istnieją róże czerwone), zdanie A jest fałszywe (bo przecież nieprawdą jest, że istnieją róże czarne) – możemy zatem łatwo obliczyć wartość logiczną tego zdania:

$1 \bullet \sim 0$
$1 \bullet 1$
1

Zdanie (3) jest *de facto* prawdziwe, co więcej jest ono przygodnie prawdziwe, ponieważ jego właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany.

Przykład 7

Powiedzieliśmy wyżej, że zdanie:

(4) Warszawa jest stolicą Francji, a nie Belgii.

jest zdaniem przygodnie fałszywym, tzn. jest to zdanie *de facto* fałszywe, ale jego fałszywość nie jest podyktowana jego strukturą logiczną, lecz tym, jak się rzeczy w świecie mają. Aby wykazać, że zdanie (4) jest przygodnie fałszywe, musimy wykazać, że jego właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany oraz że zdanie to jest fałszywe. Właściwym schematem logicznym zdania (4) jest ten sam schemat:

$p \bullet \sim q$

o którym wiemy już, że jest logicznie niezdeterminowany na podstawie matrycy logicznej z §7.2.1. Musimy jeszcze wykazać, że zdanie (4) jest *de facto* fałszywe. Zrobimy to w prosty sposób, obliczając wartość logiczną tego zdania na podstawie wartości logicznej zdań prostych. Dwa zdania proste wchodzą w skład zdania (4): ‘Warszawa jest stolicą Francji’ oraz ‘Warszawa jest stolicą Belgii’. Aby to uwypuklić, możemy dokonać symbolizacji zdania (4):

[4] F • ~B

F: Warszawa jest stolicą ***F***rancji.
B: Warszawa jest stolicą ***B***elgii.

Oba zdania proste wchodzące w skład zdania [4] są fałszywe (nieprawdą jest przecież, że Warszawa jest stolicą Francji, tak jak nieprawdą jest, że Warszawa jest stolicą Belgii) – możemy zatem łatwo obliczyć wartość logiczną tego zdania, podstawiając wartości logiczne zdań składowych w schemacie:

0 • ~0
0 • 1
0

Jest to zdanie fałszywe, a ponieważ jego schemat zdaniowy jest logicznie niezdeterminowany, zatem jest to zdanie przygodnie fałszywe.

Podsumowanie

Zwróćmy jeszcze raz uwagę na związki między własnościami schematów zdaniowych a własnościami zdań, które odzwierciedlone zostały w następującej tabeli.

Własności schematów zdaniowych	Własności zdań będących instancjami tych schematów
Tautologiczne	logicznie prawdziwe
Logicznie niezdeterminowane	przygodnie prawdziwe
	przygodnie fałszywe
Kontrtautologiczne	logicznie fałszywe

Należy zwrócić uwagę w szczególności na fakt, że zdania logicznie prawdziwe (ew. logicznie fałszywe) są to zdania, których właściwe schematy logiczne są tautologiami (ew. kontrtautologiami). Natomiast zdania, których właściwe schematy logiczne są logicznie niezdeterminowane, mogą być albo prawdziwe, albo fałszywe – w zależności od tego, jak się rzeczy w świecie mają. Prawdziwość (ew. fałszywość) tych zdań jest wówczas przygodna – odróżniamy ją od prawdziwości (ew. fałszywości) logicznej właśnie dlatego, że o tym, iż są prawdziwe (ew. fałszywe) przesądza to, jak się rzeczy mają w świecie, a nie struktura logiczna zdania.

