

## 5. OKREŚLANIE WARTOŚCI LOGICZNEJ ZDAŃ ZŁOŻONYCH

Temat, którym mamy się tu zająć, jest nudny i żmudny – będziemy się uczyć techniki obliczania wartości logicznej zdań dowolnie złożonych. Po co? – możecie zapytać. Są dwa główne powody (jeśli nie liczyć tego, że jest to umiejętność wymagana w programie). Po pierwsze, nigdy nie wiemy, kiedy ktoś – choćby przez przypadek – nie zaskoczy nas stwierdzeniem „Dostaniesz piątkę z logiki tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie ‘Tylko jeżeli zarówno Warszawa leży nad Wisłą, jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim zoo, to nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii’”. Niekiedy warto mieć niezawodne narzędzia określania wartości logicznej zdań. Po drugie, umiejętność określania wartości logicznej zdań pozwoli nam na wprowadzenie użytecznych technik określania pewnych logicznych własności par zdań (rozdział 6), zdań (rozdział 7) oraz wnioskowań (rozdział 9).

### Cele

- Określanie wartości logicznej zdań dowolnie złożonych.
- Stosowanie uzasadnionych skrótów w określaniu wartości logicznej.



#### Porada babuni

Dla wielu osób nie będzie konieczne zrobienie wszystkich ćwiczeń z tego rozdziału. Spróbujcie parę przykładów z każdego ćwiczenia.

### 5.1. Przypomnienie

#### 5.1.1. Symbole w rachunku zdań

- Spójniki (funktory) zdaniowe:  $\sim$ ,  $\bullet$ ,  $\vee$ ,  $\equiv$ ,  $\rightarrow$
- Stałe zdaniowe: A, B, C, D, ...
  - Stałe zdaniowe odpowiadają zdaniom prostym w języku naturalnym.
- Zmienne zdaniowe:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$ , ...
  - Pod zmienne zdaniowe można podstawić dowolne zdanie, proste lub złożone
- Nawiasy:  $()$ ,  $[\ ]$ ,  $\{ \}$

#### 5.1.2. Zdania poprawnie skonstruowane

Następujące zdania są poprawnie skonstruowane:

$$\sim\sim A \qquad \sim(\sim A \vee \sim(B \vee \sim C)) \qquad (\sim\sim(A \equiv B) \equiv (\sim\sim B \equiv A))$$

Nie są zdaniami poprawnie skonstruowanymi m.in. następujące bohomyzy:

$$A \sim B \qquad \sim\sim A \vee \sim B \rightarrow \sim C \qquad \sim\sim(A \equiv (B \equiv (\sim\sim B \equiv A)))$$

**Definicja (rekurencyjna) poprawnie skonstruowanego zdania**

- (0) Zdania proste – np. A, B, C, D – są poprawnie skonstruowanymi zdaniami.  
 (1a) Jeżeli  $\varphi$  jest zdaniem poprawnie skonstruowanym, to zdaniem poprawnie skonstruowanym jest również  $\sim\varphi$ .  
 (1b) Jeżeli  $\varphi$  i  $\psi$  są zdaniami poprawnie skonstruowanymi, to zdaniem poprawnie skonstruowanym jest również  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \bullet \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$ ,  $(\varphi \equiv \psi)$ .  
 (2) Tylko zdania wymienione w punktach (1a)-(1b) są zdaniami poprawnie skonstruowanymi.

Jest to tzw. definicja indukcyjna. W jej członach (1a)-(1b) bowiem zakłada się pojęcie definiowane, a mianowicie pojęcie zdania poprawnie skonstruowanego, choć zastosowane do wcześniejszego etapu w konstrukcji zdania (to ważne, bo to ratuje tę definicję przed zarzutem błędnego koła). Należy zwrócić uwagę, że podczas gdy zdanie  $\sim\sim A$  jest zdaniem poprawnie skonstruowanym, to zdanie  $\sim B \vee (A \bullet B)$ , ściśle rzecz ujmując, nie jest zdaniem poprawnie skonstruowanym – byłoby nim zdanie  $(\sim B \vee (A \bullet B))$ . Aby jednak nie mnożyć nawiasów ponad potrzebę, w praktyce wprowadzamy konwencję pomijania najbardziej zewnętrznych nawiasów według reguły:

- (r) Jeżeli zdanie o kształcie  $(\xi)$  jest zdaniem poprawnie skonstruowanym, to wolno opuścić nawiasy i zapisać to zdanie w formie uproszczonej  $\xi$ .

Należy zwrócić uwagę, że zdanie  $\xi$ , które nie zawiera nawiasów najbardziej zewnętrznych, nie jest na mocy reguły (r) zdaniem poprawnie skonstruowanym, co jest ważne, gdyż inaczej mogłoby wchodzić (bez nawiasów) w proces konstrukcji zdań.

