4. SYMBOLIZACJA ZDAŃ JĘZYKA NATURALNEGO II

W rozdziale tym kontynuujemy szkolenie umiejętności symbolizacji zdań języka naturalnego. Wzbogacimy ją o umiejętność symbolizacji pewnych dodatkowych spójników zdaniowych: ‘ani …, ani …’, ‘nie zarówno …, jak i …’, ‘albo …, albo …, ale nie jedno i drugie’, ‘… tylko jeśli …’, ‘…, chyba że …’.

Porada babuni

Dla każdego z powyższych wyrażeń podany schemat symbolizacji powinniście najpierw zrozumieć, ale potem wykuć.

Cele

- Umiejętność symbolizacji zdań zawierających wyrażenia ‘ani, ani’, ‘nie zarówno, jak i’, ‘albo, albo, ale nie oba’, ‘tylko jeśli’, ‘chyba że’.
- Umiejętność symbolizacji zdań zawierających wyrażenia skwantyfikowane ‘wszyscy’, ‘niektórzy’, ‘nikt’, ‘nie wszyscy’ odnoszące się do skończonego zbioru osób.
- Umiejętność symbolizacji zdań zawierających ukryte spójniki.

4.1. Negacja koniunkcji i koniunkcja negacji

4.1.1. ‘Nieprawda, że zarówno *p*, jak i *q*’

Załóżmy, że teściowa Jana przewiduje: „Oblejesz zarówno poprawkę, jak i komisyjny”. Zdanie oddające przewidywanie teściowej Jana jest koniunkcją:

P • K

P: Jan obleje ***p***oprawkę.
K: Jan obleje ***k***omisyjny.

Wyobraźmy sobie teraz, że żona Jana sytuację chce uratować, pocieszając go w następujących słowach:

(1) Przecież nie oblejesz zarówno poprawki, jak i komisyjnego.

Wypowiedź ta oprócz pocieszenia stanowi też negację wypowiedzi teściowej, oddamy ją jako negację wypowiedzianej przez teściową koniunkcji:

[1] ~(P • K)

Podobnie oddać możemy zdanie:

(2) Ala nie wyjdzie jednocześnie za Jacka i za Wacka.

J: Ala wyjdzie za ***J***acka.
W: Ala wyjdzie za ***W***acka.

jako negację pewnej koniunkcji:

[2] ~(J • W)

4.1.2. ‘Ani nie *p*, ani nie *q*’

Wiercąc się na nowo kupionej kanapie, Jadwiga w końcu stwierdza:

(1) Ani się tu nie wyśpię, ani nie odpocznę.

Czy Jadwiga twierdzi, że się wyśpi? Oczywiście – nie. Czy twierdzi ona, że odpocznie? Też nie. Innymi słowy, Jadwiga twierdzi zarówno, że się nie wyśpi, jak i że nie odpocznie, co możemy oddać jako koniunkcję dwóch negacji:

[1] ~W • ~O

O: Jadwiga ***o***dpocznie na kanapie.
W: Jadwiga ***w***yśpi się na kanapie.

Podobnie będzie ze zdaniem:

(2) Okazało się, że Ala nie wyjdzie ani za Jacka, ani za Wacka

które możemy przedstawić jako:

[2] ~J • ~W

J: Ala wyjdzie za ***J***acka.
W: Ala wyjdzie za ***W***acka.

4.1.3. ‘Zarówno nie *p*, jak i nie *q*’

Rozważmy jeszcze jeden przykład:

(3) Olek zarówno nie zapłaci lobbystom, jak i nie pobierze od nich pieniędzy.

Twierdzi się tutaj, że Olek nie zapłaci lobbystom oraz że nie pobierze od nich pieniędzy, a więc:

[3] ~O • ~P

O: ***O***lek zapłaci lobbystom.
P: Olek ***p***obierze pieniądze od lobbystów.

To samo zdanie moglibyśmy wyrazić w następujący sposób:

Olek ani nie zapłaci lobbystom, ani nie pobierze od nich pieniędzy.

Zwróćcie uwagę, że wyrażenie ‘zarówno nie …, jak i nie …’ wydaje się bliskie wyrażeniu ‘nieprawda, że zarówno …, jak i …’. Jednakże sens tych wyrażeń jest bardzo odmienny. Pierwsze jest koniunkcją negacji, a drugie – negacją koniunkcji.

Podsumowanie

Do symbolizacji nigdy nie należy podchodzić zbyt mechanicznie. Jest wiele pokrewnych sobie schematów i zawsze musimy się zastanowić, co one znaczą. Zestawmy ze sobą cztery zdania:

(1) Radek i Ludwik obaj nie mają teki. [1] ~R • ~L
(2) Radek i Ludwik nie mają obaj teki. [2] ~(R • L)
(3) Zarówno Radek, jak i Ludwik nie ma teki. [3] ~R • ~L
(4) Ani Radek, ani Ludwik nie ma teki. [4] ~R • ~L

L: ***L***udwik ma tekę.
R: ***R***adek ma tekę.

Podsumowując:

nieprawda, że zarówno *p*, jak i *q*	~(*p* • *q*)
ani nie *p*, ani nie *q* (zarówno nie *p*, jak i nie *q*)	~*p* • ~*q*

4.1.4. Prawa de Morgana

Obydwa wyrażenia (‘nie zarówno *p*, jak i *q*’ i ‘ani nie *p*, ani nie *q*’) można ująć nie tylko za pomocą spójnika negacji i spójnika koniunkcji, lecz również za pomocą spójnika negacji i spójnika alternatywy. Okazuje się bowiem, że schemat zdaniowy $\sim(p \bullet q)$ jest równoważny schematowi $\sim p \vee \sim q$, natomiast schemat zdaniowy $\sim p \bullet \sim q$ jest równoważny schematowi $\sim(p \vee q)$. Równoważności te znane są jako prawa de Morgana.

Prześledźmy to na intuicyjnych przykładach. Niech dane będzie prawdziwe skądinąd zdanie:

(1) Teoria Freuda i teoria Junga nie mogą być obie prawdziwe.

Jeżeli teoria Freuda i teoria Junga nie mogą być obie prawdziwe, to znaczy, że przynajmniej jedna z nich jest fałszywa – albo teoria Freuda, albo teoria Junga. Okazuje się (wykażemy to w późniejszych rozdziałach), że zdania postaci (1) są logicznie równoważne zdaniom postaci (2):

(2) Albo teoria Freuda, albo teoria Junga jest fałszywa.

Zdaniom tym odpowiadają logicznie równoważne formuły:

[1] $\sim(F \bullet J)$
[2] $\sim F \vee \sim J$

F: Teoria ***F***reuda jest prawdziwa.
J: Teoria ***J***unga jest prawdziwa.

Uwaga: Częstym błędem popełnianym przez studentów jest przypuszczenie, że zdanie (1) (‘Teoria Freuda i teoria Junga nie mogą być obie prawdziwe’) jest równoważne zdaniu ‘Albo teoria Freuda albo teoria Junga jest prawdziwa’. Jest to jednak przekonanie mylne. Łatwo się o tym przekonać, gdy wyobrazimy sobie zagorzałego przeciwnika psychoanalizy wszelkiej maści (np. jakiegoś behawiorystę), który z lubością w głosie stwierdza „Teoria Freuda i teoria Junga nie mogą być obie prawdziwe”, a przecież wcale nie ma na myśli tego, że jedna z nich jest prawdziwa.

Rozważmy teraz przykład ilustrujący zachodzenie podobnej równoważności dla wyrażenia ‘ani nie *p*, ani nie *q*’. Załóżmy, że pewien wykładowca psychologii informuje studentów o tym, że:

(3) Nie jest prawdziwa ani teoria Watsona, ani teoria Skinnera.

Na to wstaje student Roztropek i mówi „Chce Pan Profesor przez to powiedzieć, że prawdziwa jest albo teoria Watsona, albo teoria Skinnera, tak?”. „Nie!” – grzmi Profesor z katedry. Właśnie fałszem byłoby stwierdzić, że prawdziwa jest teoria Watsona bądź teoria Skinnera – nie jest prawdziwa ani jedna, ani druga. Zdaniem logicznie równoważnym zdaniu (3) jest zatem zdanie (4):

(4) Nieprawda, że prawdziwa jest teoria Watsona bądź teoria Skinnera.

Zdaniom tym odpowiadają logicznie równoważne formuły:

[3] $\sim W \bullet \sim S$
[4] $\sim(W \vee S$

S: Teoria ***S***kinnera jest prawdziwa.
W: Teoria ***W***atsona jest prawdziwa.

Ogólnie:

nie zarówno *p*, jak i *q*	$\sim(p \bullet q)$	$\sim p \vee \sim q$
ani nie *p*, ani nie *q*	$\sim p \bullet \sim q$	$\sim(p \vee q)$

4.1.5. Wieloznaczność formy ‘nie *p* lub *q*’

Rozważmy następującą wypowiedź:

(1) Nie zjem karpia lub sandacza.

Mogłoby się wydawać, że struktura logiczna tego zdania odpowiada strukturze powierzchniowej, tj. że jest to negacja alternatywy.

