6. RÓWNOWAŻNOŚĆ LOGICZNA

W rozdziale tym wprowadzimy pojęcie równoważności logicznej oraz metodę jej sprawdzania za pomocą matryc logicznych. Wprowadzimy też ważne, choć pozornie ulotne rozróżnienie między zdaniami a schematami zdaniowymi.

Cele

- ❍ Rozróżnienie zdania i schematu zdaniowego.
- ❍ Umiejętność podania właściwego schematu logicznego dla dowolnego zdania.
- ❍ Umiejętność podania właściwego schematu logicznego dla dowolnej pary zdań.
- ❍ Umiejętność skonstruowania podstawy matrycy logicznej dla schematu zdaniowego o dowolnej liczbie zmiennych.
- ❍ Umiejętność określenia, czy dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne, za pomocą nieskróconej metody zero-jedynkowej.

6.1. Równoważność logiczna a tożsamość wartości logicznych

Pojęcie równoważności logicznej wprowadziliśmy już na poziomie intuicyjnym w rozdziale 3, gdzie mówiliśmy o tym, że zdania można symbolizować na logicznie równoważne sposoby. Intuicyjnie – zdania równoważne mówią to samo. Przyjrzymy się teraz równoważności logicznej par zdań w sposób systematyczny.

Można byłoby przypuszczać, że zdania logicznie równoważne to zdania o takiej samej wartości logicznej. Istotnie wszystkie pary zdań logicznie równoważnych mają tę samą wartość logiczną. Jednak posiadanie takiej samej wartości logicznej przez parę zdań nie jest, niestety, warunkiem wystarczającym dla ich logicznej równoważności. Istnieją logicznie nierównoważne pary zdań, które mają tę samą wartość logiczną.

Rozważmy na początek parę zdań:

(1)	Teoria ***D***arwina i teoria ***L***amarcka nie są obie prawdziwe.	$\sim(D \bullet L)$
(2)	Prawdziwa jest albo teoria ***D***arwina, albo teoria ***L***amarcka.	$D \vee L$

Czy są to zdania logicznie równoważne?

Otóż nie są to zdania logicznie równoważne (powinniście pamiętać, że zdanie (1) jest równoważne zdaniu ‘Fałszywa jest albo teoria Darwina, albo teoria Lamarcka’). Jednakże przy obecnym stanie wiedzy (wedle której teoria Darwina jest teorią prawdziwą, a teoria Lamarcka teorią fałszywą), oba te zdania mają taką samą wartość logiczną – oba są prawdziwe:

$\sim(D \bullet L)$	$D \vee L$
$\sim(1 \bullet 0)$	$1 \vee 0$
$\sim(0)$	1
1	

Dlaczego więc twierdzimy, że te zdania nie są logicznie równoważne, jeżeli mają dokładnie taką samą wartość logiczną?

Okazuje się bowiem, że taka sama wartość logiczna dwóch zdań nie wystarcza dla ich logicznej równoważności. Czasem mówi się, że dwa zdania są logicznie równoważne zawsze i tylko wówczas, gdy nie tylko nie różnią się wartościami logicznymi, ale *nie mogą* różnić się wartościami logicznymi. Takie sformułowanie jest trochę mylące – jak za chwilę zobaczymy – ale w ten sposób myśląc, musielibyśmy powiedzieć, że zdania (1) i (2) mogą różnić się wartościami logicznymi. Aby to wykazać, musimy podać tzw. kontrprzykład, a więc zdania o takiej samej strukturze logicznej, co (1) i (2), ale różniące się wartościami logicznymi.

Oto taki kontrprzykład:

(3) Teorie ewolucji ***E***mpedoklesa i ***L***amarcka nie są obie prawdziwe. ~(E • L)
(4) Prawdziwa jest albo teoria ***E***mpedoklesa, albo teoria ***L***amarcka. E ∨ L

~(E • L)	E ∨ L
~(0 • 0)	0 ∨ 0
~(0)	0
1	

Kontrprzykład ten wystarcza, aby pokazać, iż dowolna para zdań o strukturze logicznej zdań (1) i (2) nie jest parą zdań logicznie równoważnych.

Przykład ten pokazuje też, że pojęcie logicznej równoważności w sposób kluczowy odwołuje do pojęcia *struktury logicznej* zdań. Dlatego też zanim przejdziemy do pojęcia logicznej równoważności, musimy wprowadzić pojęcie *właściwego schematu logicznego*, który pozwala logikom na ujęcie struktury logicznej zdania.

6.2. Schematy zdaniowe

W rozdziale 1 poznaliśmy pojęcie zdania w sensie logicznym, tj. zdania posiadającego wartość logiczną. W §6.1 widzieliśmy, że w logice ważne jest też pojęcie struktury logicznej. Pojęcie schematu zdaniowego wprowadzono właśnie po to, by móc mówić w sposób systematyczny i ścisły o strukturze logicznej zdań.

6.2.1. Schematy zdaniowe

Dokonując symbolizacji zdań przypisywaliśmy zdaniom prostym pewne stałe zdaniowe i następnie oddawaliśmy takie zdanie w języku logiki zdań. Na przykład zdanie:

(1) Jeżeli róże pachną jak brudne skarpetki, to Jan kupi goździki, a jeżeli róże nie pachną jak brudne skarpetki, to Jan kupi róże.

oddamy jako:

[1] (B → G) • (~B → R)

B: Róże pachną jak ***b***rudne skarpetki.
G: Jan kupi ***g***oździki.
R: Jan kupi ***r***óże.

Jak pamiętamy, każde zdanie w sensie logicznym ma wartość logiczną – jest albo prawdziwe, albo fałszywe.

Dokonajmy symbolizacji innego zdania:

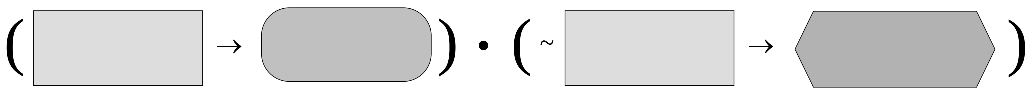
(2) Jeżeli Giertych wprowadzi nakaz noszenia mundurków, to Zosia wyemigruje, a jeżeli Giertych nie wprowadzi nakazu noszenia mundurków, to Zosia będzie nadal chodzić do swojej szkoły.

oddamy jako:

[2] (M → W) • (~M → S)

M: Giertych wprowadzi nakaz noszenia ***m***undurków.
S: Zosia będzie nadal chodzić do ***s***wojej szkoły.
W: Zosia ***w***yemigruje.