**5.1.3. Matryce logiczne**

Wypełnijcie matryce logiczne i sprawdźcie, czy zrobiliście to poprawnie.

$p$	$\sim p$	$p$	$q$	$p \bullet q$	$p$	$q$	$p \vee q$	$p$	$q$	$p \equiv q$	$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1		1	1		1	1		1	1		1	1	
0		1	0		1	0		1	0		1	0	
		0	1		0	1		0	1		0	1	
		0	0		0	0		0	0		0	0	

**5.2. Określanie wartości logicznej zdań złożonych (bez negacji)**

Określanie wartości logicznej zdań złożonych nie jest trudne – trzeba jedynie trochę poćwiczyć i uważać, żeby nie popełniać błędów. Aby osiąść tę umiejętność musicie:

- znać matryce logiczne dla wszystkich spójników zdaniowych,
- umieć wskazać spójnik główny dla dowolnego zdania.

Rozpocznijmy od paru przykładów. Zakładając będziemy, że zdania proste A, B i C są prawdziwe, natomiast zdania proste K, L i M są fałszywe.

**Przykład 1**

Jaka jest wartość logiczna zdania  $(A \vee M) \bullet B$ ?

Ponieważ wartość logiczna zdań złożonych w logice zdań jest zdeterminowana przez wartość logiczną zdań prostych, musimy najpierw podstawić odpowiednie wartości logiczne zdań prostych – zachowując wszystkie spójniki zdaniowe i nawiasy zdania wyjściowego:

$$(1 \vee 0) \bullet 1$$

Podstawową zasadą jest, aby najpierw obliczyć wartość logiczną najbardziej wewnętrznych nawiasów – w powyższym wypadku jedyne nawiasu. Ma to głęboki sens, bo przecież chcemy obliczyć wartość zdania, które jest koniunkcją, ale choć mamy daną wartość logiczną drugiego członu koniunkcji, to wartość logiczna pierwszego członu musi dopiero zostać obliczona. Pierwszym członem koniunkcji jest alternatywa, której pierwszy człon jest prawdziwy, a drugi fałszywy. Znajomość matrycy logicznej dla alternatywy pozwala obliczyć jej wartość – będzie ona prawdziwa, co zapisujemy w sposób następujący (we wstępnych stadiach obliczeń dodaję klamry dla lepszej wizualizacji tego, co jest obliczane i w jakiej kolejności, ale nie są one konieczne):

$$\underbrace{(1 \vee 0)}_{(1)} \bullet 1$$

Czasami warto zachować nawiasy wokół właśnie obliczonej wartości logicznej, a więc (1) jako przypomnienie, że ta wartość została obliczona na podstawie nawiasu  $(1 \vee 0)$ . Jednakże powyższy zapis jest równoważny zapisowi:

$$\underbrace{(1 \vee 0)}_1 \bullet 1$$

Zwróćcie uwagę, że wartość logiczna drugiego członu koniunkcji zostaje po prostu przepisana.

Gdy mamy już wartość logiczną obu członów koniunkcji, możemy obliczyć wartość logiczną koniunkcji, która będzie w tym wypadku prawdziwa:

$$\underbrace{1 \bullet 1}_1$$

A tak wygląda zapis obliczenia bez komentarzy:

$$\underbrace{\underbrace{(1 \vee 0)}_{(1)} \bullet 1}_1$$

i bez klamr:

$$\begin{array}{l} (1 \vee 0) \bullet 1 \\ (1) \bullet 1 \\ 1 \end{array}$$

**Przykład 2**

Spróbuj samodzielnie obliczyć wartość logiczną następującej alternatywy.

$$(A \bullet M) \vee [M \equiv (A \bullet B)]$$

Najpierw podstawiamy wartości logiczne za stałe logiczne – pamiętając o pozostawieniu wszystkich spójników zdaniowych i nawiasów:

$$\begin{array}{c} (1 \bullet 0) \vee [0 \equiv (1 \bullet 1)] \\ \underbrace{\hspace{2em}} \vee [0 \equiv \underbrace{\hspace{2em}}] \\ \underbrace{\hspace{1em}} \vee \underbrace{\hspace{2em}} \\ \underbrace{\hspace{3em}} \end{array}$$

Zaczynamy od najbardziej wewnętrznych nawiasów: koniunkcja  $(1 \bullet 0)$  jest fałszywa, a koniunkcja  $(1 \bullet 1)$  – prawdziwa:

$$\begin{array}{c} (1 \bullet 0) \vee [0 \equiv (1 \bullet 1)] \\ (0) \vee [0 \equiv (1)] \end{array}$$

W następnym kroku możemy tylko skopiować wartość logiczną pierwszego członu alternatywy, natomiast obliczamy wartość logiczną drugiego członu alternatywy, którym jest równoważność  $[0 \equiv 1]$ , która jest fałszywa:

$$\begin{array}{c} (0) \vee [0 \equiv (1)] \\ 0 \vee [0] \end{array}$$

W ostatnim kroku możemy obliczyć wartość logiczną alternatywy, która jest prawdziwa.