(1_N) Nieprawda, że zjem albo karpia, albo sandacza. (Równoważnie: Nie zjem ani karpia, ani sandacza).
[1_N] $\sim(K \vee S)$
[$1_N'$] $\sim K \bullet \sim S$

Wydaje się jednak, że najbardziej naturalnie jest interpretować wypowiedź (1) jako alternatywę negacji (lub – równoważnie na mocy prawa de Morgana – jako negację koniunkcji):

(1_A) Albo nie zjem karpia, albo nie zjem sandacza.
[1_A] $\sim K \lor \sim S$
[$1_A'$] $\sim(K \bullet S)$

Sprawa to niebagatelna, zdania (1_N) i (1_A) bowiem nie są wcale równoważne. W zdaniu (1_N) wypowiadający te słowa twierdzi, że nie zje ani karpia, ani sandacza (na pewno nie zje ani jednego, ani drugiego), natomiast w zdaniu (1_A) twierdzi, że nie zje obydwu naraz (na pewno nie zje jednego z nich).

Bywa, że z kontekstu jasna jest interpretacja wręcz przeciwna. Rozważmy następujący przepis Kodeksu Pracy:

> Art. 100 §1. Pracownik jest obowiązany wykonywać pracę sumiennie i starannie oraz stosować się do poleceń przełożonych, które dotyczą pracy, *jeżeli nie są one sprzeczne z przepisami prawa lub z umową o pracę.*

W tym wypadku jednak zdanie będące poprzednikiem tej implikacji, a więc zdanie:

(2) Polecenia przełożonych nie są sprzeczne z przepisami prawa lub z umową o pracę.

trzeba interpretować jako równoważne zdaniu:

(2_N) Polecenia przełożonych nie są sprzeczne z przepisami prawa, ani z umową o pracę.
[2_N] $\sim(P \lor U)$
[$2_N'$] $\sim P \bullet \sim U$

P: Polecenia przełożonych są sprzeczne z ***p***rzepisami prawa.
U: Polecenia przełożonych są sprzeczne z ***u***mową o pracę.

bo przecież tylko w tym wypadku sensowne jest oczekiwać od pracownika, by się do poleceń przełożonych stosował. Alternatywna interpretacja zdania (2):

(2_A) Polecenia przełożonych albo nie są sprzeczne z przepisami prawa albo nie są sprzeczne z umową o pracę.
[2_A] $\sim P \lor \sim U$
[$2_A'$] $\sim(P \bullet U)$

dopuszczałaby sytuację, w której np. polecenie byłoby niesprzeczne z umową o pracę, ale sprzeczne z przepisami prawa. W takim jednak wypadku nie byłoby przecież sensowne oczekiwać od pracownika podporządkowania się poleceniom!

To, że forma ‘nie … lub …’ może mieć te dwie interpretacje jest wystarczającym powodem, aby jej unikać i doprecyzowywać za każdym razem, o którą interpretację chodzi. Rozważmy jeszcze jeden przykład takiej chwiejności:

(6) Jeżeli Zuzia nie będzie albo się odchudzać, albo ćwiczyć, to przytyje.

Jest to zdanie niejednoznaczne – możemy mieć na myśli jedno z dwóch zdań:

(3_N) Jeżeli Zuzia nie będzie ani się odchudzać, ani ćwiczyć, to przytyje.
[3_N] $\sim(Ć \lor O) \rightarrow P$
[$3_N'$] $(\sim Ć \bullet \sim O) \rightarrow P$

Ć: Zuzia będzie ***ć***wiczyć.
O: Zuzia będzie się ***o***dchudzać.
P: Zuzia ***p***rzytyje.

(3_A) Jeżeli Zuzia albo nie będzie się odchudzać, albo nie będzie ćwiczyć, to przytyje.
[3_A] $(\sim Ć \lor \sim O) \rightarrow P$
[$3_A'$] $\sim(Ć \bullet O) \rightarrow P$

Ćwiczenie 4.A „ani-ani *vs* nie-obydwa”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań, stosując interpretację wyrażeń ‘ani …, ani …’ oraz ‘nie zarazem … i …’ za pomocą (i) negacji i koniunkcji, (ii) negacji i alternatywy. (iii) Głośno przeczytaj obie parafrazy zdania wyjściowego; w zaznaczonym przykładzie należy przeczytać ‘Nieprawda, że Tomek dostanie dwójkę, oraz nieprawda, że Tomek dostanie piątkę’ oraz ‘Nieprawda, że Tomek dostanie albo dwójkę, albo piątkę’. (Nie ignoruj zadania (iii) – pozwala ono na utrwalenie odpowiednich struktur). (*Rozwiązania*, s. 316-317).

C: Tomek dostanie ***c***zwórkę. **P**: Tomek dostanie ***p***iątkę.
D: Tomek dostanie ***d***wójkę. **T**: Tomek dostanie ***t***rójkę.

I.		(i)	(ii)
(a)	Tomek nie dostanie ani dwójki, ani piątki.		
(b)	Tomek nie dostanie jednocześnie dwójki i piątki.		
(c)	Tomek zarówno nie dostanie dwójki, jak i nie dostanie piątki.		
(d)	Tomek nie dostanie ani dwójki, ani trójki.		
(e)	Tomek nie dostanie zarazem trójki i dwójki.		
(f)	Tomek nie dostanie ani dwójki, ani trójki, ani czwórki.		
(g)	Jeżeli Tomek nie dostanie trójki, to nie dostanie ani czwórki, ani piątki.		
(h)	Jeżeli Tomek nie dostanie ani piątki, ani czwórki, to dostanie trójkę.		

H: Stefan ***H***ula wygra Puchar Świata. **O**: Mamy szanse na medal ***o***limpijski.
M: Adam ***M***ałysz wygra Puchar Świata. **S**: Kamil ***S***toch wygra Puchar Świata.

II.		(i)	(ii)
(a)	Pucharu Świata nie wygrają jednocześnie Adam Małysz i Kamil Stoch.		
(b)	Pucharu Świata nie wygra ani Stefan Hula, ani Kamil Stoch.		
(c)	Ani Stefan Hula, Kamil Stoch, ani nawet Adam Małysz nie wygra Pucharu Świata.		
(d)	Jeżeli Adam Małysz nie wygra Pucharu Świata, to nie wygrają go ani Kamil Stoch, ani Stefan Hula.		
(e)	Jeżeli Adam Małysz wygra Puchar Świata, to nie wygrają go ani Kamil Stoch, ani Stefan Hula.		
(f)	Jeżeli ani Małysz, ani Hula nie wygra Pucharu Świata, to nie mamy szans na medal olimpijski.		
(g)	Ani Hula, ani Stoch nie wygra Pucharu Świata, ale mimo to mamy jeszcze szanse na medal olimpijski.		
(h)	Żaden z naszych trzech skoczków nie wygra Pucharu Świata. (por. też §4.6)		
(i)	Nie wszyscy z naszych trzech skoczków wygrają Puchar Świata. (por. też §4.6)		

B: Teoria ***B***ema jest prawdziwa.	**H**: Teoria ***H***eidera jest prawdziwa.
F: Teoria ***F***estingera jest prawdziwa.	**R**: Teoria ***R***ottera jest prawdziwa.

III.

		(i)	(ii)
(a)	Ani teoria Festingera, ani teoria Bema nie jest prawdziwa.		
(b)	Teoria Festingera i teoria Bema nie są obie prawdziwe.		
(c)	Teoria Festingera i teoria Bema obie są nieprawdziwe.		
(d)	Nieprawdziwa jest zarówno teoria Festingera, jak i teoria Bema.		
(e)	Ani teoria Festingera, ani teoria Heidera nie jest nieprawdziwa.		
(f)	Teorie Bema i Festingera nie są obie nieprawdziwe.		
(g)	Fałszywa jest albo teoria Festingera, albo teoria Heidera, o ile prawdziwa jest albo teoria Bema albo teoria Rottera.		
(h)	Jeżeli teorie Heidera i Festingera nie są obie prawdziwe, to teorie Bema i Rottera też nie są obie prawdziwe.		
(i)	Jeżeli ani teoria Heidera, ani teoria Festingera nie jest prawdziwa, to prawdziwa jest teoria Bema.		
(j)	Ani teorie Bema i Rottera nie są obie prawdziwe, ani teorie Festingera i Heidera nie są obie prawdziwe.		

Porada babuni

Przy bardziej złożonych symbolizacjach możecie mieć trochę kłopotów. Na razie próbujcie stosować poznane schematy i podstawiać pod nie odpowiednie zdania. Poczucie pełnej kontroli nad formułami logicznymi zyskacie dopiero po opanowaniu metod sprawdzania logicznej równoważności formuł logicznych czy to za pomocą metody matrycowej, czy to za pomocą metod dowodzenia.

4.2. ‘Albo *p*, albo *q*, ale nie jedno i drugie’

Powiedzieliśmy już, że spójnik alternatywy ‘$\vee$’ jest spójnikiem alternatywy zwykłej. Bywa jednak, że czasami chcemy użyć alternatywy rozłącznej. Możemy to zrobić za pomocą spójnika alternatywy zwykłej przez dodanie odpowiedniej klauzuli wykluczającej.

(1) Albo gotuję obiad, albo zmywam, ale nie jedno i drugie.

Zdanie to można wyrazić przejrzyściej, rozbudowując ostatni człon ‘nie jedno i drugie’:

(1′) Albo gotuję obiad, albo zmywam, ale nie będę zarazem gotować, jak i zmywać.