Te dwa różne zdania mają identyczną strukturę logiczną, którą możemy przedstawić za pomocą ramek:



Zwróćcie uwagę, że potrzeba tym razem trzech rodzajów ramek. Zamiast korzystać z graficznie uciążliwych ramek, możemy skorzystać z graficznie zgrabnych zmiennych i oddać strukturę logiczną tych dwóch zdań za pomocą schematu zdaniowego, tj. formuły logicznej złożonej ze stałych logicznych (tu: spójników zdaniowych i nawiasów) oraz zmiennych zdaniowych zgodnie z regułami konstrukcji:

(i) $(p \to q) \bullet (\sim p \to r)$

Mówimy, że schemat zdaniowy (i) jest (*właściwym*) ***schematem logicznym*** zdania (1) i (2), a zdania (1) i (2) są (*właściwymi*) ***instancjami*** (podstawieniami) schematu (i). Oczywiście każdy schemat zdaniowy (i) ma ogromną liczbę właściwych instancji (liczba ta jest ograniczona tylko możliwościami danego języka).

Ćwiczenie 6.A „instancje właściwe"

Podaj po dwa zdania języka polskiego będące (właściwymi) instancjami następujących schematów zdaniowych. (*Rozwiązania*, s. 338-339).

(a) $p \to q$

(b) $p \to (q \vee r)$

(c) $(p \bullet q) \to r$

(d) $(p \to q) \bullet \sim q$

(e) $(p \to q) \bullet (\sim p \to r)$

(f) $(p \to \sim q) \bullet (q \to \sim p)$

(g) $[(p \to r) \bullet (q \to r)] \to [(p \vee q) \to r]$

6.2.2. Właściwy schemat logiczny zdania

Schemat zdaniowy (i) jest jednocześnie ***właściwym schematem logicznym*** zdania (1) i zdania (2). Pojęcie właściwego schematu logicznego danego zdania możemy rozumieć intuicyjnie jako taki schemat zdaniowy, który oddaje dokładnie strukturę logiczną danego zdania. Najprościej rzecz ujmując: właściwy schemat logiczny danego zdania powstaje przez uzmiennienie wszystkich zdań prostych w zdaniu wyjściowym przy zachowaniu dwóch warunków: (a) wszystkie wystąpienia danego zdania prostego uzmiennione zostają tą samą zmienną, a (b) różne zdania proste uzmiennione zostają za pomocą różnych zmiennych.

Niech dany będzie następujący schemat zdaniowy:

(ii) $(p \to q) \bullet (\sim p \to \sim q)$

Schemat ten jest właściwym schematem logicznym następujących zdań:

[3] (L → C) • (~L → ~C)
[4] (M → N) • (~M → ~N)
[5] (A → B) • (~A → ~B)

Schemat (ii) *nie* jest właściwym schematem logicznym następujących zdań:

[6] (L ∨ C) • (~L ∨ ~C)	ponieważ schemat (ii) i zdanie [6] różnią się stałymi logicznymi (spójnikami logicznymi występującymi w nawiasach)
[7] L → (C • (~L → ~C))	ponieważ schemat (ii) i zdanie [7] różnią się stałymi logicznymi (ułożeniem nawiasów)
[8] (C → D) • (~D → ~C)	ponieważ pogwałcony jest warunek (a)
[9] (A → A) • (~A → ~A)	ponieważ pogwałcony jest warunek (b)

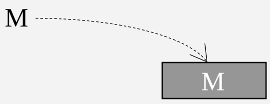
Stałe zdaniowe *vs* zmienne zdaniowe

Zmienne zdaniowe oznaczamy małymi literami ze środka alfabetu, zwyczajowo: p, q, r, . . . Stałe zdaniowe oznaczamy wielkimi literami alfabetu A, B, C, . . .

Stałe zdaniowe *zastępują* konkretne zdania języka naturalnego. Zamiast pisać ‘Misia ma kota’ wolno nam zastąpić to długie zdanie symbolem ‘M’ pod warunkiem, że w legendzie umieścimy stosowną informację, którą zapisujemy ‘M: Misia ma kota’.

Zmienne zdaniowe natomiast nie zastępują konkretnych zdań. Za zmienne zdaniowe wolno *podstawiać* dowolne zdania. Najlepiej jest o zmiennych myśleć jak o «ramkach», do których «wskakują» poszczególne zdania. Zmienna p to nie jakieś konkretne zdanie, lecz właśnie «ramka»

w której może się znaleźć jakieś konkretne zdanie, np. zdanie M:



Należy zwrócić uwagę, że ponieważ każda stała zdaniowa jest związana z konkretnym zdaniem, jest też związana z pewną wartością logiczną. Zmienne zdaniowe natomiast nie mają żadnej wartości logicznej.

Ćwiczenie 6.B „właściwy schemat logiczny – 1”

Podaj właściwy schemat logiczny dla następujących zdań. (*Rozwiązania*, s. 339).

(a) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(b) $A \rightarrow (A \rightarrow B)$

(c) $(A \rightarrow B) \rightarrow A$

(d) $(A \vee B) \rightarrow (\sim A \equiv \sim B)$

(e) $\sim(A \bullet \sim(B \rightarrow \sim\sim C))$

(f) A

(g) $(A \vee B) \bullet (A \vee C)$

(h) $(A \bullet B) \vee (C \bullet B)$

Ćwiczenie 6.C „właściwy schemat logiczny – 2”

Połącz zdania z ich właściwymi schematami logicznymi. (*Rozwiązania*, s. 339-340).

Jeżeli Anna zda logikę, to albo się zaręczy, albo znajdzie sobie innego chłopaka.	Jeżeli Anna zda logikę, to nie będzie potrzebowała ani pomocy, ani miłości Antka.	Jeżeli Anna nie zda logiki, to będzie pisać poprawkę, a jeśli zda, to nie będzie pisać poprawki.	Jeżeli Anna nie zda logiki, to jej chłopak Antek zrobi wszystko, co będzie mógł, żeby jej w logice pomóc; a Anna nie zda logiki.
$p \rightarrow (\sim q \bullet \sim r)$	$(\sim p \rightarrow q) \bullet \sim p$	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(\sim p \rightarrow q) \bullet (p \rightarrow \sim q)$
Jeżeli Staszek kupi herbatę, to nie starczy mu pieniędzy ani na ciastko, ani na orzeszki.	Jeżeli Staszek nie kupi herbaty, to będzie musiał pić kawę, a jeśli kupi herbatę, to nie będzie musiał pić kawy.	Jeżeli Staszek kupi herbatę, to wypije ją albo rano, albo o piątej po południu.	Jeżeli Staszek nie kupi herbaty, to będzie musiał pić kawę; a Staszek nie kupił herbaty.