Podsumowując:

$$\begin{array}{c} (1 \bullet 1) \vee [0 \vee (1 \bullet 0)] \\ (1) \vee [0 \vee (0)] \\ 1 \vee [0] \\ 1 \end{array}$$

bez klamr:

$$\begin{array}{c} (1 \bullet 1) \vee [0 \vee (1 \bullet 0)] \\ (1) \vee [0 \vee (0)] \\ 1 \vee [0] \\ 1 \end{array}$$

**Przykład 3**

Obliczmy wartość logiczną następującej implikacji:

$$\{(A \rightarrow M) \equiv [N \vee (A \bullet B)]\} \rightarrow [M \rightarrow (A \rightarrow N)]$$

Podstawiamy dane wcześniej wartości logiczne:

$$\begin{aligned} \{(1 \rightarrow 0) \equiv [0 \vee (1 \bullet 1)]\} &\rightarrow [0 \rightarrow (1 \rightarrow 0)] \\ \{\text{[ ]} \equiv [0 \vee \text{[ ]}]\} &\rightarrow [0 \rightarrow \text{[ ]}] \\ \{\text{[ ]} \equiv \text{[ ]}\} &\rightarrow \text{[ ]} \\ \text{[ ]} &\rightarrow \text{[ ]} \end{aligned}$$

Ponownie zaczynamy od najbardziej wewnętrznych nawiasów:

$$\begin{aligned} \{(1 \rightarrow 0) \equiv [0 \vee (1 \bullet 1)]\} &\rightarrow [0 \rightarrow (1 \rightarrow 0)] \\ \{(0) \equiv [0 \vee (1)]\} &\rightarrow [0 \rightarrow (0)] \end{aligned}$$

Po usunięciu zbędnych nawiasów mamy:

$$\{0 \equiv [0 \vee 1]\} \rightarrow [0 \rightarrow 0]$$

Ponownie obliczamy najbardziej wewnętrzne nawiasy:

$$\begin{aligned} \{0 \equiv [0 \vee 1]\} &\rightarrow [0 \rightarrow 0] \\ \{0 \equiv [1]\} &\rightarrow [1] \end{aligned}$$

Teraz możemy obliczyć wartość logiczną poprzednika głównej implikacji

$$\begin{aligned} \{0 \equiv [1]\} &\rightarrow [1] \\ \{0\} &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

a w takim razie możemy ustalić, że implikacja ta jest prawdziwa.

Podsumowując:

$$\begin{aligned} \{(1 \rightarrow 0) \equiv [0 \vee (1 \bullet 1)]\} &\rightarrow [0 \rightarrow (1 \rightarrow 0)] \\ \{(0) \equiv [0 \vee (1)]\} &\rightarrow [0 \rightarrow (0)] \\ \{(0) \equiv [1]\} &\rightarrow [1] \\ \{0\} &\rightarrow [1] \\ &1 \end{aligned}$$

**Ćwiczenie 5.A „wartości logiczne – 1”**

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń. (Rozwiązania, s. 326).

$$\text{a) } \underbrace{(1 \bullet 0)}_{\text{ }} \vee \underbrace{(0 \rightarrow 0)}_{\text{ }} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ }}$$

$$\text{b) } 1 \bullet (1 \vee (0 \rightarrow 0)) \\ 1 \bullet (1 \vee \text{ }) \\ 1 \bullet \text{ } \\ \text{ }$$

$$\text{c) } \underbrace{(1 \bullet 1)}_{\text{ }} \vee 0 \rightarrow 0 \\ \underbrace{(\text{ } \vee 0)}_{\text{ }} \rightarrow 0 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ }} \rightarrow 0 \\ \text{ }$$

$$\text{d) } 1 \bullet ((1 \vee 0) \rightarrow 0) \\ 1 \bullet (\text{ } \rightarrow 0) \\ 1 \bullet \text{ } \\ \text{ }$$

$$\text{e) } \underbrace{(1 \rightarrow 0)}_{\text{ }} \bullet \underbrace{((1 \bullet 0) \rightarrow 0)}_{\text{ }} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ }} \bullet \underbrace{(\text{ } \rightarrow 0)}_{\text{ }} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ }} \bullet \text{ } \\ \text{ }$$