Głównym spójnikiem jest tu ‘ale’ i zdanie to możemy oddać w następujący sposób:

[1] $(G \vee Z) \bullet {\sim}(G \bullet Z)$

G: ***G***otuję obiad.
Z: ***Z***mywam.

Ogólnie:

albo *p* albo *q*, ale nie jedno i drugie	$(p \vee q) \bullet {\sim}(p \bullet q)$

Oczywiście zdanie (1) można też oddać za pomocą formuły równoważnej:

[1] $(G \vee Z) \bullet ({\sim}G \vee {\sim}Z)$

Ćwiczenie 4.B „albo-albo-ale-nie-jedno-i-drugie”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań (w przykładach (a)-(d) zamiast legendy zaznaczone zostały pierwsze litery, które należy uznać za stałe zdaniowe przypisane odpowiednim zdaniom prostym; w przykładach (e)-(h) skorzystaj z podanej legendy). (*Rozwiązania*, s. 317).

A: Teoria ***A***dlera jest prawdziwa.
F: Teoria ***F***reuda jest prawdziwa.
C: Staś pójdzie do pracy w ***c***zwartek.
W: Staś pójdzie do pracy we ***w***torek.

(a)	Tomek dostanie ***D***wóję lub ***T***róję, ale nie jedno i drugie.	
(b)	Albo ***P***rzytyję, albo ***S***chudnę, ale nie jedno i drugie.	
(c)	W meczu zagra ***D***udek lub ***B***oruc, ale nie obaj.	
(d)	Puchar Świata zdobędzie ***M***ałysz lub ***J***acobsen, ale nie obaj.	
(e)	Albo teoria Freuda, albo teoria Adlera jest prawdziwa, ale nie są prawdziwe obie naraz.	
(f)	Fałszywa jest albo teoria Freuda, albo teoria Adlera, ale nie są fałszywe obie naraz.	
(g)	Staś pójdzie do pracy albo w czwartek, albo we wtorek, ale nie w oba dni.	
(h)	Staś nie pójdzie do pracy albo w czwartek, albo we wtorek, ale nie w oba dni.	

4.3. '*r*, chyba że *p*'

Zastanówmy się, co – prócz kłopotów rodzinnych – znaczy wypowiedź:

R: ***R***ozwiodę się.
Z: ***Z***mienisz się.

(1) Rozwiodę się, chyba że się zmienisz.

Zdanie to można byłoby wyrazić na dwa – jak się okazuje logicznie równoważne – sposoby:

(2) Jeżeli się nie zmienisz, to się rozwiodę.
(3) Albo się zmienisz, albo się rozwiodę.

W symbolach:

[2] $\sim Z \rightarrow R$
[3] $Z \vee R$

Zwróćmy uwagę na dwie sprawy. Po pierwsze, jeżeli oddajemy zdanie (1) jako implikację (2), to zdanie występujące po wyrażeniu 'chyba że' zostaje zanegowane; jeżeli oddajemy zdanie (1) jako alternatywę (3), nie dodajemy negacji. Po drugie, zdanie *Z* występujące w drugim członie zdania o kształcie '*R*, chyba że *Z*' zmienia kolejność względem zdania *R* w implikacji (2), gdzie znajduje się w poprzedniku. Ogólnie:

r, chyba że *p*	$p \vee r$	$\sim p \rightarrow r$

Trzeba jednak wyraźnie podkreślić, że ta dość powszechnie przyjęta interpretacja 'chyba że' nie oddaje w pełni znaczenia tego spójnika. Alternatywa jest przemienna: '$p \vee r$' jest logicznie równoważne '$r \vee p$'. Można mieć jednak pewne wątpliwości, czy zdanie 'Rozwiodę się, chyba że się zmienisz' jest równoważne zdaniu 'Zmienisz się, chyba że się rozwiodę'. Docieramy w tym punkcie po raz kolejny po prostu do faktu, że logika zdań pozwala nam na oddanie bardzo zubożonego znaczenia zdań języka naturalnego, a mianowicie tej części ich znaczenia, która jest związana z warunkami prawdziwości.

Ćwiczenie 4.C „chyba że"

Podaj zapis symboliczny następujących zdań, stosując interpretację 'chyba że' za pomocą (i) alternatywy, (ii) implikacji (zamiast legend podkreślone zostały pierwsze litery, które należy uznać za stałe zdaniowe przypisane odpowiednim zdaniom prostym). (iii) Głośno przeczytaj alternatywną i implikacyjną parafrazę zdania wyjściowego; w zaznaczonym przykładzie należy przeczytać 'Albo Tomek zacznie się uczyć, albo dostanie dwóję' oraz 'Jeżeli Tomek nie zacznie się uczyć, to dostanie dwóję'. (Nie ignoruj zadania (iii) – pozwala ono na utrwalenie odpowiednich struktur). (*Rozwiązania*, s. 317-318).

		(i)	(ii)
(a)	Tomek dostanie ***D***wóję, chyba że zacznie się ***U***czyć.		
(b)	***P***rzytyję, chyba że zacznę się ***O***dchudzać.		
(c)	Na pewno ***Z***dasz logikę, chyba że będziesz zbyt ***L***eniwy, by robić ćwiczenia.		
(d)	Nie będziesz oglądać ***T***elewizji, chyba że odrobisz l***E***kcje.		
(e)	Teoria ***F***reuda jest prawdziwa, chyba że albo teoria ***J***unga, albo teoria ***A***dlera jest prawdziwa.		
(f)	***B***eata pójdzie z Lechem na randkę, chyba że albo po raz kolejny Lech się ***S***późni, albo znów nie przyniesie jej ***K***wiatów.		
(g)	Lech wygłosi ***P***rzemówienie lub ***O***rędzie, chyba że ***K***ancelaria nie zatrudni specjalisty od pisania przemówień**.**		

4.4. ‘*r*, jeśli *p*’ *vs* ‘*r*, tylko jeśli *p*’ (TRUDNE)

Porada babuni

Ponad połowa studentów źle symbolizuje zdania zawierające warunek konieczny wyrażony za pomocą spójnika ‘tylko jeśli’. Zanim przejdziecie do tego podrozdziału prześpijcie się, wyjdźcie z psem na spacer, napijcie się dobrej kawy lub herbaty, a i tak czeka Was sporo wrażeń. Moja głęboka rada: przeczytajcie, zrozumcie, wykujcie, nie opuśćcie *żadnego* ćwiczenia.

4.4.1. ‘*r*, jeśli *p*’

Z wystąpieniem wyrażenia ‘jeśli’ nie powinniście już mieć kłopotów. Weźmy przykład:

(1) Zdasz test, jeśli zdobędziesz 60 punktów.

Jak już podkreślaliśmy, zdanie występujące po ‘jeśli’ określa warunek – w tym wypadku – zdania testu, a zatem stanowi poprzednik implikacji. Widać to wyraźniej, jeżeli sparafrazujemy zdanie (1):

(1′) Jeżeli zdobędziesz 60 punktów, to zdasz test.
[1] S → T

S: Zdobędziesz ***s***ześćdziesiąt punktów.
T: Zdasz ***t***est.

4.4.2. ‘*r*, tylko jeśli *p*’

Do tej pory wszystko było zrozumiałe. Od tej pory jednak potrzeba świeżego umysłu i samozaparcia. Spójnik ‘tylko jeśli’ doprowadza do szewskiej pasji *wszystkich* – bez wyjątków. Zdanie występujące po ‘tylko jeśli’ wcale bowiem nie stanowi poprzednika implikacji, lecz jest raczej jej następnikiem.

p jeżeli *r*	jeżeli *r*, to *p*	$r \rightarrow p$
p tylko jeżeli *r*	Jeżeli *p*, to [znaczy, że] *r* Jeżeli nie *r*, to nie *p*	$p \rightarrow r$ $\sim r \rightarrow \sim p$

Nie jest to bynajmniej od razu oczywiste i będziecie musieli *przełamać* naturalną tendencję do zlewania ‘jeśli’ oraz ‘tylko jeśli’. Przyjrzyjmy się trzem intuicyjnym przykładom. W każdym z nich podany jest najpierw błąd, który – gwarantuję! – popełnicie na teście, o ile nie utrwalicie sobie różnicy między tymi spójnikami w ćwiczeniach. Pamiętajcie, że musicie sobie zdawać sprawę z tego błędu i nauczyć się go jako błąd rozpoznawać.

Przykład 1

(2) Wygrasz na loterii, <u>tylko jeśli</u> *kupisz bilet*.

B: Kupisz ***b***ilet.
W: ***W***ygrasz na loterii.

Niewątpliwie jest prawdą, że można wygrać na loterii tylko wtedy, gdy kupi się bilet. Błędem – choć naturalnym – byłoby potraktować zdanie występujące po ‘tylko jeśli’ jako poprzednik implikacji, a więc:

(3) <u>Jeżeli</u> *kupisz bilet*, <u>to</u> wygrasz na loterii.
[3] B → W

Zdanie (3) jest ewidentnie – na nieszczęście dla wszystkich graczy – fałszywe. Jeżeli zdanie (2) nie znaczy tyle, co zdanie (3), to co właściwie znaczy? Spróbujmy odwrócić kierunek implikacji:

[2] W → B

i przeczytajmy tę implikację w następujący sposób:

(2′) Jeżeli wygrałeś na loterii, to [znaczy, że] *kupiłeś bilet.*

gdyż tylko jeśli kupisz bilet, możesz wygrać na loterii. Innymi słowy (i jest to logicznie równoważne zdanie):

(4) Jeżeli nie *kupisz biletu*, to nie wygrasz na loterii.
[4] ~B → ~W

bo wygrasz na loterii, tylko jeśli kupisz bilet. Zdania (2′) oraz (4) oddają znaczenie zdania (2).