Ktoś może zapytać, czy nie zapomnieliśmy do drugiej kolumny dopisać jeszcze dwóch własności: prawdziwości i fałszywości (*simpliciter*, tj. bez żadnych poprzedzających przymiotników). Innymi słowy, ktoś taki pyta: Jak się mają własności logicznej prawdziwości i przygodnej prawdziwości do prawdziwości? Otóż każde zdanie prawdziwe jest albo zdaniem logicznie prawdziwym, albo zdaniem przygodnie prawdziwym. Podobnie każde zdanie fałszywe jest albo logicznie, albo przygodnie fałszywe. Jeżeli mówimy o zdaniu po prostu, że jest prawdziwe, to nie tyle przypisujemy mu jakiś trzeci rodzaj prawdziwości, co raczej nie wygłaszamy stanowiska co do rodzaju prawdziwości (czy logicznej, czy przygodnej), jakim zdanie to się charakteryzuje.

7.4.3. Przykłady

Przykład 8

(a) Wykaż, że zdanie ‘Jeżeli Kraków nie jest stolicą Polski, to Kraków nie jest siedzibą rządu RP’ jest zdaniem prawdziwym. (b) Czy jest to zdanie logicznie prawdziwe czy przygodnie prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij, stosując metodą zero-jedynkową.

Pytanie składa się z dwóch części. W części (a) mamy wykazać, że podane zdanie jest zdaniem prawdziwym. Aby nam to było łatwiej zrobić, możemy dokonać symbolizacji danego zdania (choć nie jest to konieczne):

S: Kraków jest ***s***tolicą Polski.
R: Kraków jest siedzibą ***r***ządu RP.

$$\sim S \rightarrow \sim R$$

Musimy się teraz zastanowić, jaka jest wartość logiczna zdań prostych S i R. Czy prawdą jest, że Kraków jest stolicą Polski? Oczywiście nie, a zatem zdanie S jest fałszywe. Czy prawdą jest, że Kraków jest siedzibą rządu RP? Również nie, a zatem zdanie R jest też fałszywe. Podstawiamy więc odpowiednie wartości logiczne pod stałe zdaniowe:

$$\sim 0 \rightarrow \sim 0$$

i obliczamy wartość logiczną całego zdania:

$$1 \rightarrow 1$$
$$1$$

W ten sposób wykazaliśmy, że zdanie to jest prawdziwe.

Aby odpowiedzieć na część (b), tj. na pytanie czy zdanie to jest logicznie czy przygodnie prawdziwe, musimy zrekonstruować jego właściwy schemat logiczny. Właściwym schematem logicznym zdania ‘Jeżeli Kraków nie jest stolicą Polski, to Kraków nie jest siedzibą rządu RP’ jest:

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

Jeżeli schemat ten jest tautologiczny, to zdanie to jest logicznie prawdziwe, a jeżeli jest on logicznie niezdeterminowany, to zdanie to jest przygodnie prawdziwe (wiemy już, że schemat ten nie jest kontrtautologiczny, ponieważ jedna jego instancja jest prawdziwa). Musimy zatem obliczyć wartości logiczne w następującej matrycy logicznej (por. *Rozwiązania*, s. 344).

p	q	$\sim p \rightarrow \sim q$		
1	1	$\sim 1 \rightarrow \sim 1$		
1	0	$\sim 1 \rightarrow \sim 0$		
0	1	$\sim 0 \rightarrow \sim 1$		
0	0	$\sim 0 \rightarrow \sim 0$		

Schemat zdaniowy $\sim q \rightarrow \sim p$ jest ____________________________, ponieważ ___________________
____

Zdanie ‘Jeżeli Kraków nie jest stolicą Polski, to Kraków nie jest siedzibą rządu RP’ jest zdaniem ____________________________ prawdziwym, ponieważ ___________________________________
____.

Przykład 9

(a) Wykaż, że zdanie ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły wtedy i tylko wtedy, gdy prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły’ jest zdaniem fałszywym. (b) Czy jest to zdanie logicznie fałszywe czy przygodnie fałszywe? Odpowiedź uzasadnij, stosując metodą zero-jedynkową.

(a) Ponownie dokonajmy najpierw symbolizacji (por. *Rozwiązania,* s. 344):

S: Prezydent Kwaśniewski jest **s**zczupły.