Jeżeli 10 jest podzielne przez 5, to 10 jest podzielne przez 1 i 2.	Jeżeli 20 jest podzielne przez 5, to jeśli 40 jest wynikiem mnożenia 20 przez 2, to 40 jest podzielne przez 5.	Albo 10 jest podzielne przez 2, albo 10 nie jest podzielne przez 2, lecz przez 1.	10 jest podzielne przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy 10 jest wynikiem mnożenia 5 przez pewną liczbę.
$p \vee (\sim p \bullet q)$	$p \equiv q$	$p \rightarrow (q \bullet r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Jeżeli posiejesz nasionko, to o ile będziesz o nie dbać, to będziesz się cieszyć piękną roślinką.	Jeżeli mocno grzmi, to zwykle pada deszcz i grad.	Kawa jest dobra wtedy, ale tylko wtedy, gdy jest zabielona mlekiem.	Kacper albo dostanie psa, albo nie dostanie psa, lecz kota.

6.2.3. Właściwy schemat logiczny pary zdań

Mówiąc o logicznej równoważności, będziemy zawsze mówić o parze zdań i odpowiednio wprowadzić musimy pojęcie właściwego schematu logicznego pary zdań, które jest uogólnieniem dotychczas wprowadzonego pojęcia. Należy po prostu pamiętać o tym, że zdania proste występujące w obu zdaniach należy uzmienniać tą samą zmienną. Ściślej: właściwy schemat logiczny pary zdań składa się z dwóch schematów zdaniowych powstałych przez uzmiennienie wszystkich zdań prostych w parze zdań wyjściowych przy zachowaniu dwóch warunków: (a) wszystkie wystąpienia danego zdania prostego (w obydwu zdaniach wyjściowych) uzmiennione zostają tą samą zmienną, a (b) różne zdania proste (w obydwu zdaniach wyjściowych) uzmiennione zostają za pomocą różnych zmiennych.

Weźmy pod uwagę parę zdań:

(1) Jeżeli ***p***ada, to niebo jest ***z***achmurzone. $P \to Z$
(2) Jeżeli niebo nie jest zachmurzone, to nie pada. $\sim Z \to \sim P$

Otóż właściwym schematem logicznym tej pary zdań jest para schematów:

$p \to r$
$\sim r \to \sim p$

Błędem byłoby natomiast uznać parę schematów:

$p \to r$
$\sim p \to \sim r$

za właściwy schemat logiczny pary zdań (1)-(2): wszakże poprzednikiem zdania (2) winna być negacja następnika zdania (1), a następnikiem zdania (2) – negacja poprzednika zdania (1).

Ćwiczenie 6.D „właściwe schematy logiczne par zdań – 1”

Podaj właściwy schemat logiczny dla następujących par zdań. (*Rozwiązania*, s. 340).

(a)	$A \to B$ $B \lor \sim A$	
(b)	$A \to B$ $A \lor \sim B$	
(c)	$(A \bullet B) \to C$ $\sim C \lor \sim A$	
(d)	$(A \to B) \to A$ $\sim A \equiv \sim B$	
(e)	$A \to (B \to A)$ $B \to (C \bullet A)$	
(f)	$\sim(A \lor \sim(B \to \sim C))$ $\sim B$	
(g)	$(A \bullet B) \to (\sim A \equiv \sim B)$ $C \to (\sim B \to \sim A)$	

6.2.4. Schematy zdaniowe a zdania

Podsumowując, w logice zdań wyróżniamy dwa rodzaje formuł logicznych: zdania oraz schematy zdaniowe.

formuły logiczne

zdania	schematy zdaniowe
np. (A → B) → (~B → ~A)	np. ($p \to q$) → (~$q \to$ ~p)

Zdania to formuły złożone ze stałych zdaniowych, symboli spójników oraz nawiasów według reguł poprawnej konstrukcji zdań. Schematy zdaniowe to formuły złożone ze zmiennych zdaniowych, symboli spójników oraz nawiasów według reguł poprawnej konstrukcji zdań.

Zdania coś stwierdzają i mają wartość logiczną: są albo prawdziwe, albo fałszywe.
Schematy zdaniowe *nic* nie stwierdzają i nie mają wartości logicznej – nie są ani prawdziwe, ani fałszywe.

Ponieważ zdania i schematy zdaniowe wyglądają podobnie, bardzo łatwo je ze sobą pomylić. Dlatego powinniście wyrobić sobie nawyk widzenia formuły

$p \to (\sim q \bullet p)$

od razu w zapisie ramkowym

który należałoby przeczytać

Jeżeli *hmm-hmm*, to zarówno nie *heh-heh*, jak i *hmm-hmm*.

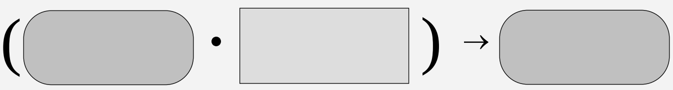
Mam nadzieję, że zgodzicie się, iż nie zostało tu powiedziane nic prawdziwego czy fałszywego, bo nic po prostu nie zostało powiedziane. Tyle właśnie «mówi» schemat zdaniowy.

Zmienne zdaniowe nie są stałymi zdaniowymi

Czym różni się schemat zdaniowy $(p \bullet q) \to p$ od schematu zdaniowego $(r \bullet s) \to r$?

Prawidłowa odpowiedź na to pytanie brzmi „niczym”. W tych dwóch zapisach oddany jest jeden i ten sam schemat zdaniowy, a mianowicie schemat implikacji, której poprzednikiem jest koniunkcja, a następnikiem pierwszy człon tejże koniunkcji.

O tym, że te dwie formuły oddają jeden i ten sam schemat zdaniowy, najłatwiej się przekonać w zapisie ramkowym:



Ramki nazywać można dowolnymi zmiennymi. Zatem schemat ten może być zapisany na wiele różnych sposobów:

$(p \bullet q) \to p$
$(q \bullet p) \to q$
$(p \bullet r) \to p$
$(r \bullet p) \to r$

I tak dalej.

6.3. Logiczna równoważność: metoda zero-jedynkowa

W naszych wstępnych rozważaniach o równoważności logicznej w §6.1 powiedzieliśmy, że taka sama wartość logiczna dwóch zdań nie jest warunkiem wystarczającym dla określenia ich logicznej równoważności. Niekiedy mówi się nieściśle, że dwa zdania są logicznie równoważne zawsze i tylko wówczas, gdy nie tylko nie różnią się wartościami logicznymi, ale *nie mogą* różnić się wartościami logicznymi. Teraz możemy zrozumieć, dlaczego było to sformułowanie mylące – otóż każde zdanie w sensie logicznym ma ściśle określoną wartość logiczną. Zdanie 'Nieprawda, że zarówno Poznań, jak i Warszawa leżą nad Wartą' jest po prostu prawdziwe i dziwne jest odwoływanie się do jakichś możliwości przyjęcia przez *to* zdanie innej wartości logicznej. Takie nieścisłe myśli dotyczące logicznej równoważności można ująć w sposób ściślejszy, rozbijając je na dwa twierdzenia: jedno dotyczące logicznej równoważności zdań, a drugie – logicznej równoważności schematów zdaniowych.