$$\text{f) } (1 \equiv (1 \vee 0)) \rightarrow 0 \\ (1 \equiv \text{ }) \rightarrow 0 \\ \text{ } \rightarrow 0 \\ \text{ }$$

$$\text{g) } (0 \rightarrow 1) \rightarrow (1 \rightarrow 0) \\ \underbrace{(0 \rightarrow 1)}_{\text{ }} \rightarrow \underbrace{(1 \rightarrow 0)}_{\text{ }} \\ \text{ }$$

$$\text{h) } 0 \rightarrow (0 \rightarrow (0 \rightarrow 0)) \\ 0 \rightarrow (0 \rightarrow \text{ }) \\ 0 \rightarrow \text{ } \\ \text{ }$$

$$\text{i) } ((0 \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow 0 \\ \underbrace{((0 \rightarrow 0) \rightarrow 0)}_{\text{ }} \rightarrow 0 \\ \text{ } \rightarrow 0 \\ \text{ }$$

$$\text{j) } \underbrace{((0 \rightarrow 1) \rightarrow 0)}_{\text{ }} \equiv \underbrace{(0 \equiv 0)}_{\text{ }} \\ \underbrace{(\text{ } \rightarrow 0)}_{\text{ }} \equiv \text{ } \\ \text{ } \equiv \text{ } \\ \text{ }$$

**Ćwiczenie 5.B „wartości logiczne – 2”**

Obliczcie wartość logiczną następujących schematów prawdziwościowych. (*Rozwiązania*, s. 327).

a)  $(0 \bullet 1) \vee (0 \rightarrow 0)$

f)  $(0 \vee (1 \bullet 0)) \rightarrow (1 \bullet 0)$

b)  $1 \bullet (1 \vee (0 \rightarrow 0))$

g)  $(0 \rightarrow 0) \rightarrow (0 \rightarrow 1)$

c)  $((0 \bullet 1) \vee 0) \rightarrow 0$

h)  $1 \rightarrow (0 \rightarrow (0 \rightarrow 1))$

d)  $1 \bullet ((1 \vee 0) \rightarrow 0)$

i)  $((0 \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow 0$

e)  $(0 \rightarrow 1) \rightarrow ((1 \bullet 0) \rightarrow 0)$

j)  $((0 \vee 1) \rightarrow 0) \rightarrow (1 \rightarrow 0)$

$$k) [((1 \bullet 0) \bullet 0) \equiv (1 \vee 0)] \rightarrow (1 \bullet (0 \vee 0))$$

$$l) ((1 \bullet 0) \bullet 1) \equiv [(1 \vee 0) \rightarrow (1 \bullet (0 \vee 0))]$$

$$m) ((1 \equiv 0) \rightarrow (0 \equiv 0)) \bullet [(0 \rightarrow 0) \vee (1 \rightarrow ((1 \bullet 0) \equiv 0))]$$

$$n) (0 \equiv 0) \bullet \{[(0 \vee 0) \rightarrow 0] \equiv [1 \rightarrow [(0 \rightarrow 0) \rightarrow 0] \rightarrow 0]\}$$



### 5.3. Określanie wartości logicznej zdań złożonych (z uwzględnieniem negacji)

Uwzględnienie negacji w określaniu wartości logicznej zdań złożonych nie jest trudne. Należy jedynie zawsze pamiętać o tym, co jest zdaniem negowanym. Rozpoczniemy od prostych przykładów.

#### 5.3.1. Negacje jednokrotne

W poniższych przykładach ponownie zakładamy, że zdania proste A, B i C są prawdziwe, natomiast zdania proste K, L i M są fałszywe.

#### Przykład 1 i 2. Jaką wartość logiczną mają zdania: $\sim(A \rightarrow B)$ oraz $\sim A \rightarrow B$ ?

Ponownie przepisujemy wszystkie symbole, podstawiając zamiast zdań prostych ich wartości logiczne:

$$\begin{array}{ll} \sim(A \rightarrow B) & \sim A \rightarrow B \\ \sim(1 \rightarrow 1) & \sim 1 \rightarrow 1 \end{array}$$

Zdanie  $\sim(A \rightarrow B)$  jest negacją implikacji. Zanim określimy wartość logiczną negacji, musimy określić wartość logiczną implikacji. Implikacja o prawdziwym poprzedniku i następniku jest prawdziwa, a zatem:

$$\sim \underbrace{(1 \rightarrow 1)}_{\sim(1)}$$

Stąd już prosto wnioskujemy, że zdanie  $\sim(A \rightarrow B)$  jest fałszywe. W skrócie:

$$\begin{array}{l} \sim(1 \rightarrow 1) \\ \sim(1) \\ 0 \end{array}$$

Zdanie  $\sim A \rightarrow B$  jest implikacją, której poprzednik jest negacją. Zanim określimy wartość logiczną implikacji musimy określić wartość logiczną jej poprzednika, który jest negacją zdania prawdziwego, a więc jest fałszywy:

$$\begin{array}{l} \sim 1 \rightarrow 1 \\ \underbrace{0} \rightarrow 1 \end{array}$$