Przykład 2

(5) Jest matką tylko jeśli *jest kobietą*.

K: Jest ***k***obietą.
M: Jest ***m***atką.

Ponownie jest to zdanie ewidentnie prawdziwe, a równie ewidentnie fałszywe jest zdanie, gdzie zapisane kursywą zdanie (występujące po ‘tylko jeśli’) znajduje się w poprzedniku:

(6) Jeżeli *jest kobietą*, to jest matką.
[6] K → M

Przecież nie każda kobieta jest matką! Znaczenie zdania (5) oddaje:

[5] M → K
(5′) Jeżeli jest matką, to [znaczy, że] *jest kobietą.*

oraz – logicznie równoważne zdaniu (5) – zdanie:

(7) Jeżeli nie *jest kobietą*, to nie jest matką.
[7] ~K → ~M

Przykład 3

(8) Pada deszcz tylko jeśli *niebo jest zachmurzone.*.

N: ***N***iebo jest zachmurzone.
P: ***P***ada deszcz.

Ponownie jest to zdanie ewidentnie prawdziwe (nawet jeśli świeci słońce, to żeby padał deszcz konieczne są chmury), a równie ewidentnie fałszywe jest zdanie, gdzie zapisane kursywą zdanie znajduje się w poprzedniku:

(9) Jeżeli *niebo jest zachmurzone*, to pada deszcz.
[9] H → P

Przecież nie z każdej chmury pada deszcz! Znaczenie zdania (8) oddaje:

[8] P → H
(8′) Jeżeli pada deszcz, to [znaczy, że] *niebo jest zachmurzone.*

oraz – logicznie równoważne zdaniu (8) – zdanie:

(7) Jeżeli *niebo* nie *jest zachmurzone*, to nie pada deszcz.
[7] ~H → ~P

p jeżeli *r*	jeżeli *r*, to *p*	*r* → *p*
p tylko jeżeli *r*	Jeżeli *p*, to [znaczy, że] *r* Jeżeli nie *r*, to nie *p*	*p* → *r* ~*r* → ~*p*

Porada babuni

Aby nauczyć się symbolizować zdania zawierające ‘tylko jeśli’, musicie zaakceptować fakt, że wykazujecie się skłonnością do popełniania «naturalnego błędu» i uznania, że zdanie występujące po ‘tylko jeśli’ określa warunek, a zatem musi się znaleźć w poprzedniku implikacji. Ów naturalny błąd spowodowany jest po części trafną intuicją. Nie możecie jednak dać jej bezkrytycznego posłuchu. Musicie ją ujarzmić. Można to zrobić na dwa sposoby:

(1) Trzeba pamiętać, że w zdaniach zawierających ‘tylko jeśli’ jest właśnie odwrotnie, niż naturalnie byśmy przyjęli. Zdanie występujące po ‘tylko jeśli’ nie jest poprzednikiem, lecz następnikiem implikacji. Zatem zdanie o kształcie ‘p tylko jeśli q’ symbolizujemy jako ‘$p \rightarrow q$’ (jeżeli p, to [znaczy, że] q).

(2) Można też dać wiarę swojej intuicji, że zdanie występujące po ‘tylko jeśli’ powinno się znajdować w poprzedniku, ale wtedy musicie pamiętać, że zarówno zdanie występujące przed ‘tylko jeśli’, jak i zdanie występujące po ‘tylko jeśli’ muszą być zanegowane. Zatem zdanie postaci ‘p tylko jeśli q’ symbolizujemy jako ‘$\sim q \rightarrow \sim p$’.

Powinniście opanować obie symbolizacje, ale w szczególności tę wymienioną w punkcie (1). Jest ona dużo bardziej przydatna w skomplikowanych symbolizacjach, gdzie nie warto się obciążać dodatkowymi decyzjami, dotyczącymi tego, gdzie wstawić znaki negacji.

Ćwiczenie 4.D „tylko jeżeli – 1”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań. Podać symbolizację (i) za pomocą implikacji oraz (ii) za pomocą negacji i implikacji (zamiast legend podkreślone zostały pierwsze litery, które należy uznać za stałe zdaniowe przypisane odpowiednim zdaniom prostym). (iii) Zapisz obie parafrazy zdania wyjściowego i – po sprawdzeniu z *Rozwiązaniami* (s. 318-319) – głośno je odczytaj (nie ignoruj zadania (iii) – pozwala ono na utrwalenie odpowiednich struktur).

(a) Teoria ***F***reuda jest prawdziwa, tylko jeśli istnieje ***N***ieświadomość.

F → N	Jeżeli teoria Freuda jest prawdziwa, to [znaczy, że] istnieje nieświadomość.
~N → ~F	Jeżeli nie istnieje nieświadomość, to teoria Freuda nie jest prawdziwa.

(b) ***M***arian czerwieni się, tylko wtedy gdy ***R***óża patrzy na niego.

(c) ***Z***aliczysz logikę, tylko jeżeli ***P***rzyjdziesz na egzamin.

(d) ***Z***aliczysz logikę, tylko jeżeli będziesz ***S***ystematycznie pracować.

(e) Adam Małysz wygra ***Z***awody tylko wtedy, gdy weźmie w nich ***U***dział.

(f) Puszek jest c***H***omikiem, tylko jeśli jest ***S***sakiem.

(g) Puszek jest c***H***omikiem, tylko jeśli ma ***T***orby polikowe.

(h) Puszek jest c***H***omikiem, tylko jeśli ma cztery ***Ł***apki.

(i) ***U***toniesz, tylko jeżeli znajdziesz się w ***W***odzie.

(j) ***O***dkurzysz, tylko jeśli ***W***łączysz odkurzacz.

(k) Prezydent RP będzie godnie ***R***eprezentował Polskę tylko wtedy, gdy pojawi się na ***S***potkaniu.

(l) Puszek jest c***H***omikiem, tylko jeśli nie ma ***D***zioba.

(m) ***Z***aliczysz logikę, tylko jeżeli zarówno wszystko z***R***ozumiesz, jak i będziesz poprawnie wykonywać wszystkie ***Ć***wiczenia.

Ćwiczenie 4.E „tylko jeżeli – 2”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań. Podać symbolizację (i) za pomocą implikacji oraz (ii) za pomocą implikacji i negacji. (iii) Po sprawdzeniu z *Rozwiązaniami* (s. 319-320), głośno odczytaj równoważne symbolizacje (nie ignoruj zadania (iii) – pozwala ono na utrwalenie odpowiednich struktur).

p, tylko jeśli *r*	(i) $p \rightarrow r$ (ii) $\sim r \rightarrow \sim p$

A: ***A***nia jest na diecie.	**R**: Kalinka ***r***egularnie ćwiczy.
K: ***K***alinka jest na diecie.	**Z**: Kalinka jest ***z***drowa.
L: ***L***idka jest na diecie.	**W**: Ania jest zdro***w***a.

(a) Kalinka będzie zdrowa, tylko jeśli będzie regularnie ćwiczyć.
(i)
(ii)

(b) Kalinka będzie zdrowa, tylko jeśli albo przejdzie na dietę, albo będzie regularnie ćwiczyć.
(i)
(ii)

(c) Lidka przejdzie na dietę tylko wtedy, gdy Kalinka i Ania obie będą na diecie.
(i)
(ii)

(d) Kalinka przejdzie na dietę lub będzie regularnie ćwiczyć, tylko jeśli Ania przejdzie na dietę.
(i)
(ii)

(e) Ania przejdzie na dietę tylko wtedy, gdy Lidka – lecz nie Kalinka – przejdzie na dietę.
(i)
(ii)

(f) Kalinka zacznie regularnie ćwiczyć, tylko jeżeli nie przejdzie na dietę.
(i)
(ii)

(g) Tylko jeśli Ania przejdzie na dietę, to przejdzie na dietę Lidka.
Parafraza:
(i)
(ii)

(h) Tylko jeżeli Kalinka będzie zdrowa lub będzie regularnie ćwiczyć, to Ania przejdzie na dietę.
Parafraza:
(i)
(ii)

(i) Kalinka i Ania będą zdrowe, tylko jeśli obie przejdą na dietę.
(i)
(ii)

Ćwiczenie 4.F „tylko jeżeli – 3”

Niech w pewnym kursie logiki obowiązuje zasada, że ktoś, kto ma więcej niż 90%, a mniej niż 100% na egzaminie końcowym, otrzyma ocenę bardzo dobrą. Jeżeli student otrzyma 100%, to otrzymuje ocenę celującą. Podaj wartość logiczną następujących zdań mówiących o tym kursie logiki. Zdania zawierające spójnik ‘tylko jeżeli’ przedstaw w dwóch interpretacjach: za pomocą implikacji (łatwiej jest wówczas ułożyć zdanie w czasie przeszłym) oraz za pomocą implikacji i negacji. (*Rozwiązania*, s. 320).