Dwa zdania są równoważne logicznie zawsze i tylko wtedy, gdy logicznie równoważne są schematy zdaniowe stanowiące właściwy schemat logiczny tej pary zdań.
Dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne zawsze i tylko wtedy, gdy niemożliwe jest, by zdania będące instancjami tych schematów zdaniowych różniły się wartością logiczną.

6.3.1. Problem nieefektywności definicji równoważności

Definicja logicznej równoważności dwóch schematów zdaniowych wydaje się beznadziejna w praktyce. Może się nam co prawda udać znaleźć kontrprzykład (tak jak udało się nam to zrobić w §6.1) – tj. taką parę zdań, które są instancjami rozważanych schematów, a różnią się wartością logiczną – i wtedy wiemy na pewno, że schematy te nie są logicznie równoważne.

Gorzej sprawy się mają ze stwierdzeniem, że dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne. Wydawać by się mogło, że aby to stwierdzić, musielibyśmy rozważyć wszystkie pary zdań będące instancjami tych schematów zdaniowych i za każdym razem stwierdzać, czy zdania te różnią się wartością logiczną, czy nie. Innymi słowy, aby stwierdzić, że schematy zdaniowe:

(i) $\sim(p \bullet q)$
(ii) $\sim p \vee \sim q$

są logicznie równoważne, musielibyśmy rozważyć pary zdań będące instancjami tych schematów, np.:

Nieprawda, że Poznań i Warszawa leżą nad Wartą.
Albo Poznań nie leży nad Wartą, albo Warszawa nie leży nad Wartą.

Nieprawda, że Kraków i Warszawa leżą nad Wartą.
Albo Kraków nie leży nad Wartą, albo Warszawa nie leży nad Wartą.

Nieprawda, że Kraków i Gdańsk leżą nad Wartą.
Albo Kraków nie leży nad Wartą, albo Gdańsk nie leży nad Wartą.

Nieprawda, że teorie ewolucji Empedoklesa i Lamarcka są prawdziwe.
Fałszywa jest teoria ewolucji Empedoklesa lub Lamarcka.

Nietrudno zgadnąć, że zdań będących instancjami tych schematów jest bardzo wiele. W zależności od możliwości języka może ich być nieskończenie wiele (wszakże zdania podstawiane pod zmienne mogą być bardzo skomplikowane). Już sam ten fakt powinien wzbudzić uzasadniony sceptycyzm co do tego, że w ogóle moglibyśmy kiedykolwiek stwierdzić, że dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne. Jeżeli jeszcze dodamy fakt, że wartość logiczna zdań może być przedmiotem kontrowersji, jak np.:

> Nieprawda, że historycy IPN są zarówno rzetelni, jak i obiektywni.
> Albo historycy IPN są nierzetelni, albo nieobiektywni.

to prawie docieramy do punktu, gdzie sceptycyzm względem możliwości stwierdzenia, że dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne, może się wydać jedynie słusznym stanowiskiem.

O definicji, która nie daje metody rozstrzygnięcia, mówi się, że jest nieefektywna. Powyższa definicja logicznej równoważności jest nieefektywna.

6.3.2. Matryce logiczne jako rozwiązanie problemu nieefektywności

Im bardziej jesteśmy skłonni popaść w czarną rozpacz, tym bardziej genialne powinno się nam wydać rozwiązanie problemu nieefektywności definicji logicznej równoważności, na które wpadli logicy – gryząc nasz sceptycyzm w nos. Otóż kluczowe jest uświadomienie sobie, że przecież tak naprawdę interesują nas wartości logiczne podstawianych zdań, a nie same te zdania. A wartości logiczne zdań złożonych w logice zdań są ściśle określone przez wartości logiczne zdań prostych. Zamiast rozważać potencjalnie nieskończoną klasę par zdań będących instancjami schematów (i)-(ii), można rozważyć tylko cztery klasy par zdań:

(a) w których zdania podstawiane pod p i q są prawdziwe,
(b) w których zdania podstawiane pod p są prawdziwe, a zdania podstawiane pod q są fałszywe,
(c) w których zdania podstawiane pod p są fałszywe, a zdania podstawiane pod q są prawdziwe,
(d) w których zdania podstawiane pod p i q są fałszywe.

Oczywiście każda z tych klas może być potencjalnie nieskończona. Nas nie interesują jednak konkretne zdania, lecz zależności logiczne, które w każdym z tych przypadków możemy obliczyć.

W sytuacji (a) możemy obliczyć wartość logiczną wszystkich zdań będących instancjami pod schematy (i)-(ii), w których zdania podstawiane pod p i q są prawdziwe:

$\sim(p \bullet q)$ $\quad \sim(1 \bullet 1)$ stąd $\sim(1)$ stąd $\boxed{0}$ $\qquad \sim p \vee \sim q$ $\quad \sim 1 \vee \sim 1$ stąd $0 \vee 0$ stąd $\boxed{0}$

W sytuacji (b) możemy obliczyć wartość logiczną wszystkich zdań będących instancjami pod schematy (i)-(ii), w których zdania podstawiane pod p są prawdziwe, a zdania podstawiane pod q są fałszywe:

$\sim(p \bullet q)$ $\quad \sim(1 \bullet 0)$ stąd $\sim(0)$ stąd $\boxed{1}$ $\qquad \sim p \vee \sim q$ $\quad \sim 1 \vee \sim 0$ stąd $0 \vee 1$ stąd $\boxed{1}$

W sytuacji (c) możemy obliczyć wartość logiczną wszystkich zdań będących instancjami pod schematy (i)-(ii), w których zdania podstawiane pod p są fałszywe, a zdania podstawiane pod q są prawdziwe:

$\sim(p \bullet q)$ $\quad \sim(0 \bullet 1)$ stąd $\sim(0)$ stąd $\boxed{1}$ $\qquad \sim p \vee \sim q$ $\quad \sim 0 \vee \sim 1$ stąd $1 \vee 0$ stąd $\boxed{1}$

W sytuacji (d) możemy obliczyć wartość logiczną wszystkich zdań będących instancjami pod schematy (i)-(ii), w których zdania podstawiane pod p i q są fałszywe:

$\sim(p \bullet q)$ $\quad \sim(0 \bullet 0)$ stąd $\sim(0)$ stąd $\boxed{1}$ $\qquad \sim p \vee \sim q$ $\quad \sim 0 \vee \sim 0$ stąd $1 \vee 1$ stąd $\boxed{1}$

Teraz widzimy już, że w każdym z czterech możliwych podstawień uzyskujemy w końcu tę samą wartość logiczną dla instancji obu schematów. W ten sposób można wykazać, że schematy (i) i (ii) są logicznie równoważne.