Ponieważ zdanie S jest zdaniem fałszywym, więc:

W ten sposób wykazaliśmy, że badane zdanie jest fałszywe.

(b) Aby zdecydować, czy badane zdanie jest logicznie czy przygodnie fałszywe musimy zbadać jego właściwy schemat logiczny. Właściwym schematem logicznym zdania ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły dokładnie wtedy, gdy prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły’ jest:

Jeżeli schemat ten jest kontrtautologiczny, to zdanie to jest logicznie fałszywe, a jeżeli schemat logiczny tego zdania jest logicznie niezdeterminowany, to zdanie to jest przygodnie fałszywe (o tym, że nie jest to schemat tautologiczny, przekonaliśmy się już w punkcie (a) – ma on przynajmniej jedną fałszywą instancję). Musimy zatem obliczyć wartości logiczne w następującej matrycy logicznej.

p			
1			
0			

Schemat zdaniowy __________ jest ________________________, ponieważ ___________________
____

Zdanie ‘Prezydent Kwaśniewski jest szczupły dokładnie wtedy, gdy prezydent Kwaśniewski nie jest szczupły’ jest zdaniem ____________________________ fałszywym, ponieważ __________________
____.

Ćwiczenie 7.E „logiczna/przygodna prawda/fałsz”

Zbadaj, czy następujące zdania są (i) prawdziwe czy fałszywe, (ii) czy ich prawdziwość/fałszywość ma charakter przygodny czy logiczny. W odpowiedzi na pytanie (ii) możesz odwołać się do wyników ćwiczeń „tautologie – 1” i „tautologie – 2”. (*Rozwiązania*, s. 346).

(a) Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to Warszawa jest stolicą Polski.
(b) Jeżeli Kraków jest stolicą Polski, to Kraków jest stolicą Polski.
(c) Albo Poznań nie jest stolicą Polski, albo Poznań nie jest stolicą Polski.
(d) Albo Warszawa nie jest stolicą Polski, albo Warszawa nie jest stolicą Polski.
(e) Jeżeli liczba 10 jest podzielna przez 5 i 2, to 10 jest podzielna przez 5.
(f) Jeżeli liczba 10 jest podzielna przez 5, to 10 jest podzielna przez 5 i 2.
(g) Jeżeli albo Warszawa, albo Kraków jest stolicą Polski, to Warszawa jest stolicą Polski.
(h) Jeżeli albo Kraków, albo Warszawa jest stolicą Polski, to Kraków jest stolicą Polski.
(i) Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to albo Warszawa, albo Kraków jest stolicą Polski.
(j) Warszawa jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy ani Kraków, ani Warszawa nie jest stolicą Polski.

7.5. Stwierdzanie własności schematów na podstawie niepełnej informacji

W poniższych przykładach będziemy stosować zmienne α, β, γ przebiegające zbiór schematów zdaniowych, tj. pod te zmienne można podstawić dowolne schematy zdaniowe – w szczególności schematy zdaniowe zdań prostych, np. *p*, *q*, *r* itd., ale również schematy zdaniowe zdań złożonych $p \bullet q$, $\sim p \rightarrow \sim(r \bullet q)$ itd. Stosować też będziemy takie zapisy jak $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$, $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ itd. Wyrażenie '$\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$' znaczy tyle co: schemat alternatywy, której pierwszym członem jest schemat α a drugim członem schemat β. Znaki '$\ulcorner$' i '$\urcorner$' (zwane też cudzysłowami Quine'a) mają nam przypominać m.in., że aby uzyskać schemat zdaniowy będący podstawieniem $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$, trzeba byłoby (być może) schematy będące podstawieniami zmiennych α i β zaopatrzyć w nawiasy.

Przykład 10

Załóżmy, że wszystko, co jest nam dane, to fakt, że pewien schemat zdaniowy α jest tautologią. Pytanie: Czy możemy stwierdzić, że schemat alternatywy, której pierwszym członem jest α, jest tautologią, kontrtautologią lub schematem logicznie niezdeterminowanym?