(a)	Otrzymasz ocenę bardzo dobrą, *jeżeli* dostaniesz 95% na egzaminie.	○prawdziwe ○fałszywe
	Jeżeli , to	
(b)	Otrzymasz ocenę bardzo dobrą, *tylko jeżeli* dostaniesz 95% na egzaminie.	○prawdziwe ○fałszywe
(c)	Otrzymasz ocenę celującą, *jeżeli* dostaniesz 100% na egzaminie.	○prawdziwe ○fałszywe
(d)	Otrzymasz ocenę celującą, *tylko jeżeli* dostaniesz 100% na egzaminie.	○prawdziwe ○fałszywe

4.5. Warunek konieczny i warunek dostateczny

Schemat implikacji ‘*r* jeśli *p*’ odczytujemy też: ‘to, że *p* jest warunkiem dostatecznym dla tego, że *r*’. Schemat implikacji ‘*r* tylko jeśli *p*’ odczytujemy: ‘to, że *p* jest warunkiem koniecznym dla tego, że *r*’. Prześledźmy to na wcześniej podanych przykładach:

(1) Zdasz test, jeśli zdobędziesz 60 punktów.

Zdobycie 60 punktów jest warunkiem dostatecznym zdania testu, ale przecież nie koniecznym: można zdać test, nie zdobywając 60 punktów, lecz np. 100 punktów.

(2) Wygrasz na loterii, tylko jeśli *kupisz bilet*.

Kupienie biletu jest warunkiem koniecznym wygrania na loterii, lecz nie warunkiem dostatecznym. Bez kupienia biletu nie wygra się na loterii, lecz kupienie biletu nie wystarcza (nie gwarantuje) wygranej.

(5) Jest matką, tylko jeśli *jest kobietą*.

Bycie kobietą jest warunkiem koniecznym dla bycia matką (jeśli pewna osoba nie jest kobietą, to nie jest matką; jeżeli jest matką, to znaczy, że musi być kobietą), lecz bycie kobietą nie warunkiem dostatecznym dla bycia matką (Jeśli pewna osoba jest kobietą, to wcale nie musi być matką).

(8) Pada, tylko jeśli *niebo jest zachmurzone*.

Wystąpienie chmur jest warunkiem koniecznym dla opadów (jeżeli chmur nie ma, to nie pada; jeżeli pada, to znaczy, że niebo jest zachmurzone), lecz nie warunkiem dostatecznym (wystąpienie chmur nie gwarantuje opadów).

Ogólnie:

p wtedy, gdy r	jeżeli r, to p	to, że r jest warunkiem dostatecznym dla tego, że p	$r \rightarrow p$
p tylko wtedy, gdy r	jeżeli p, *to r* jeżeli nie r, to nie p	to, że r jest warunkiem koniecznym dla tego, że p	$p \rightarrow r$ $\sim r \rightarrow \sim p$
p wtedy i tylko wtedy, gdy r		to, że r jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla tego, że p	$r \equiv p$

Porada babuni

Schematy te należy zrozumieć, a następnie wykuć!

Ćwiczenie 4.G „warunek konieczny i dostateczny – 1"

Dane są pewne zdania. Określ, jakie warunki wyrażają. (*Rozwiązania*, s. 320-321).

(a) Deszcz pada, tylko jeśli są chmury.

To, że są chmury, jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, że pada deszcz.

(b) Deszcz pada, jeśli mży.

To, że mży, jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, że pada deszcz.

(c) Puszek jest chomikiem, tylko jeśli ma torby policzkowe.

To, że Puszek ma torby policzkowe, jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, że Puszek jest chomikiem.

(d) Puszek jest chomikiem jeśli ma torby policzkowe.

To, że Puszek ma torby policzkowe jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, że Puszek jest chomikiem.

(e) Puszek jest chomikiem wtedy i tylko wtedy, gdy ma torby policzkowe.

To, że Puszek ma torby policzkowe, jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, że Puszek jest chomikiem.

(f) Zuza zda logikę, jeżeli dostanie 55% na teście.

Otrzymanie 55% na teście jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, by Zuza zdała logikę.

(g) Zuza nie otrzyma oceny bardzo dobrej, jeżeli dostanie 85% na teście.

Otrzymanie 85% na teście jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, by Zuza nie otrzymała oceny bardzo dobrej.

(h) Zuza otrzyma ocenę celującą, jeżeli, ale tylko jeżeli, dostanie 100% na teście.

Otrzymanie 100% na teście jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym tego, by Zuza otrzymała ocenę celującą.

(i) Waleria schudnie, tylko jeżeli przejdzie na dietę.

Przejście Walerii na dietę jest warunkiem ○ koniecznym ○ dostatecznym jej schudnięcia.

Ćwiczenie 4.H „warunek konieczny i dostateczny – 2”

Zauważ, że zdania kształtu:

(a) *r* jeśli *s*
(b) *s* tylko jeśli *r*

można przedstawić za pomocą implikacji $s \rightarrow r$. Jeżeli tak, to implikacja ta wyraża:

(a) to, że *s* jest warunkiem dostatecznym dla tego, że *r* (*r* jeśli *s*), oraz
(b) to, że *r* jest warunkiem koniecznym dla tego, że *s* (*s* tylko jeśli *r*)

Prześledź, że tak jest, na podanych przykładach, formułując odpowiednie zdania według wzoru. (*Rozwiązania*, s. 321).

(a) Jeżeli	Zario jest pudlem	to	jest psem.
	Zario jest psem	jeżeli	Zario jest pudlem.
	Zario jest pudlem	tylko jeżeli	Zario jest psem.
	Bycie pudlem	jest warunkiem dostatecznym	bycia psem.
	Bycie psem	jest warunkiem koniecznym	bycia pudlem.

(b) Jeżeli	Arysto jest persem	to	jest kotem.
		jeżeli	
		tylko jeżeli	
		jest warunkiem dostatecznym	
		jest warunkiem koniecznym	

(c) Jeżeli	pada deszcz	to	są chmury
		jeżeli	
		tylko jeżeli	
		jest warunkiem dostatecznym	
		jest warunkiem koniecznym	

(d) Jeżeli		to	
		jeżeli	
	Burek szczeka	tylko jeżeli	Burek jest psem.
		jest warunkiem dostatecznym	
		jest warunkiem koniecznym	

(e) Jeżeli		to	
	Puszek ma torby polikowe	jeżeli	jest chomikiem.
		tylko jeżeli	
		jest warunkiem dostatecznym	
		jest warunkiem koniecznym	

(f) Jeżeli		to	
		jeżeli	
	J. jest politykiem	tylko jeżeli	jest nieuczciwy.
		jest warunkiem dostatecznym	
		jest warunkiem koniecznym	

Ćwiczenie 4.I „warunek konieczny i dostateczny – 3”

Uwzględniając informacje zawarte w powyższym ćwiczeniu, określ, jakie warunki wyrażone są przez podane zdania. Zwróć szczególną uwagę na to, co ma być warunkiem czego. Gdzie pomocne, dokonaj zreformułowania podanego zdania. (*Rozwiązania*, s. 322).

(a) Deszcz pada, tylko jeśli są chmury.

To, że są chmury, jest warunkiem	O koniecznym O dostatecznym	tego, że pada deszcz.

(b) Deszcz pada, jeśli mży.

To, że pada deszcz, jest warunkiem	O koniecznym O dostatecznym	tego, że mży.

(c) Ksena jest owczarkiem podhalańskim, tylko jeżeli jest psem.

To, że Ksena jest owczarkiem podhalańskim, jest warunkiem	O koniecznym O dostatecznym	tego, że jest psem.

(d) Mela jest kotem, jeżeli jest persem.

To, że Mela jest kotem, jest warunkiem	O koniecznym O dostatecznym	tego, że jest persem.

(e) Puszek jest chomikiem, jeżeli ma torby polikowe.

To, że Puszek ma torby polikowe, jest warunkiem	O koniecznym O dostatecznym	tego, że Puszek jest chomikiem.

Porada babuni

Pamiętaj, że zdania postaci ‘$p \rightarrow r$’ i ‘$r \rightarrow p$’ nie są sobie logicznie równoważne!

4.6. Eksplikacja wyrażeń kwantyfikujących w logice zdań

4.6.1. ‘Wszyscy’, ‘niektórzy’

Wyrażenia ‘wszyscy’, ‘niektórzy’ itp. to kwantyfikatory, którymi zajmuje się logika kwantyfikatorów. Większość zdań zawierających te wyrażenia nie daje się ująć w języku logiki zdań inaczej niż jako zdania proste. Niemniej jednak niektóre zdania można oddać za pomocą logiki zdań, a mianowicie te, w których wyrażenie ‘wszyscy’ lub ‘niektórzy’ zawężone są do skończonej grupy osób (ew. obiektów).

Niech dana będzie grupa czterech osób: Alicja, Beata, Cezary i Daniel. Gdy mówiąc o tej grupie, powiemy:

(1) Oni wszyscy są na diecie.

mamy na myśli po prostu zdanie:

(1′) Alicja, Beata, Cezary i Daniel są na diecie.

co możemy wyrazić np. jako (pomijam tu nawiasowe permutacje, por. też §3.4.4):

[1a] (A • B) • (C • D)

A: ***A***licja jest na diecie.	**C**: ***C***ezary jest na diecie.
B: ***B***eata jest na diecie.	**D**: ***D***aniel jest na diecie.