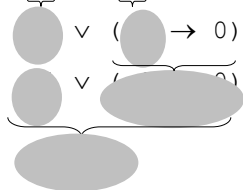
Stąd już prosto wnioskujemy, że zdanie  $\sim A \rightarrow B$  jest prawdziwe. W skrócie:

$$\begin{array}{l} \sim 1 \rightarrow 1 \\ \underbrace{0} \rightarrow 1 \\ \underbrace{1} \end{array}$$

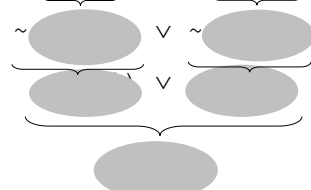
**Ćwiczenie 5.C „wartości logiczne – 3”**

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń. (Rozwiązania, s. 329).

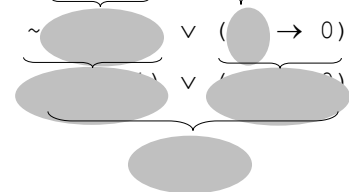
a)  $\sim 1 \vee (\sim 1 \rightarrow 0)$



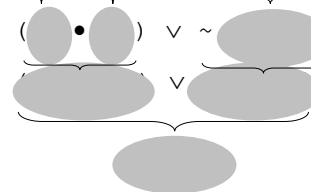
b)  $\sim (1 \equiv 1) \vee \sim (0 \equiv 0)$



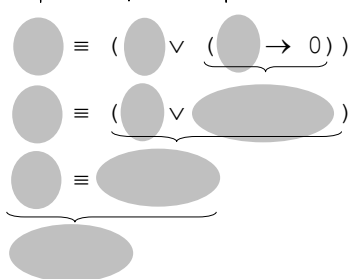
c)  $\sim (1 \rightarrow 1) \vee (\sim 0 \rightarrow 0)$



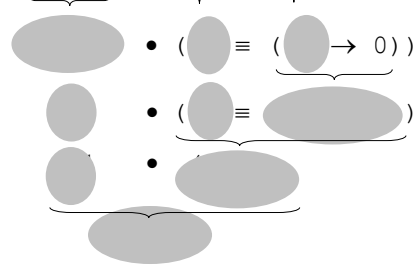
d)  $(\sim 1 \bullet \sim 1) \vee \sim (0 \equiv 0)$



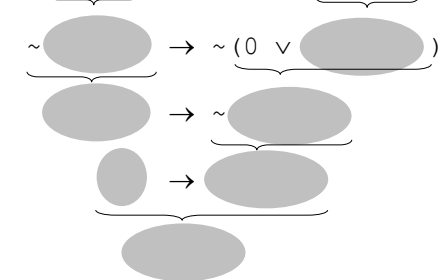
e)  $\sim 1 \equiv (\sim 1 \vee (\sim 0 \rightarrow 0))$



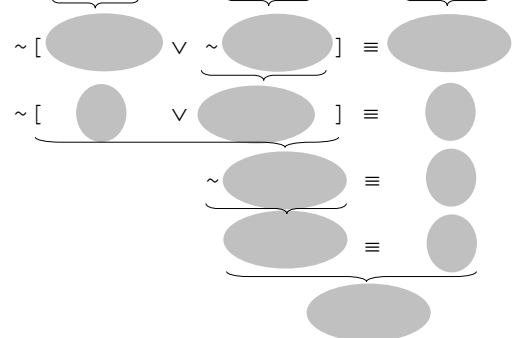
f)  $(1 \equiv 1) \bullet (\sim 1 \equiv (\sim 1 \rightarrow 0))$



g)  $\sim (0 \equiv 1) \rightarrow \sim (0 \vee (1 \rightarrow 0))$



h)  $\sim [(0 \equiv 0) \vee \sim (0 \vee 0)] \equiv (1 \bullet 0)$



**Ćwiczenie 5.D „wartości logiczne – 4”**

Obliczcie wartość logiczną następujących schematów prawdziwościowych. (*Rozwiązania*, s. 330).