Zastanówmy się najpierw, co wiemy. Otóż wiemy na pewno, że schemat zdaniowy α jest tautologią. Nie wiemy, co prawda, nic na temat struktury tego schematu – nie wiemy w szczególności z ilu zmiennych się składa, a więc nie wiemy też, ile rzędów ma jego matryca logiczna. Wiemy jedynie, że w każdym rzędzie matrycy logicznej instancje schematu α są prawdziwe. Możemy to schematycznie przedstawić w następujący sposób:

	α	β	$\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$
	:	:	:
i	1		
	:	:	:

Czy możemy zatem stwierdzić, że schemat $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$ jest tautologią, kontrtautologią lub schematem logicznie niezdeterminowanym?

Otóż możemy stwierdzić, że schemat $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$ jest tautologią. Wiemy bowiem, że w każdym rzędzie matrycy logicznej instancje α-y są prawdziwe. Weźmy pod uwagę dowolny rząd *i* matrycy logicznej. Ponieważ instancje α-y w rzędzie *i* są prawdziwe, to instancje schematu alternatywy, której α jest pierwszym członem, też muszą być w tym rzędzie prawdziwe, gdyż alternatywa jest prawdziwa, o ile przynajmniej jeden jej człon jest prawdziwy. Zatem fakt, że nie wiemy, czy w rzędzie *i* instancje schematu β będą prawdziwe czy fałszywe, nie przeszkadza nam w stwierdzeniu, że w rzędzie *i* instancje schematu $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$ będą prawdziwe. Rozumowanie to można przeprowadzić dla każdego rzędu w matrycy logicznej, co pokazuje, że schemat $\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner$ będzie miał tylko prawdziwe instancje, a więc jest tautologią.

Przykład 11

Załóżmy, że wszystko, co jest nam dane, to fakt, że pewien schemat zdaniowy α jest tautologią. Pytanie: Czy możemy stwierdzić, że schemat koniunkcji, której pierwszym członem jest α, jest tautologią, kontrtautologią lub schematem logicznie niezdeterminowanym?

Ponownie wiemy dokładnie to, co wyżej:

	α	β	$\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$
	:	:	:
i	1		
	:	:	:

Czy możemy stwierdzić, że schemat koniunkcji, której pierwszym członem jest α, jest tautologią, kontrtautologią lub schematem logicznie niezdeterminowanym? Zadając to pytanie studentom, często spotykam się z wahaniem. Po namyśle niektórzy są skłonni twierdzić, że koniunkcja $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ będzie logicznie niezdeterminowana, inni natomiast skłaniają się ku odpowiedzi, że nie możemy stwierdzić, czy $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ jest tautologią, kontrtautologią czy schematem logicznie niezdeterminowanym.

W tym wypadku rację ma ta druga grupa osób, ale warto prześledzić rozumowanie grupy pierwszej, by zdać sobie sprawę z pewnego istotnego błędu. Otóż osoby te rozumują tak:

„Wiem, że α jest zawsze prawdziwe. Nie wiem nic o schemacie β – są jednak dwie możliwości: β może być prawdziwe lub fałszywe. Jeżeli β jest prawdziwe, to $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ będzie prawdziwe; jeżeli β jest fałszywe, to $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ będzie fałszywe. Ponieważ $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ może być prawdziwe i może być fałszywe, jest zatem schematem logicznie niezdeterminowanym".