Podobnie, gdy jasne jest, że mówimy o tej grupie osób, wówczas zdanie:

(2) Niektórzy z nich są na diecie.

lub zdanie równoważne ‘Przynajmniej jedno z nich jest na diecie’ znaczy tyle, co:

(2″) Alicja, Beata, Cezary lub Daniel jest na diecie.

którego symbolizacją jest np.:

[2] (A ∨ B) ∨ (C ∨ D)

4.6.2. ‘Nikt’, ‘nie wszyscy’

Również negatywne wyrażenia kwantyfikujące daje się oddać w logice zdań pod warunkiem, że ograniczone są one do skończonej i ściśle określonej grupy osób. Załóżmy, że ponownie mówimy o grupie złożonej z czterech osób: Alicji, Beaty, Cezarego i Daniela.

(3) Żadne z nich nie jest na diecie.

Zdanie (3) znaczy tyle, co:

(3′) Ani Alicja, ani Beata, ani Cezary, ani Daniel nie jest na diecie.

które można przedstawić jako (znów pomijamy permutacje nawiasowe):

[3] (~A • ~B) • (~C • ~D)

lub równoważnie – na mocy praw de Morgana – jako:

[3*] ~[(A ∨ B) ∨ (C ∨ D)]

Możemy też wyrazić takie zdanie jak:

(4) Nie wszyscy z nich są na diecie.

Zdanie (4) znaczy tyle, co:

(4′) Alicja, Beata, Cezary, Daniel nie są wszyscy na diecie.

które najlepiej zrozumieć jako negację twierdzenia, że wszyscy oni są na diecie, a więc:

[4] ~[(A • B) • (C • D)]

co jest równoważne – na mocy praw de Morgana – zdaniu:

[4*] (~A ∨ ~B) ∨ (~C ∨ ~D)

Ćwiczenie 4.J „wszyscy-niektórzy”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań przy założeniu, że zdania kwantyfikujące odnoszą się do grupy sześciu osób. (*Rozwiązania*, s. 322).

A: ***A***ndrzej jest uczciwy.	**P**: ***P***rzemysław jest uczciwy.
J: ***J***arosław jest uczciwy.	**R**: ***R***oman jest uczciwy.
L: ***L***ech jest uczciwy.	**Z**: ***Z***bigniew jest uczciwy.

(a) Cała szóstka jest uczciwa.

(b) Przynajmniej jedna osoba z tej szóstki jest uczciwa.

(c) Wszyscy z tej szóstki są uczciwi.

(d) Ktoś z tej szóstki jest uczciwy.

(e) Nie wszyscy z tej szóstki są uczciwi.

(f) Nikt z tej szóstki nie jest uczciwy.

(g) Jeżeli nikt z tej szóstki nie jest uczciwy, to nie jest uczciwy ani Jarosław, ani Zbigniew.

4.7. Przykłady symbolizacji

W każdym z następujących przykładów, spróbujcie dokonać symbolizacji samodzielnie wpisując ją ołówkiem pod podanym zdaniem. Dopiero po samodzielnej próbie, przeczytajcie omówienie przykładu i sprawdźcie, czy poradziliście sobie. Warto zaznaczyć, że symbolizacja niektórych przytaczanych tu zdań jest bardzo uproszczona. Do adekwatnej symbolizacji zdań podanych w większości z poniższych przykładów potrzebna byłaby przynajmniej logika kwantyfikatorów.

Przykład 1

(1) Jesteśmy odpowiedzialni, tylko jeśli czynimy coś z wolnej woli, a zarazem jeśli czynimy coś z wolnej woli, to jesteśmy odpowiedzialni.

O: Jesteśmy ***o***dpowiedzialni.
W: Czynimy coś z ***w***olnej woli.

Zaczynamy od zaznaczenia wszystkich spójników zdaniowych:

Jesteśmy odpowiedzialni, tylko jeśli czynimy coś z wolnej woli, a zarazem jeśli czynimy coś z wolnej woli, to jesteśmy odpowiedzialni.

Który ze spójników jest spójnikiem głównym? W tym wypadku ‘a zarazem’. Zdanie (1) to koniunkcja dwóch implikacji:

(Jesteśmy odpowiedzialni, tylko jeśli czynimy coś z wolnej woli), a zarazem (jeśli czynimy coś z wolnej woli, to jesteśmy odpowiedzialni)

Zastępujemy zdania proste stałymi zdaniowymi:

(O, tylko jeśli W), a zarazem (jeśli W, to O)

Pozostaje już tylko zamienić spójniki zdaniowe na odpowiednie symbole, pamiętając o schemacie symbolizacji zdań zawierających wyrażenie ‘tylko jeśli’, co generuje dwie równoważne symbolizacje:

[1a] $(O \rightarrow W) \bullet (W \rightarrow O)$
[1b] $(\sim W \rightarrow \sim O) \bullet (W \rightarrow O)$

Przykład 2

(2) Jeżeli nie jest tak, że zachowanie jest wolne i zdeterminowane, to jest wolne, o ile nie jest przewidywalne.

D: Zachowanie jest z***d***eterminowane.
P: Zachowanie jest ***p***rzewidywalne.
W: Zachowanie jest ***w***olne.

Zaczynamy od zaznaczenia wszystkich spójników zdaniowych:

Jeżeli nie jest tak, że zachowanie jest wolne i zdeterminowane, to jest wolne, o ile nie jest przewidywalne.

Który ze spójników jest spójnikiem głównym? W tym wypadku ‘jeżeli to’. Ponieważ zdanie (2) ma dość złożone nawiasy, więc wstawmy od razu symbol spójnika głównego tak by móc zastanowić się nad symbolizacją nawiasów:

(nie jest tak, że zachowanie jest wolne i zdeterminowane) → (zachowanie jest wolne, o ile nie jest przewidywalne)

Zastanówmy się teraz kolejno nad nawiasami. W zdaniu z pierwszego nawiasu występuje spójnik negacji i spójnik koniunkcji. Który z nich jest spójnikiem głównym? Jest nim negacja (spójnik koniunkcji byłby spójnikiem głównym, gdyby zdanie w nawiasie brzmiało tak np. ‘Zachowanie nie jest wolne, lecz jest zdeterminowane’):

~(W • D) → (zachowanie jest wolne, o ile nie jest przewidywalne)

W zdaniu z drugiego nawiasu spójnikiem głównym jest ‘o ile’; parafrazując drugi nawias: ‘Jeżeli zachowanie nie jest przewidywalne, to jest wolne’, czyli:

[2a] ~(W • D) → (~P → W)
[2b] (~W ∨ ~D) → (~P → W)

Przykład 3

(3) Jeżeli dokonujemy pewnego czynu, ale ani nie zamierzamy, ani nie pragniemy go dokonać, to nie jesteśmy za niego odpowiedzialni.

O: Jesteśmy ***o***dpowiedzialni.
C: Dokonujemy pewnego ***c***zynu.
Z: ***Z***amierzamy dokonać pewnego czynu.
P: ***P***ragniemy dokonać pewnego czynu.

Zaczynamy od zaznaczenia wszystkich spójników zdaniowych i określenia spójnika głównego. W tym wypadku jest to spójnik implikacji:

Jeżeli (dokonujemy pewnego czynu, ale ani nie zamierzamy, ani nie pragniemy go dokonać), to (nie jesteśmy za niego odpowiedzialni).

Zastanówmy się teraz kolejno nad nawiasami. Zacznijmy od nawiasu drugiego, gdyż jest prostszy – jest po prostu negacją:

(dokonujemy pewnego czynu, ale ani nie zamierzamy, ani nie pragniemy go dokonać) → ~O

Musimy się teraz zastanowić nad zdaniem znajdującym się w pierwszym nawiasie. Jego spójnikiem głównym jest ‘ale’ – zdanie to jest zatem koniunkcją. Jej pierwszym członem jest zdanie proste ‘Dokonujemy pewnego czynu’, a drugim członem zdanie złożone ‘ani nie zamierzamy, ani nie pragniemy go dokonać’:

(C • (ani nie zamierzamy, ani nie pragniemy go dokonać)) → ~O

Pozostaje teraz tylko symbolizacja pozostałego nawiasu, co jest zadaniem prostym, jeśli wiecie, jak symbolizować zdania z wyrażeniem ‘ani-ani’:

[3a] (C • (~Z • ~P)) → ~O
[3b] (C • ~(Z ∨ P)) → ~O

Przykład 4

(4) Rozwiązanie przez pracodawcę umowy o pracę za wypowiedzeniem w okresie ciąży lub urlopu macierzyńskiego może nastąpić tylko w razie ogłoszenia upadłości lub likwidacji pracodawcy (Kodeks Pracy: Art. 177, §4).

C: Pracodawca wypowiada umowę o pracę w okresie ***c***iąży.
L: Następuje ***l***ikwidacja pracodawcy.
O: Pracodawca ***o***głasza upadłość.
U: Pracodawca wypowiada ***u***mowę o pracę w okresie urlopu macierzyńskiego.