Aby skrócić sobie zapis, stosuje się matryce logiczne, które ten tok rozumowania uosabiają. Matryca logiczna dla określenia logicznej równoważności dwóch zdań składa się z trzech części: podstawy oraz matryc dla obu schematów.

podstawa matryca schematu I matryca schematu II

p	q	$\sim(p \bullet q)$			$\sim p \vee \sim q$		
1	1	$\sim(1 \bullet 1)$			$\sim 1 \vee \sim 1$		
1	0	$\sim(1 \bullet 0)$			$\sim 1 \vee \sim 0$		
0	1	$\sim(0 \bullet 1)$			$\sim 0 \vee \sim 1$		
0	0	$\sim(0 \bullet 0)$			$\sim 0 \vee \sim 0$		

kolumny obliczeń

kolumna podstawień kolumna wartości

Podstawa matrycy pokazuje wszystkie możliwe podstawienia wartości logicznych pod zmienne – w jednym rzędzie znajduje się jedno możliwe podstawienie. Ile możliwych podstawień – a więc również ile rzędów – powinno się znaleźć w podstawie matrycy, zależy od liczby zmiennych w badanej parze schematów zdaniowych. Dla n zmiennych, liczba rzędów określona jest formułą 2^n. Dla 1 zmiennej podstawa będzie miała $2^1 = 2$ rzędy, dla dwóch zmiennych – $2^2 = 4$ rzędy, dla trzech zmiennych – $2^3 = 8$ rzędów itd. Kolejność wymieniania wszystkich możliwych podstawień jest teoretycznie dowolna, ale w praktyce skonwencjonalizowana, co pozwala uniknąć zbędnych błędów (por. też §6.4).

Matryca dla danego schematu składa się z trzech typów kolumn. Pierwsza kolumna to kolumna podstawień, gdzie wartości logiczne przyjmowane przez zmienne w danym rzędzie są podstawiane w danym schemacie. Jest to też kolumna, gdzie najprościej popełnić niemądre błędy. Ostatnia kolumna to kolumna możliwych wartości logicznych dla danego schematu, czyli w skrócie kolumna wartości. Między kolumną podstawień a kolumną wartości znajdują się kolumny obliczeń – tyle ile potrzeba dla danego schematu.

Najważniejszą kolumną w matrycy logicznej dla danego schematu zdaniowego jest kolumna wartości. Jeżeli kolumny wartości matryc logicznych dwóch schematów zdaniowych są identyczne (w każdym rzędzie matrycy mają te same wartości logiczne), mówimy, że te schematy zdaniowe mają identyczne matryce logiczne (nawet jeżeli kolumny podstawień i obliczeń różnią się między sobą). I odwrotnie: jeżeli kolumny wartości matryc logicznych dla dwóch schematów zdaniowych różnią się (przynajmniej w jednym rzędzie matrycy mają różne wartości logiczne), mówimy, że te schematy zdaniowe mają różne matryce logiczne.

Czy wiesz, że . . .

Pewne spójniki logiczne można definiować za pomocą innych spójników logicznych. Na przykład spójnik równoważności można zdefiniować za pomocą spójnika koniunkcji i spójnika implikacji, co jest ugruntowane w logicznej równoważności schematu $p \equiv q$ z jednej strony oraz schematu $(p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p)$ z drugiej. Z kolei spójnik implikacji można zdefiniować za pomocą spójników negacji i alternatywy, opierając się na logicznej równoważności schematu $p \rightarrow q$ oraz $\sim p \vee q$. Koniunkcję również można oddać za pomocą spójników negacji i alternatywy. W ten sposób można zredukować liczbę spójników logicznych do dwóch tylko, np. spójnika negacji i spójnika alternatywy. Pozostałe definiowane będą np. w następujący sposób:

$p \bullet q \ \textit{def:}\ \sim(\sim p \vee \sim q)$ $p \rightarrow q \ \textit{def:}\ \sim p \vee q$ $p \equiv q \ \textit{def:}\ \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \vee q)$

Można również obrać za podstawowe spójniki parę spójników negacji i koniunkcji, a także parę spójników negacji i implikacji.

Dwa spójniki, a mianowicie spójnik binegacji ($p \downarrow q$; ani nie p, ani nie q) i spójnik dysjunkcji ($p \,|\, q$; co najwyżej jedno z dwojga p i q), mają tę szczególną własność, że można za pomocą każdego z nich zdefiniować wszystkie pozostałe spójniki logiczne. Spróbuj!

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	$p \,\vert\, q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

6.3.3. Operacjonalizacja pojęcia logicznej równoważności

Możemy teraz dokonać operacjonalizacji pojęcia logicznej równoważności w następujący sposób:

> Dwa schematy zdaniowe są logicznie równoważne zawsze i tylko wtedy, gdy ich matryce logiczne są identyczne.

Wypełniwszy matryce logiczne w §6.3.2, wykażecie, że schemat zdaniowy $\sim(p \bullet q)$ jest logicznie równoważny schematowi zdaniowemu $\sim p \vee \sim q$, gdyż schematy te mają identyczne matryce logiczne:

p	q	$\sim(p \bullet q)$			$\sim p \vee \sim q$		
1	1	$\sim(1 \bullet 1)$	$\sim(1)$	0	$\sim 1 \vee \sim 1$	$0 \vee 0$	0
1	0	$\sim(1 \bullet 0)$	$\sim(0)$	1	$\sim 1 \vee \sim 0$	$0 \vee 1$	1
0	1	$\sim(0 \bullet 1)$	$\sim(0)$	1	$\sim 0 \vee \sim 1$	$1 \vee 0$	1
0	0	$\sim(0 \bullet 0)$	$\sim(0)$	1	$\sim 0 \vee \sim 0$	$1 \vee 1$	1

Rozważmy jeszcze raz parę zdań (1)-(2) z §6.1:

(1) Teoria ***D***arwina i teoria ***L***amarcka nie są obie prawdziwe. $\sim(D \bullet L)$
(2) Prawdziwa jest albo teoria Darwina albo teoria Lamarcka. $D \vee L$

której właściwy schemat logiczny oddaje para:

(i) $\sim(p \bullet q)$
(ii) $p \vee q$

Aby się przekonać, czy zdania (1)-(2) są logicznie równoważne, musimy się dowiedzieć, czy schematy (i)-(ii) są logicznie równoważne, a to uczynimy, konstruując matryce logiczne dla tych schematów. Po wypełnieniu tych matryc okazuje się, że są one różne – różnią się otrzymanymi wartościami logicznymi przynajmniej w jednym rzędzie (a *de facto* w dwóch rzędach), co wystarcza, by badane schematy zdaniowe okazały się logicznie nierównoważne.