Na czym polega błąd? Otóż błąd bierze się z pozornie błahej sprawy dotyczącej rozróżnienia zdań i schematów zdaniowych oraz ich własności. Zdania – jak pamiętamy – mogą być prawdziwe lub fałszywe. Schematy zdaniowe nie mogą być ani prawdziwe, ani fałszywe! Prawdziwe lub fałszywe mogą być co najwyżej instancje tych schematów. Najważniejszy błąd leży właśnie w drugim zdaniu tego rozumowania – wcale nie jest bowiem tak, że „są jednak dwie możliwości: β może być prawdziwe lub fałszywe". Schemat β nie może być ani prawdziwy, ani fałszywy. Schematy zdaniowe (przypomnijcie sobie!) nic nie stwierdzają – są jedynie zapisem struktury logicznej zdań. Są *trzy* możliwości: schemat β może być albo (a) tautologią, albo (b) kontrtautologią, albo (c) logicznie niezdeterminowany. W postawionym zadaniu, musimy rozważyć te trzy możliwości. Uczyńmy to zatem.

(a) Jeżeli schemat β jest tautologią, wówczas we wszystkich rzędach matrycy logicznej instancje β-y będą prawdziwe.

	α	β	$\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$
	:	:	:
i	1	1	
	:	:	:

Ponieważ wiemy też, że we wszystkich rzędach matrycy logicznej instancje α-y będą prawdziwe (wiemy bowiem, że α jest tautologią), wówczas schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ też będzie miał tylko prawdziwe instancje w każdym rzędzie matrycy logicznej. W takim wypadku – gdy β jest tautologią – tautologią będzie również $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$.

(b) Jeżeli schemat β jest kontrtautologią, wówczas we wszystkich rzędach matrycy logicznej instancje β-y będą fałszywe.

	α	β	$\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$
	:	:	:
i	1	0	
	:	:	:

Ta informacja sama przez się wystarcza do stwierdzenia, że schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ też będzie miał tylko fałszywe instancje w każdym rzędzie matrycy logicznej. Wystarczy bowiem, by jeden człon koniunkcji był fałszywy, żeby fałszywa była cała koniunkcja. W takim wypadku – gdy β jest kontrtautologią – kontrtautologią będzie również schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$.

(c) Jeżeli natomiast schemat β jest logicznie niezdeterminowany, wówczas wiemy, że istnieje w matrycy logicznej przynajmniej jeden rząd (niech to będzie rząd *i*), w którym instancje schematu β są prawdziwe, oraz istnieje przynajmniej jeden rząd (rząd *j*), w którym instancje schematu β są fałszywe.

	α	β	$\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$
	:	:	:
i	1	1	
	:	:	:
j	1	0	
	:	:	:

Ponieważ wiemy też, że we wszystkich rzędach matrycy logicznej instancje α-y będą prawdziwe (wiemy bowiem, że α jest tautologią), możemy stwierdzić, po pierwsze, że w rzędzie *i*, w którym instancje α-y i β-y są prawdziwe, instancje schematu $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ muszą również być prawdziwe; po drugie, że w rzędzie *j*, w którym instancje α-y są prawdziwe, a instancje β-y są fałszywe, instancje schematu $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ muszą być fałszywe. Istnieje zatem przynajmniej jeden rząd w matrycy logicznej (a mianowicie rząd *i*), w którym schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ ma instancje prawdziwe; istnieje też przynajmniej jeden rząd (a mianowicie rząd *j*), w którym schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ ma instancje fałszywe. W takim wypadku – gdy β jest logicznie niezdeterminowany – logicznie niezdeterminowany będzie również schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$.

Wróćmy zatem do pytania postawionego na wyjściu: Czy możemy stwierdzić, że schemat koniunkcji, której pierwszym członem jest tautologia, jest tautologią, kontrtautologią lub schematem logicznie niezdeterminowanym? Otóż nie możemy tego stwierdzić, bowiem to, czy schemat $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ będzie tautologią, kontrtautologią czy logicznie niezdeterminowany, jest bezpośrednio zależne od tego, czy β jest tautologią, kontrtautologią, czy też jest logicznie niezdeterminowany, a tego właśnie nie wiemy.

Przykład 12

Załóżmy, że schemat zdaniowy α jest logicznie niezdeterminowany oraz że schemat zdaniowy β również jest logicznie niezdeterminowany. Pytanie: Czy możemy stwierdzić, że schemat koniunkcji $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$, jest tautologią, kontrtautologią lub schematem logicznie niezdeterminowanym?