Zaczynamy od zaznaczenia wszystkich spójników zdaniowych i określenia spójnika głównego. W tym wypadku jest to spójnik implikacji:

> (Rozwiązanie przez pracodawcę umowy o pracę za wypowiedzeniem w okresie ciąży lub urlopu macierzyńskiego może nastąpić) tylko w razie (ogłoszenia upadłości lub likwidacji pracodawcy).

Ponieważ spójnik ‘tylko w razie’ znaczy tyle, co ‘tylko jeśli’, więc musimy odpowiednio przekształcić zdanie do formy kanonicznej dla implikacji:

> Jeżeli (pracodawca rozwiązuje umowę o pracę za wypowiedzeniem w okresie ciąży lub urlopu macierzyńskiego), to [znaczy, że] (albo ogłosił upadłość albo został zlikwidowany).

lub:

> Jeżeli nieprawda, że (pracodawca albo ogłosił upadłość albo został zlikwidowany), to nieprawda, że (pracodawca może rozwiązać umowę o pracę za wypowiedzeniem w okresie ciąży lub urlopu macierzyńskiego).

Reszta jest już prosta:

[4a] $(C \vee U) \rightarrow (O \vee L)$
[4b] $\sim(O \vee L) \rightarrow \sim(C \vee U)$

Przykład 5

(5) Ani ceny akcji, ani wydatki konsumentów nie spadną pod warunkiem, że nie wzrośnie bezrobocie oraz że nastąpi wzrost koniunktury albo w przemyśle samochodowym, albo w budownictwie mieszkaniowym.

Jest to dość skomplikowane zdanie – rozpocznijmy od zaznaczenia spójników i stworzenia legendy:

> Ani ceny akcji, ani wydatki konsumentów nie spadną pod warunkiem, że nie wzrośnie bezrobocie oraz że nastąpi wzrost koniunktury albo w przemyśle samochodowym, albo w budownictwie mieszkaniowym.

A: Ceny ***a***kcji spadną.
B: Wzrośnie ***b***ezrobocie.
M: Wzrośnie koniunktura w budownictwie ***m***ieszkaniowym.
S: Wzrośnie koniunktura w przemyśle ***s***amochodowym.
W: ***W***ydatki konsumentów spadną.

Podstawową sprawą jest ustalenie tego, który ze spójników jest spójnikiem głównym. Są tylko dwaj potencjalni kandydaci, a mianowicie ‘pod warunkiem, że’ i ‘oraz’. Pozostałe spójniki uwikłane są wyraźnie w podczłony tego zdania. Jeżeli przyjrzycie się temu zdaniu bliżej, to wyraźnie zobaczycie, że walkę o dominację «wygrywa» spójnik implikacji. Jest to podkreślone powtórnym wystąpieniem ‘że’, które jest powtórzeniem ‘że’ z ‘pod warunkiem, że’. Ponadto, gdyby to zdanie miało być koniunkcją, wówczas lepiej byłoby zastąpić ‘oraz’ średnikiem. Mamy więc do czynienia z implikacją:

> (Ani ceny akcji, ani wydatki konsumentów nie spadną) pod warunkiem, że (nie wzrośnie bezrobocie oraz że nastąpi wzrost koniunktury albo w przemyśle samochodowym, albo w budownictwie mieszkaniowym).

Reszta jest już prosta. Widać wyraźnie, że ‘oraz’ jest spójnikiem głównym w drugim nawiasie:

> (Ani ceny akcji, ani wydatki konsumentów nie spadną) pod warunkiem, że (nie wzrośnie bezrobocie oraz że (nastąpi wzrost koniunktury albo w przemyśle samochodowym, albo w budownictwie mieszkaniowym)).

Przekształćmy jeszcze to zdanie do kanonicznej formy implikacji i rozbudujmy zdanie z ‘ani-ani’:

> Jeżeli (nie wzrośnie bezrobocie oraz (nastąpi wzrost koniunktury albo w przemyśle samochodowym, albo w budownictwie mieszkaniowym)), to (ani ceny akcji nie spadną, ani wydatki konsumentów nie spadną).

Zastępujemy zdania proste stałymi zdaniowymi:

> Jeżeli (nie B oraz (albo S, albo M)), to (ani nie A, ani nie W)

Reszta jest już prosta:

[5a] $(\sim B \bullet (S \vee M)) \rightarrow (\sim A \bullet \sim W)$
[5b] $(\sim B \bullet (S \vee M)) \rightarrow \sim(A \vee W)$

Przykład 6

(6) Stan gospodarki ulegnie poprawie i powstanie więcej miejsc pracy tylko wtedy, gdy nastąpi wzrost wydatków rządowych, a podatki nie zostaną podniesione – natomiast deficyt zostanie zredukowany tylko wtedy, gdy podatki zostaną podniesione, a wydatki państwowe nie wzrosną; jednakże stan gospodarki poprawi się wtedy i tylko wtedy, gdy deficyt zostanie zredukowany.

Rozpoczynamy od zaznaczenia spójników i stworzenia legendy:

> Stan gospodarki ulegnie poprawie i powstanie więcej miejsc pracy tylko wtedy, gdy nastąpi wzrost wydatków rządowych, a podatki nie zostaną podniesione – natomiast deficyt zostanie zredukowany tylko wtedy, gdy podatki zostaną podniesione, a wydatki państwowe nie wzrosną; jednakże stan gospodarki poprawi się wtedy i tylko wtedy, gdy deficyt zostanie zredukowany.

D: ***D***eficyt zostanie zredukowany.
G: Stan ***g***ospodarki ulegnie poprawie.
P: ***P***odatki zostaną podniesione.
R: Powstanie więcej miejsc p***r***acy.
W: ***W***ydatki rządowe wzrosną.

Kluczową kwestią jest ponownie odnalezienie spójnika głównego – pomoże nam w tym średnik oraz ‘jednakże’ sygnalizujące, że zdanie to jest koniunkcją (możemy więc wstawić nawiasy klamrowe). Pierwszy nawias zawiera bardzo złożone wyrażenie, którego głównym spójnikiem jest ponownie spójnik koniunkcji wyznaczony przez myślnik i słowo ‘natomiast’ (możemy wstawić nawiasy kwadratowe). Głównymi spójnikami w zdaniu ‘Stan gospodarki ulegnie poprawie i powstanie więcej miejsc pracy tylko wtedy, gdy nastąpi wzrost wydatków rządowych, a podatki nie zostaną podniesione’ oraz w zdaniu ‘deficyt zostanie zredukowany tylko wtedy, gdy podatki zostaną podniesione, a wydatki państwowe nie wzrosną’ są spójniki implikacji – tym razem głównie znaczenie tego, co jest powiedziane, podpowiada to, który spójnik dominuje. Mamy więc:

> {[(Stan gospodarki ulegnie poprawie i powstanie więcej miejsc pracy) tylko wtedy, gdy (nastąpi wzrost wydatków rządowych, a podatki nie zostaną podniesione)] – natomiast [deficyt zostanie zredukowany tylko wtedy, gdy (podatki zostaną podniesione, a wydatki państwowe nie wzrosną)]}; jednakże (stan gospodarki poprawi się wtedy i tylko wtedy, gdy deficyt zostanie zredukowany).

Po zastąpieniu zdań prostych stałymi zdaniowymi:

> {[(G i R) tylko wtedy, gdy (W, a nie P)] i [D tylko wtedy, gdy (P, a nie W)]} i (G wtedy i tylko wtedy, gdy D)

Reszta jest prosta pod warunkiem, że pamiętamy, iż zdanie o kształcie ‘*p* tylko wtedy, gdy *r*’ symbolizujemy jako ‘$p \to r$’.

[6] $\{[(G \bullet R) \to (W \bullet {\sim}P)] \bullet [D \to (P \bullet {\sim}W)]\} \bullet (G \equiv D)$

Ćwiczenie 4.K „symbolizacje – 1”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań względem podanej legendy. (*Rozwiązania*, s. 323).

A:	***A***la robi kolację.	**G**:	Lech jest ***g***łodny.
P:	Ala ***p***racuje do późna.	**L**:	***L***ech robi kolację.
W:	Szef Ali ***w***ymaga, aby pracowała do późna.	**Ź**:	Lech pracuje do pó***ź***na.
		Ś:	Jest ***ś***więto.

(a) Lech nie zrobi kolacji, chyba że jest bardzo głodny.

(b) Lech pracuje do późna w nocy wtedy i tylko wtedy, gdy Ala nie pracuje do późna.

(c) Nieprawda, że jeżeli jest święto, to Ala pracuje do późna.

(d) Jeśli jest święto, to Lech nie pracuje do późna.

(e) Ani Lech, ani Ala nie zrobią kolacji, jeśli jest święto.

(f) Ala nie pracuje do późna, chyba że szef od niej tego wymaga.

(g) Jeśli Ali szef nie wymaga od niej, aby pracowała do późna, to do późna nie pracuje.

(h) Albo Ala bądź Lech zrobią kolację, albo oboje pracują do późna.

(i) Albo Lech, albo Ala (ale nie jedno i drugie) zrobi kolację.

(j) Jeżeli Lech pracuje do późna, a Ala do późna nie pracuje, to ona robi kolację.

(k) Jeśli Ala nie pracuje do późna, to Ala robi kolację, jeśli Lech pracuje do późna.