p	q	$\sim(p \bullet q)$			$p \vee q$	
1	1	$\sim(1 \bullet 1)$	$\sim(1)$	0	$1 \vee 1$	1
1	0	$\sim(1 \bullet 0)$	$\sim(0)$	1	$1 \vee 0$	1
0	1	$\sim(0 \bullet 1)$	$\sim(0)$	1	$0 \vee 1$	1
0	0	$\sim(0 \bullet 0)$	$\sim(0)$	1	$0 \vee 0$	0

Warto jednak zwrócić uwagę, że są w tych matrycach też rzędy (a mianowicie drugi i trzeci), gdzie wartości logiczne zdań będących instancjami obu schematów są takie same. To się zgadza z odnotowaną przez nas w §6.1 obserwacją, a mianowicie, że zdania logicznie nierównoważne mogą mieć taką samą wartość logiczną. Istotnie zdania (1) i (2) są oba prawdziwe, gdyż wchodzące w ich skład zdania proste (‘Teoria Darwina jest prawdziwa’ i ‘Teoria Lamarcka jest prawdziwa’) są odpowiednio prawdziwe i fałszywe, a więc są ujęte w rzędzie drugim powyższej matrycy. Przywoływany przez nas w §6.1 kontrprzykład (zdania (3) i (4)) jest kontrprzykładem objętym w czwartym rzędzie matrycy, ponieważ zdania składowe tego kontrprzykładu (‘Prawdziwa jest Empedoklesa teoria ewolucji’ i ‘Prawdziwa jest Lamarcka teoria ewolucji’) są oba fałszywe.

Ćwiczenie 6.E „równoważność logiczna – 1”

Stosując metodę matryc logicznych, zbadaj, które pary schematów zdaniowych są logicznie równoważne. Pamiętaj, że aby wykazać, iż dwa schematy nie są logicznie równoważne, wystarczy wskazać jeden rząd ich matryc logicznych, w którym różnią się wartości logiczne instancji tych schematów. Stąd jeżeli napotkamy jeden taki rząd stanowiący kontrprzykład dla logicznej równoważności schematów, to nie musimy kontynuować wypełniania matryc. Wykazanie, że schematy są logicznie równoważne, wiąże się jednak z koniecznością całkowitego wypełnienia matryc. (*Rozwiązania*, s. 340-341).

(a)

p	q	$\sim(p \vee q)$		$\sim p \bullet \sim q$	
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Schematy te
O są logicznie równoważne
O nie są logicznie równoważne

(b)

p	q	$p \vee q$		$\sim(\sim p \bullet \sim q)$	
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Schematy te
O są logicznie równoważne
O nie są logicznie równoważne

(c)

p	q	$p \vee q$		$\sim p \bullet \sim q$	
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Schematy te
O są logicznie równoważne
O nie są logicznie równoważne

(d)

p	q	$\sim(p \rightarrow q)$		$\sim p \equiv \sim q$	
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Schematy te
O są logicznie równoważne
O nie są logicznie równoważne

(e)

p	q	$\sim(p \rightarrow q)$		$p \rightarrow \sim q$	
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Schematy te
O są logicznie równoważne
O nie są logicznie równoważne

Ćwiczenie 6.F „równoważność logiczna – 2”

Stosując metodę matryc logicznych, zbadaj, które pary schematów zdaniowych są logicznie równoważne. (a) Pamiętaj, że aby wykazać, iż dwa schematy nie są logicznie równoważne, wystarczy wskazać jeden rząd ich matryc logicznych, w którym różnią się wartości logiczne instancji tych schematów. Stąd jeżeli napotkamy jeden taki rząd stanowiący kontrprzykład dla logicznej równoważności schematów, to nie musimy kontynuować wypełniania matryc. Wykazanie, że schematy są logicznie równoważne wiąże się jednak z koniecznością całkowitego wypełnienia matryc. (b) Pamiętaj też, że matryca dla schematów zdaniowych z jedną zmienną (przykłady 6-8) ma tylko dwa rzędy! (*Rozwiązania*, s. 341).

(a) $p \rightarrow q$ $p \vee \sim q$	(b) $p \rightarrow q$ $\sim p \vee q$	(c) $\sim(p \rightarrow q)$ $p \bullet \sim q$	(d) $(p \equiv q)$ $(p \rightarrow q) \bullet (q \rightarrow p)$
(e) $\sim(p \equiv q)$ $\sim(p \bullet q) \vee (\sim p \vee \sim q)$	(f) $p \bullet p$ $p \vee p$	(g) $p \vee p$ $\sim p \vee \sim p$	(h) $p \rightarrow p$ $\sim p \rightarrow \sim p$

Ćwiczenie 6.G „równoważność logiczna – 3”

Stosując metodę matryc logicznych, zbadaj, które ze zdań w poszczególnych grupach są logicznie równoważne. Jeżeli grupa zdań zawiera więcej niż dwa zdania, wówczas trzeba skonstruować odpowiednią ilość matryc logicznych. Zanim przystąpisz do zastosowania wprowadzonej przez nas metody, spróbuj stwierdzić na podstawie intuicji, które zdania są logicznie równoważne. Zobaczysz w ten sposób, czy Twoje intuicje logiczne Cię zawodzą, czy też nie. **Rada:** Aby stwierdzić, które z tych zdań są logicznie równoważne, musimy stwierdzić, czy logicznie równoważne są ich właściwe schematy logiczne. Aby uniknąć pomyłek, dokonaj wpierw symbolizacji. (*Rozwiązania*, s. 341-342).

(a) (1) Pada tylko wtedy, gdy niebo jest zachmurzone.
(2) Pada wtedy, gdy niebo jest zachmurzone.
(3) Pada wtedy i tylko wtedy, gdy niebo jest zachmurzone.

(b) (1) Jeżeli nie odbędą się przedterminowe wybory, to wyborcy opozycji będą zawiedzeni.
(2) Albo odbędą się przedterminowe wybory, albo wyborcy opozycji będą zawiedzeni.

(c) (1) Jeżeli nie odbędą się przedterminowe wybory, to wyborcy opozycji będą zawiedzeni.
(2) Albo nie odbędą się przedterminowe wybory, albo wyborcy opozycji będą zawiedzeni.

(d) (1) Ani wyborcy LPR, ani wyborcy Samoobrony nie będą zawiedzeni.
(2) Zawiedzeni będą wyborcy Samoobrony, nie LPR.