a)  $\sim 1 \vee 1$

b)  $\sim (1 \vee 1)$

c)  $\sim 1 \vee \sim 1$

d)  $\sim (1 \rightarrow 1)$

e)  $\sim 1 \rightarrow 1$

f)  $\sim 1 \rightarrow \sim 1$

g)  $\sim 1 \vee (\sim 1 \rightarrow 0)$

h)  $\sim 0 \rightarrow \sim (1 \equiv 0)$

i)  $(\sim 1 \rightarrow \sim 1) \vee 0$

j)  $\sim (1 \bullet 1) \rightarrow 0$

k)  $(\sim 0 \vee \sim 0) \bullet (\sim 1 \vee \sim 1)$

l)  $\sim (0 \vee 0) \bullet \sim (0 \equiv 1)$

m)  $\sim 0 \rightarrow [\sim 0 \bullet (\sim 1 \vee \sim 1)]$

n)  $\sim 0 \bullet \sim [0 \vee (1 \equiv 1)]$

o)  $[\sim 1 \equiv (\sim 0 \bullet \sim 1)] \rightarrow \sim 1$

p)  $\sim 0 \bullet \sim [0 \vee \sim (1 \vee 0)]$

q)  $(\sim 0 \bullet \sim 1) \equiv \sim (1 \equiv \sim 0)$

r)  $\sim (0 \vee \sim 0) \rightarrow \sim (0 \vee \sim 1)$

s)  $\sim [\sim (1 \equiv 0) \bullet \sim 0] \vee \sim 1$

t)  $\sim [\sim (\sim 1 \vee \sim 0) \bullet \sim 0] \rightarrow \sim 1$

u)  $\sim 1 \vee \sim [\sim 0 \bullet \sim (1 \rightarrow \sim 0)]$

w)  $\sim \{ \sim 1 \vee \sim [\sim 0 \bullet \sim (1 \rightarrow \sim 0)] \}$

$$x) \sim\{\sim 1 \equiv \sim[\sim 1 \vee \sim(\sim 0 \bullet \sim 0)]\}$$

$$y) \sim(\sim 1 \vee \sim 0) \equiv \sim[0 \equiv \sim(0 \bullet \sim 0)]$$

### 5.3.2. Negacje wielokrotne

Niech A będzie zdaniem prawdziwym. Wówczas negacja A jest oczywiście fałszywa:

$$\underbrace{\sim 1}_{0}$$

Negacja negacji A będzie natomiast prawdziwa, co możemy wykazać w następujący sposób:

$$\underbrace{\underbrace{\sim 1}_{0}}_{1}$$

Potrójna negacja zdania A będzie znów fałszywa:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim 1}_{0}}_{1}}_{0}$$

I tak dalej.

#### Ćwiczenie 5.E „negacje wielokrotne – 1”

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń. (*Rozwiązania*, s. 331).

a)  $\underbrace{\underbrace{\sim 0}_{\bullet}}_{\bullet}$

b)  $\underbrace{\underbrace{\sim 1}_{\bullet}}_{\bullet}$

c)  $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim 0}_{\bullet}}_{\bullet}}_{\bullet}$

d)  $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim 1}_{\bullet}}_{\bullet}}_{\bullet}$

### 5.3.3. Negacje wielokrotne w zdaniach złożonych

Należy pamiętać, że znak negacji dotyczy tego, co występuje bezpośrednio po tym znaku. W zdaniu  $\sim A$  negowane jest zdanie proste A. W zdaniu  $\sim(\sim(A \bullet C) \vee B)$  negowane jest zdanie znajdujące się w nawiasie, a więc alternatywa  $\sim(A \bullet C) \vee B$ . Natomiast w zdaniu  $\sim\sim A$  pierwszy znak negacji dotyczy tego, co po nim następuje, a więc zdania  $\sim A$ . Wreszcie w zdaniu  $\sim(\sim A \vee B)$  pierwszy znak negacji dotyczy ponownie nawiasu, w którym znajduje się alternatywa  $\sim A \vee B$ .

(1)

$$\sim\sim A \bullet M$$

Zdanie (1) jest koniunkcją pewnego zdania prostego M i podwójnej negacji innego zdania prostego A.

(2)

$$\sim\sim(A \bullet M)$$

Zdanie (2) jest podwójną negacją (negacją negacji) koniunkcji dwóch zdań prostych A i M.

(3)

$$\sim(\sim A \bullet M)$$

Zdanie (3) jest negacją koniunkcji zdania prostego M oraz negacji innego zdania prostego A.