Również w tym przypadku można się wahać między (niepoprawną) odpowiedzią, że schemat takiej koniunkcji jest logicznie niezdeterminowany a (poprawną) odpowiedzią, że nie możemy stwierdzić, czy jest to schemat logicznie niezdeterminowany czy może kontrtautologia – możemy stwierdzić jedynie, że schemat ten nie jest tautologiczny.

Jak zawsze jednak warto przyjrzeć się rozumowaniu, które prowadziłoby do błędnej odpowiedzi.

„Wiem, że schemat α jest logicznie niezdeterminowany, tj. istnieje przynajmniej jeden rząd, w którym schemat α jest prawdziwy, i przynajmniej jeden rząd, w którym α jest fałszywy. Wiem to samo o schemacie β – istnieje przynajmniej jeden rząd, w którym β jest prawdziwy, i przynajmniej jeden rząd, w którym β jest fałszywy. Istnieje zatem przynajmniej jeden rząd, w którym zarówno α, jak i β są prawdziwe, a wówczas prawdziwy jest też schemat ich koniunkcji $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$. Istnieje też przynajmniej jeden rząd, w którym zarówno α, jak i β są fałszywe, a wówczas fałszywy jest też schemat ich koniunkcji $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$. Zatem schemat koniunkcji $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany".

Czy widzisz błąd w tym rozumowaniu?

Otóż sytuacja, którą się tutaj przedstawia, istotnie może, ale nie musi, wystąpić. Wyobraźmy sobie dwie sytuacje (a) i (b). W obu sytuacjach (a) i (b) spełnione są warunki postawione w zadaniu – w obu sytuacjach schemat α oraz schemat β są logicznie niezdeterminowane. W sytuacji (a) istnieje przynajmniej jeden rząd, w którym zarówno instancje schematu α, jak i schematu β są prawdziwe; w sytuacji (b) jednak nie istnieje taki rząd. To, czy istnieje rząd, w którym instancje α-y i β-y są prawdziwe, jest kwestią zasadniczą, bo tylko wtedy, gdy taki rząd istnieje, koniunkcja $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ będzie miała prawdziwe instancje. Sprawdź to, uzupełniając wskazane wartości:

(a)

α	β	$\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$
:	:	:
1	1	
:	:	:
1	0	
:	:	:
0	0	
:	:	:

(b)

α	β	$\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$
:	:	:
1	0	
:	:	:
0	1	
:	:	:
1	0	
:	:	:

Zatem nie posiadając wiedzy o tym, jakie jest rozmieszczenie rzędów, w którym instancje schematu α i schematu β są prawdziwe, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy schemat ich koniunkcji jest logicznie niezdeterminowany (sytuacja (a)) czy kontrtautologiczny (sytuacja (b)).

Możemy natomiast dowieść, że koniunkcja dwóch schematów niezdeterminowanych nie może być tautologią. W rzeczy samej już schemat koniunkcji, w której jeden z jej członów jest logicznie niezdeterminowany, nie może być tautologią. Jeżeli schemat α jest logicznie niezdeterminowany, to znaczy, że istnieje przynajmniej jeden rząd, w którym instancje schematu α są fałszywe. Ponieważ fałszywość choćby jednego członu koniunkcji pociąga za sobą fałszywość całej koniunkcji, więc w rzędzie tym instancje schematu $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$ również będą fałszywe. Ta informacja wystarcza, by wykluczyć tautologiczność schematu $\ulcorner \alpha \bullet \beta \urcorner$.

Ćwiczenie 7.F „tautologie – 3”

Wiemy, że schemat α jest tautologią, schemat β jest kontrtautologią, schemat γ jest logicznie niezdeterminowany, a o schemacie ω nie wiemy nic. Czy możemy stwierdzić, że następujące schematy zdaniowe są schematami tautologicznymi, kontrtautologicznymi lub logicznie niezdeterminowanymi? (*Rozwiązania*, s. 347).