(e) (1) Fałszem jest, że ani wyborcy LPR, ani wyborcy Samoobrony nie będą zawiedzeni.
(2) Zawiedzeni będą zarówno wyborcy Samoobrony, jak i wyborcy LPR.
(3) Zawiedzeni będą albo wyborcy Samoobrony, albo wyborcy LPR.

(f) (1) Jeżeli marszałek sejmu odejdzie z PiS, to odbędą się przedterminowe wybory.
(2) Jeżeli marszałek sejmu nie odszedł z PiS, to nie odbyły się przedterminowe wybory.
(3) Jeżeli nie odbyły się przedterminowe wybory, to marszałek sejmu nie odszedł z PiS.

(g) (1) Sejm zmieni artykuł 30 Konstytucji, tylko jeśli posłowie koalicji zostaną zmobilizowani i nie będą zastraszeni wyborami.
(2) Jeśli posłowie koalicji nie zostaną zmobilizowani, a będą przestraszeni wyborami, to Sejm nie zmieni artykułu 30 Konstytucji.
(3) Jeśli posłowie koalicji nie zostaną jednocześnie zmobilizowani i nie zastraszeni wyborami, to Sejm nie zmieni artykułu 30 Konstytucji.

(h) (1) Marszałek sejmu nie zrezygnuje z funkcji, tylko jeśli sejm zmieni albo artykuł 38, albo artykuł 30 Konstytucji.
(2) Jeżeli sejm albo nie zmienił artykułu 38, albo nie zmienił artykułu 30 Konstytucji, to marszałek sejmu zrezygnował z funkcji.
(3) Jeżeli sejm nie zmienił ani artykułu 38, ani artykułu 30 Konstytucji, to marszałek sejmu zrezygnował z funkcji.

(i) (1) Jeżeli nie odbędą się przedterminowe wybory, to wyborcy koalicji nie będą zawiedzeni.
(2) Albo odbędą się przedterminowe wybory, albo wyborcy koalicji nie będą zawiedzeni.
(3) Albo nie odbędą się przedterminowe wybory, albo wyborcy koalicji nie będą zawiedzeni.
(4) Albo odbędą się przedterminowe wybory, albo wyborcy koalicji będą zawiedzeni.

(j) (1) Nieprawdą jest, że przedterminowe wybory odbędą się wtedy i tylko wtedy, gdy marszałek sejmu odejdzie z PiS.
(2) Albo przedterminowe wybory odbędą się, a marszałek sejmu nie odejdzie z PiS, albo marszałek sejmu odejdzie z PiS, a przedterminowe wybory się nie odbędą.
(3) Albo nieprawda, że jeżeli odbędą się przedterminowe wybory, to marszałek sejmu odejdzie z PiS, albo nieprawda, że jeżeli marszałek sejmu odejdzie z PiS, to odbędą się przedterminowe wybory.

(k) (1) Albo marszałek Jurek odejdzie z PiS, albo będą przedterminowe wybory.
(2) Albo LPR, albo Samoobrona odejdą z koalicji.

6.4. Konstruowanie podstawy matrycy logicznej dla dowolnej liczby zmiennych

Powiedzieliśmy wcześniej, że liczba rzędów w matrycy logicznej zależy od tego, ile zmiennych składa się na schemat zdaniowy, dla którego chcemy skonstruować matrycę. Podstawa matrycy logicznej dla n zmiennych zawierać będzie 2^n rzędów (dla $n = 1$ konstruujemy matrycę 2-rzędową, dla $n = 2$ konstruujemy matrycę 4-rzędową, dla $n = 3$ konstruujemy matrycę 8-rzędową, dla $n = 4$ konstruujemy matrycę 16-rzędową itd.).

Istnieje szereg prostych algorytmów konstruowania matryc logicznych dla dowolnej liczby zmiennych, które warto poznać, bo bez przeszkód można wówczas skonstruować matrycę logiczną dla dowolnej liczby zmiennych.

Algorytm 1

Rozpoczynamy od wymienienia w kolejności alfabetycznej wszystkich zmiennych, niech to będą cztery zmienne dla przykładu: *p*, *q*, *r* i *s*.

p	*q*	*r*	*s*

Zaczynając od ostatniej zmiennej (tutaj: zmiennej *s*), skonstruuj podstawę matrycy dla tej zmiennej.

p	*q*	*r*	*s*
			1
			0

Otrzymana zostaje w ten sposób podstawa matrycy logicznej dla jednej zmiennej. Następnie skopiuj tę podstawę, zapisując ją pod spodem (w kolumnie zmiennej *s*)

p	*q*	*r*	*s*
			1
			0
			1
			0

a w kolumnie na lewo (tutaj: w kolumnie dla zmiennej *r*) zapisz jedynki obok matrycy kopiowanej, a zera obok matrycy skopiowanej:

p	*q*	*r*	*s*
		1	1
		1	0
		0	1
		0	0

Otrzymujemy w ten sposób podstawę matrycy logicznej dla dwóch zmiennych. Krok ten powtarzamy: kopiujemy podstawę matrycy (tym razem dla dwóch zmiennych), a w kolumnie na lewo (tutaj: w kolumnie dla zmiennej *q*) zapisujemy jedynki obok matrycy kopiowanej, a zera obok matrycy skopiowanej:

p	*q*	*r*	*s*
	1	1	1
	1	1	0
	1	0	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	1	0
	0	0	1
	0	0	0

Otrzymujemy w ten sposób podstawę matrycy logicznej dla trzech zmiennych. Krok ten powtarzamy aż do wypełnienia wszystkich kolumn: kopiujemy podstawę matrycy (tym razem dla trzech zmiennych), a w kolumnie na lewo (tutaj: w kolumnie dla zmiennej *p*) zapisujemy jedynki obok matrycy kopiowanej, a zera obok matrycy skopiowanej:

p	*q*	*r*	*s*
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

Otrzymaliśmy w ten sposób podstawę matrycy logicznej dla czterech zmiennych.

Algorytm 2

Rozpoczynamy od wymienienia w kolejności alfabetycznej wszystkich zmiennych, niech to będą cztery zmienne dla przykładu: *p, q, r* i *s*. Wiemy, że matryca logiczna ma $2^4 = 16$ rzędów.

Rozpoczynamy od wypełnienia kolumny dla pierwszej zmiennej, czyli zmiennej *p*, wypełniając połowę rzędów, czyli $2^3 = 8$ wartościami 1, a drugą połowę wartościami 0.

Przechodzimy do kolumny dla drugiej zmiennej *q*, teraz wypełniamy $2^2 = 4$ rzędy wartościami 1 oraz tyleż rzędów wartościami 0, i tak naprzemiennie (raz wartościami 1, raz wartościami 0) aż do końca matrycy.