Różnice w strukturze logicznej tych zdań będą też odzwierciedlone w sposobie obliczania ich wartości logicznej.

$$\begin{array}{l} \underbrace{\sim\sim 1}_{0} \bullet 0 \\ \underbrace{\sim 0}_{1} \bullet 0 \\ \underbrace{1}_{0} \bullet 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim\sim \underbrace{(1 \bullet 0)}_{0} \\ \sim\sim \underbrace{(0)}_{1} \\ \underbrace{\sim 1}_{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim \underbrace{(\sim 1 \bullet 0)}_{1} \\ \sim \underbrace{(0 \bullet 0)}_{0} \\ \underbrace{\sim (0)}_{1} \\ 1 \end{array}$$

#### Ćwiczenie 5.F „negacje wielokrotne – 2”

Wypełnijcie następujące schematy obliczeń. (*Rozwiązania*, s. 332).

a)  $\sim 1 \rightarrow \sim\sim 0$

b)  $\sim\sim(1 \equiv 0)$

c)  $\sim(\sim 1 \equiv 0)$

d)  $\sim(\sim 1 \vee \sim 0)$

e)  $\sim\sim 1 \vee \sim\sim 0$

f)  $\sim(\sim 0 \rightarrow 0)$

**Ćwiczenie 5.G „wartości logiczne – 5”**

Obliczcie wartość logiczną następujących schematów prawdziwościowych. (*Rozwiązania*, s. 332).

a)  $\sim\sim 1 \vee \sim\sim 0$

b)  $\sim(\sim 1 \vee \sim 0)$

c)  $\sim\sim(1 \vee \sim 1)$

d)  $\sim(\sim 1 \vee \sim 1)$

e)  $\sim\sim\sim 0 \rightarrow \sim\sim\sim 1$

f)  $\sim\sim\sim(0 \rightarrow \sim 1)$

g)  $(0 \rightarrow 0) \rightarrow \sim[\sim(\sim 1 \equiv \sim 0) \bullet \sim 0]$

h)  $\sim[\sim(\sim 1 \bullet 1) \rightarrow \sim 0] \equiv \sim(1 \vee \sim 0)$

i)  $\sim(1 \bullet \sim 1) \rightarrow \sim(\sim 0 \vee \sim 0)$

j)  $\sim[(\sim 1 \vee \sim 1) \bullet \sim(0 \vee \sim 0)]$

## 5.4. Stosowanie skrótów w określaniu wartości logicznej

Rozważmy następujący schemat obliczenia wartości logicznej:

$$0 \rightarrow \sim [ (\sim(1 \bullet 0) \rightarrow (\sim 0 \vee \sim 1)) \equiv (\sim 1 \rightarrow \sim(0 \vee 0)) ]$$

Otóż zamiast skrupulatnie obliczać wartość logiczną następnika, możemy od razu stwierdzić, że zdanie, którego wartość logiczna jest w ten sposób przedstawiona, musi być prawdziwe. Dzieje się tak dlatego, że każda implikacja o fałszywym poprzedniku będzie prawdziwa – niezależnie od tego, czy następnik jest fałszywy, czy prawdziwy. A zatem na mocy matrycy logicznej dla implikacji:

$0 \rightarrow$	$\sim [ (\sim(1 \bullet 0) \rightarrow (\sim 0 \vee \sim 1)) \equiv (\sim 1 \rightarrow \sim(0 \vee 0)) ]$
1	

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

### Ćwiczenie 5.H „podstawy skrótów”

Uzupełnij następujące twierdzenia będące podstawą możliwości lub niemożliwości stosowania skrótów w określaniu wartości logicznej zdań. (Rozwiązania, s. 333-334).

- (a) 

$p$	$q$	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

$p$	$q$	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

 Jeżeli przynajmniej jeden z członów koniunkcji jest prawdziwy, to koniunkcja jest:
  - prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (b) 

$p$	$q$	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

$p$	$q$	$p \bullet q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

 Jeżeli przynajmniej jeden z członów koniunkcji jest fałszywy, to koniunkcja jest:
  - prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (c) 

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

 Jeżeli przynajmniej jeden z członów alternatywy jest prawdziwy, to alternatywa jest:
  - prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (d) 

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

 Jeżeli przynajmniej jeden z członów alternatywy jest fałszywy, to alternatywa jest:
  - prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu



- (e)  $p \quad q \quad p \rightarrow q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli poprzednik jest prawdziwy, to implikacja jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (f)  $p \quad q \quad p \rightarrow q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli poprzednik jest fałszywy, to implikacja jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (g)  $p \quad q \quad p \rightarrow q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli następnik jest prawdziwy, to implikacja jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (h)  $p \quad q \quad p \rightarrow q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli następnik jest fałszywy, to implikacja jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (i)  $p \quad q \quad p \equiv q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli pierwszy człon równoważności jest prawdziwy, to równoważność jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (j)  $p \quad q \quad p \equiv q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli pierwszy człon równoważności jest fałszywy, to równoważność jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu
- (k)  $p \quad q \quad p \equiv q$
- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1 | 1 |  |
| 1 | 0 |  |
| 0 | 1 |  |
| 0 | 0 |  |
- Jeżeli drugi człon równoważności jest prawdziwy, to równoważność jest:
- prawdziwa
  - fałszywa
  - nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