(a) $\ulcorner\sim\alpha\urcorner$

(b) $\ulcorner\sim\beta\urcorner$

(c) $\ulcorner\sim\gamma\urcorner$

(d) $\ulcorner\beta \bullet \omega\urcorner$

(e) $\ulcorner\gamma \bullet \omega\urcorner$

(f) $\ulcorner\beta \vee \omega\urcorner$

(g) $\ulcorner\gamma \vee \omega\urcorner$

(h) $\ulcorner\alpha \rightarrow \omega\urcorner$

(i) $\ulcorner\beta \rightarrow \omega\urcorner$

(j) $\ulcorner\gamma \rightarrow \omega\urcorner$

(k) $\ulcorner\omega \rightarrow \alpha\urcorner$

(l) $\ulcorner\omega \rightarrow \beta\urcorner$

(m) $\ulcorner\omega \rightarrow \gamma\urcorner$

Ćwiczenie 7.G „tautologie – 4”

Wiemy, że schemat α jest tautologią, schemat β jest kontrtautologią, schemat γ jest logicznie niezdeterminowany, a o schemacie ω nie wiemy nic. W której sytuacji możemy stwierdzić, czy schemat ω jest schematem tautologicznym, kontrtautologicznym czy logicznie niezdeterminowanym? (*Rozwiązania*, s. 347).

(a) $\ulcorner\sim\omega\urcorner$ jest tautologią

(b) $\ulcorner\sim\omega\urcorner$ jest kontrtautologią

(c) $\ulcorner\sim\omega\urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany

(d) $\ulcorner\alpha \bullet \omega\urcorner$ jest tautologią

(e) $\ulcorner\alpha \bullet \omega\urcorner$ jest kontrtautologią

(f) $\ulcorner\alpha \bullet \omega\urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany

(g) $\ulcorner\beta \bullet \omega\urcorner$ jest kontrtautologią

(h) $\ulcorner\gamma \bullet \omega\urcorner$ jest kontrtautologią

(i) $\ulcorner\gamma \bullet \omega\urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany

(j) $\ulcorner\alpha \rightarrow \omega\urcorner$ jest tautologią

(k) $\ulcorner\alpha \rightarrow \omega\urcorner$ jest kontrtautologią

(l) $\ulcorner\alpha \rightarrow \omega\urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany

(m) $\ulcorner\beta \rightarrow \omega\urcorner$ jest tautologią

(n) $\ulcorner\gamma \rightarrow \omega\urcorner$ jest tautologią

(o) $\ulcorner\gamma \rightarrow \omega\urcorner$ jest logicznie niezdeterminowany

Podsumowanie

Schematy zdaniowe mogą być:

tautologiczne zawsze i tylko wtedy, gdy ich instancje są prawdziwe w *każdym* rzędzie matrycy logicznej;

kontrtautologiczne zawsze i tylko wtedy, gdy ich instancje są fałszywe w *każdym* rzędzie swojej matrycy logicznej;

logicznie niezdeterminowane zawsze i tylko wtedy, gdy ich instancje są prawdziwe w *przynajmniej jednym* rzędzie swojej matrycy logicznej oraz fałszywe w *przynajmniej jednym* rzędzie swojej matrycy logicznej.

Zdania mogą być:

przygodnie prawdziwe zawsze i tylko wtedy, gdy są prawdziwe, a ich właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany;

logicznie prawdziwe zawsze i tylko wtedy, gdy ich właściwy schemat logiczny jest tautologiczny (skąd wynika, że są prawdziwe);

przygodnie fałszywe zawsze i tylko wtedy, gdy są fałszywe, a ich właściwy schemat logiczny jest logicznie niezdeterminowany;

logicznie fałszywe zawsze i tylko wtedy, gdy ich właściwy schemat logiczny jest kontrtautologiczny (skąd wynika, że są fałszywe).