W kolumnie dla trzeciej zmiennej *r* wypełniamy $2^1 = 2$ rzędy wartościami 1 oraz tyleż rzędów wartościami 0, i tak naprzemiennie aż do końca matrycy.

W kolumnie dla ostatniej zmiennej *s* wypełniamy 2^0 rzędów, czyli jeden rząd, wartością 1 oraz jeden rząd wartością 0, i tak naprzemiennie aż do końca matrycy.

	p	*q*	*r*	*s*
	1	1	1	1
	1	1	1	0
	1	1	0	1
	1	1	0	0
	1	0	1	1
	1	0	1	0
	1	0	0	1
	1	0	0	0
	0	1	1	1
	0	1	1	0
	0	1	0	1
	0	1	0	0
	0	0	1	1
	0	0	1	0
	0	0	0	1
	0	0	0	0
Liczba rzędów w ciągu jednolitych wartości logicznych	2^3	2^2	2^1	2^0

6.5. Stosowanie skrótów w wypełnianiu matryc logicznych

W wypełnianiu matryc logicznych bardzo przydaje się umiejętność korzystania ze skrótów, którą poznaliśmy w poprzednim rozdziale, co zaoszczędzi nam żmudnych obliczeń. Prześledźmy to na następującym przykładzie. Chcemy zbadać, czy logicznie równoważny jest schemat $(p \to r) \bullet (q \to r)$ oraz schemat $(p \vee q) \to r$. W schemacie tym występują trzy zmienne, musimy więc skonstruować matrycę logiczną z ośmioma rzędami.

	p	*q*	*r*	$(p \to r) \bullet (q \to r)$			$(p \vee q) \to r$		
1	1	1	1	$(1 \to 1) \bullet (1 \to 1)$			$(1 \vee 1) \to 1$		
2	1	1	0	$(1 \to 0) \bullet (1 \to 0)$			$(1 \vee 1) \to 0$		
3	1	0	1	$(1 \to 1) \bullet (0 \to 1)$			$(1 \vee 0) \to 1$		
4	1	0	0	$(1 \to 0) \bullet (0 \to 0)$			$(1 \vee 0) \to 0$		
5	0	1	1	$(0 \to 1) \bullet (1 \to 1)$			$(0 \vee 1) \to 1$		
6	0	1	0	$(0 \to 0) \bullet (1 \to 0)$			$(0 \vee 1) \to 0$		
7	0	0	1	$(0 \to 1) \bullet (0 \to 1)$			$(0 \vee 0) \to 1$		
8	0	0	0	$(0 \to 0) \bullet (0 \to 0)$			$(0 \vee 0) \to 0$		

Rozpocznijmy od pierwszego schematu. Jest to koniunkcja. Wiemy, że aby koniunkcja była fałszywa, wystarczy, że jeden jej człon jest fałszywy. Człony tej koniunkcji to implikacje. Implikacje z kolei są fałszywe tylko wtedy, gdy prawdziwy jest ich poprzednik, a fałszywy następnik. Jeżeli więc znajdziemy te rzędy, gdzie któraś z implikacji będzie fałszywa, to będą to dokładnie te rzędy, w których fałszywa będzie koniunkcja (tu: rzędy 2, 4, 6) – w pozostałych będzie prawdziwa (możecie sprawdzić, że tak istotnie jest, dopełniając matrycę).

Rozważmy drugi schemat. Jest to implikacja. Implikacja jest prawdziwa, gdy prawdziwy jest jej następnik oraz gdy fałszywy jest jej poprzednik. W naszym przypadku mamy do czynienia z prostym następnikiem, więc od razu możemy powiedzieć, że implikacja ta będzie prawdziwa w rzędach 1, 3, 5 oraz 7, bo w tych rzędach prawdziwy jest jej następnik (*r*). Jedyny pozostały przypadek, gdy implikacja będzie prawdziwa, to ten, gdy fałszywy jest jej poprzednik. W naszym wypadku poprzednikiem jest alternatywa, a alternatywa ta ($p \vee q$) jest fałszywa tylko w rzędach 7 i 8. Mamy zatem wszystkie rzędy, w których implikacja ta będzie prawdziwa, a przez dopełnienie wszystkie rzędy, w których będzie fałszywa:

	p	*q*	*r*	$(p \to r) \bullet (q \to r)$			$(p \vee q) \to r$		
1	1	1	1	$(1 \to 1) \bullet (1 \to 1)$		1	$(1 \vee 1) \to 1$		1
2	1	1	0	$(1 \to 0) \bullet (1 \to 0)$	$(0) \bullet (0)$	0	$(1 \vee 1) \to 0$		0
3	1	0	1	$(1 \to 1) \bullet (0 \to 1)$		1	$(1 \vee 0) \to 1$		1
4	1	0	0	$(1 \to 0) \bullet (0 \to 0)$	$(0) \bullet$	0	$(1 \vee 0) \to 0$		0
5	0	1	1	$(0 \to 1) \bullet (1 \to 1)$		1	$(0 \vee 1) \to 1$		1
6	0	1	0	$(0 \to 0) \bullet (1 \to 0)$	$\bullet (0)$	0	$(0 \vee 1) \to 0$		0
7	0	0	1	$(0 \to 1) \bullet (0 \to 1)$		1	$(0 \vee 0) \to 1$	$(0) \to$	1
8	0	0	0	$(0 \to 0) \bullet (0 \to 0)$		1	$(0 \vee 0) \to 0$	$(0) \to$	1

Okazuje się zatem, że matryce logiczne tych schematów są identyczne, co dowodzi, że schematy te są logicznie równoważne.

Ćwiczenie 6.H „równoważność logiczna – 4”

Stosując metodę matryc logicznych – i tam, gdzie można, korzystając z uprawnionych skrótów – zbadaj, które pary schematów zdaniowych są logicznie równoważne. (*Rozwiązania*, s. 342).

(a) $p \to (q \to r)$
$(p \bullet q) \to r$

(b) $p \to (q \to r)$
$p \to (q \bullet r)$

(c) $p \to (\sim q \to \sim r)$
$\sim p \to (q \to r)$

(d) $p \vee (q \bullet r)$
$(p \bullet q) \vee (p \bullet r)$

(e) $p \bullet (q \vee r)$
$(p \vee q) \bullet (p \vee r)$

(f) $p \vee (q \bullet r)$
$(p \vee q) \bullet (p \vee r)$

(g) $(p \bullet \sim q) \to r$
$\sim r \to (\sim q \to \sim p)$

(h) $\sim(p \bullet q) \to \sim(p \vee q)$
$\sim(\sim p \equiv q)$

(i) $\sim(p \vee q) \vee \sim r$
$\sim(r \bullet p) \bullet \sim(r \bullet q)$