$p$	$q$	$p \equiv q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Jeżeli drugi człon równoważności jest fałszywy, to równoważność jest:

- prawdziwa
- fałszywa
- nie można jednoznacznie określić, więc nie można zastosować skrótu

### Ćwiczenie 5.1 „skrót – 1”

Zastosuj uzasadnione skróty w określaniu wartości logicznej zdań złożonych. (Rozwiązania, s. 335).

a)  $0 \rightarrow [0 \equiv (0 \vee (1 \bullet 0))]$

b)  $[0 \equiv (1 \vee (0 \bullet 1))] \rightarrow 1$

c)  $0 \bullet [(0 \equiv 0) \vee (1 \rightarrow 1)]$

d)  $1 \vee [1 \equiv \sim(1 \bullet (1 \bullet 1))]$

e)  $\sim 1 \bullet [(1 \rightarrow 1) \vee (1 \rightarrow 1)]$

f)  $\sim 1 \rightarrow [1 \vee \sim(0 \rightarrow (0 \rightarrow 0))]$

g)  $\sim 0 \rightarrow [(1 \rightarrow (\sim 1 \bullet \sim 1)) \vee \sim 0]$

h)  $\sim 0 \equiv [\sim 1 \bullet \sim(1 \rightarrow (0 \rightarrow 1))]$

i)  $[0 \equiv (1 \vee (0 \bullet 1))] \rightarrow \sim(0 \vee 0)$

j)  $\sim(1 \vee 1) \bullet [(0 \equiv 1) \bullet (1 \equiv 1)]$

**Ćwiczenie 5.J „skrót – 2”**

Zastosuj uzasadnione skróty w określaniu wartości logicznej zdań złożonych. Niech zdania A i B będą prawdziwe, a zdania K i L – fałszywe. Nie jest znana wartość logiczna zdań G i H. Czy można stwierdzić, jaka jest wartość logiczna następujących zdań? (*Rozwiązania*, s. 335-336).

a)  $A \vee G$

b)  $K \vee G$

c)  $A \bullet G$

d)  $K \bullet G$

e)  $A \bullet (K \vee G)$

f)  $A \vee (K \vee G)$

g)  $K \bullet (K \vee G)$

h)  $K \vee (K \bullet G)$

i)  $(A \bullet K) \rightarrow G$

j)  $A \rightarrow (K \bullet G)$

k)  $(A \vee K) \rightarrow G$

l)  $A \rightarrow (K \vee G)$

m)  $(G \vee \sim G) \rightarrow K$

n)  $\sim(A \vee G) \rightarrow [\sim(H \vee G) \equiv \sim A]$

**Ćwiczenie 5.K „wartości logiczne – 6”**

Określ wartość logiczną następujących zdań, najpierw kierując się intuicjami, a następnie stosując poznaną metodę (dokonaj symbolizacji tych zdań, określ wartość logiczną zdań prostych oraz oblicz wartość logiczną zdań złożonych). (Rozwiązania, s. 337).

	Symbolizacja	Obliczenie wartości logicznej	Zdanie jest:
(a)	Stolicą Polski jest Poznań lub Warszawa. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe
(b)	Stolicą Polski jest zarówno Poznań, jak i Warszawa. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe
(c)	Stolicą Polski nie jest ani Poznań, ani Warszawa. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe
(d)	Stolicą Polski nie jest zarówno Poznań, jak i Warszawa. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe
(e)	Jeżeli Poznań jest stolicą Polski, to Warszawa nie jest stolicą Polski. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe
(f)	Jeżeli stolicą Polski nie jest ani Poznań, ani Berlin, to nie jest nią też Warszawa. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe
(g)	Nie jest prawdą, że ani Poznań, ani Berlin, ani Warszawa nie jest stolicą Polski, ale nie jest też prawdą, że zarówno Poznań, Berlin, jak i Warszawa są stolicą Polski. 		<input type="radio"/> prawdziwe <input type="radio"/> fałszywe

**Ćwiczenie 5.L „długie zdanie”**

Określ wartość logiczną długiego zdania ze wstępu: 'Tylko jeżeli zarówno Warszawa leży nad Wisłą, jak i albo Poznań leży nad Wartą i nie jeżdżą w nim tramwaje, albo Poznań leży nad Wisłą i nie ma w nim zoo, to nieprawda, że Londyn jest stolicą Polski lub Wielkiej Brytanii'. Dla uproszczenia dociekań dodaję, że Poznań nie jest stolicą Polski, jest miastem położonym nad Wartą, w którym jeżdżą tramwaje i w którym są dwa ogrody zoologiczne. (Rozwiązania, s. 338).