(l) Jeśli Lech zrobił kolację, to znaczy, że Ala pracowała do późna.

(m) Lech robi kolację, tylko jeśli Ala pracuje do późna.

(n) Jeśli Ala nie pracowała do późna, to Lech nie zrobił kolacji.

(o) Lech i Ala oboje pracują do późna, tylko jeśli jest święto.

Ćwiczenie 4.L „symbolizacje – 2”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań na podstawie przytoczonej legendy. (*Rozwiązania*, s. 324).

B: Ala będzie ***b***iegać.	**O**: Ala będzie się ***o***dchudzać.
Ć: Ala będzie ***ć***wiczyć.	**P**: Ala ***p***rzytyje.
D: Ala popadnie w ***d***epresję.	**S**: Ala będzie jeździć do pracy ***s***amochodem.
L: Ala będzie ***l***eniwa.	**W**: Ala będzie pły***w***ać.
M: Ala będzie właściwie u***m***otywowana.	**Z**: Ala będzie ***z***męczona.

(a) Ala nie będzie ani biegać, ani pływać, choć będzie ćwiczyć.

(b) Ala nie będzie ani biegać, ani pływać, chyba że przytyje.

(c) Ala będzie zarówno biegać, jak i pływać, chyba że będzie leniwa lub przytyje.

(d) Ala nie przytyje, jeśli będzie pływać lub biegać, chyba że będzie jeździć do pracy samochodem i nie będzie się odchudzać.

(e) Jeżeli Ala będzie pływać lub biegać, to nie przytyje – chyba że będzie jeździć do pracy samochodem i nie będzie się odchudzać.

(f) Ala będzie albo biegać, albo pływać; jednakże nie będzie robić jednego i drugiego, chyba że przytyje.

(g) Ala popadnie w depresję wtedy i tylko wtedy, gdy będzie leniwa i nie będzie ani się odchudzać, ani ćwiczyć.

(h) Ala przytyje wtedy i tylko wtedy, gdy nie będzie się odchudzać, nie będzie miała właściwej motywacji i nie będzie ani pływać, ani biegać.

(i) Jeżeli prawdą jest, że Ala przytyje wtedy i tylko wtedy, gdy nie będzie ani się odchudzać, ani ćwiczyć i gdy nie będzie ani biegać, ani pływać, to Ala będzie ćwiczyć lub biegać, a na pewno nie będzie jeździć do pracy samochodem.

(j) Ala nie popadnie w depresję tylko wtedy, gdy będzie się odchudzać bądź ćwiczyć i gdy nie będzie zanadto zmęczona.

(k) Tylko jeśli Ala będzie właściwie umotywowana i nie będzie zbyt zmęczona, będzie się odchudzać lub ćwiczyć.

Ćwiczenie 4.M „symbolizacje – 3”

Podaj zapis symboliczny następujących zdań względem podanej legendy. (*Rozwiązania*, s. 325).

A: Ceny ***a***kcji spadną.
B: ***B***ezrobocie wzrośnie.
D: ***D***eficyt zostanie zredukowany.
G: Stan ***g***ospodarki ulegnie poprawie.
K: Wydatki ***k***onsumentów spadną.
M: Wystąpi wzrost koniunktury w budownictwie ***m***ieszkaniowym.
O: Stopy ***o***procentowania wzrosną.
P: ***P***odatki wzrosną.
R: Wzrośnie liczba miejsc p***r***acy.
S: Wystąpi wzrost koniunktury w przemyśle ***s***amochodowym.
W: ***W***ydatki rządowe wzrosną.
Ż: Po***ż***yczki konsumentów wzrosną.

(a) Stopy oprocentowania wzrosną tylko wtedy, gdy poprawi się stan gospodarki i gdy wzrosną pożyczki konsumentów.

(b) Stan gospodarki nie ulegnie poprawie, a stopy oprocentowania nie wzrosną, jeżeli albo spadną wydatki konsumentów, albo wzrośnie bezrobocie.

(c) Wzrośnie albo bezrobocie, albo oprocentowanie, ale nie oba jednocześnie.

(d) Oprocentowanie nie wzrośnie, jeżeli stan gospodarki się poprawi, chyba że wzrosną pożyczki konsumentów.

(e) Deficyt zostanie zredukowany, a stan gospodarki się poprawi, o ile wzrosną podatki, a nie wzrosną stopy oprocentowania.

(f) Jeżeli stopy oprocentowania nie wzrosną, to deficyt zostanie zredukowany wtedy i tylko wtedy, gdy podwyższone zostaną podatki, a nie wzrosną wydatki rządowe.

(g) Podatki i stopy oprocentowania wzrosną, ale stan gospodarki się nie poprawi – chyba że zredukowany zostanie deficyt.

(h) Ceny akcji spadną, a stan gospodarki się nie poprawi, jeśli stopy oprocentowania wzrosną, a deficyt nie zostanie zredukowany – chyba że stworzonych zostanie więcej miejsc pracy lub poprawi się koniunktura w budownictwie mieszkaniowym.

(i) Nie wzrosną ani stopy oprocentowania, ani podatki, jeżeli zredukowany zostanie deficyt, ale jeżeli deficyt nie zostanie zredukowany, to podniesione zostaną zarówno podatki, jak i stopy oprocentowania.

(j) Stan gospodarki ulegnie poprawie pod warunkiem redukcji deficytu, ale deficyt zostanie zredukowany, tylko jeśli nie wzrosną wydatki rządowe i podniesione zostaną podatki.

(k) Tylko wówczas, gdy poprawi się koniunktura w budownictwie mieszkaniowym i w przemyśle samochodowym, powstaną nowe miejsca pracy i zredukowany zostanie deficyt; jednakże liczba miejsc pracy nie wzrośnie, chyba że wzrosną wydatki rządowe.

4.8. Nie wszystko spójnik zdaniowy, co się świeci

4.8.1. ‘nie tylko …, ale …’

W symbolizowaniu trzeba bardzo uważać. Często wyrażenia mylą. Weźmy na przykład zdanie:

(1) Maria Skłodowska-Curie była nie tylko dobrym naukowcem, ale też dobrym człowiekiem.

Wystąpienie ‘nie’ mogłoby sugerować, że w zdaniu tym występuje jakaś negacja. Widząc ‘tylko’, moglibyśmy sobie przypomnieć niestrawność ‘tylko jeśli’. W rzeczywistości jednak zdanie to jest po prostu koniunkcją, którą wyrazić można też w następujący sposób:

(1′) Maria Skłodowska-Curie była dobrym naukowcem i dobrym człowiekiem.

4.8.2. ‘i’ występujące nie jako spójnik koniunkcji

Bywa, że ‘i’ nie występuje jako spójnik zdaniowy. Rozważmy wpierw szablonowy przykład koniunkcji, gdzie ‘i’ istotnie funkcjonuje jako znany nam już spójnik zdaniowy.

(2) Marian i Kazimiera są prawdomówni.

Jest to koniunkcja dwóch zdań prostych:

(2′) ***M***arian jest prawdomówny i ***K***azimiera jest prawdomówna.
[2] M • K

Podobnie będzie w przypadku takich zdań jak:

Marian i Kazimiera są w Gdańsku.
(Marian jest w Gdańsku i Kazimiera jest w Gdańsku).
Marian i Kazimiera są lubiani.
(Marian jest lubiany i Kazimiera jest lubiana).
Marian i Kazimiera są fanami Harry’ego Pottera.
(Marian jest fanem Harry’ego Pottera i Kazimiera jest fanką Harry’ego Pottera).

Przyjrzyjmy się jednak zdaniu, które wydaje się analogiczne do zdania (2):

(3) Marian i Kazimiera są małżeństwem.

a jednak zupełnie nie jest, bo przecież zdania (3) nie wolno nam rozumieć jako koniunkcji:

~~Marian jest małżeństwem i Kazimiera jest małżeństwem.~~

Zdanie (3) oddaje raczej pewną relację zachodzącą między Kazimierą i Marianem – dopiero w logice relacji (wersji logiki kwantyfikatorów) będzie można wniknąć głębiej w strukturę logiczną tego zdania. Z punktu widzenia logiki zdań, tego typu zdania trzeba traktować jako zdania logicznie proste, a więc nie zawierające żadnego spójnika zdaniowego.

Przykładów tego typu jest oczywiście więcej:

Poznań leży w połowie drogi między Warszawą i Berlinem.
Jarosław i Lech są braćmi.
Sojusz zawarty przez Warszawę i Waszyngton będzie zgubny w skutkach.

4.8.3. Funktory ekstensjonalne i intensjonalne

Wszystkie wprowadzone przez nas spójniki zdaniowe (negacja, koniunkcja, alternatywa, implikacja oraz równoważność) są funktorami zdaniotwórczymi. (Funktory zdaniotwórcze to takie wyrażenia, które po wypełnieniu luk tworzą zdania).

Co więcej, spójniki zdaniowe są funktorami ekstensjonalnymi. Znaczy to, że wartość logiczna każdego zdania zbudowanego za pomocą tych spójników jest ściśle określona przez wartość logiczną składowych tych zdań. Weźmy dla przykładu funktor negacji:

Nieprawda, że ______________.

Otóż funktor ten jest ekstensjonalny, ponieważ wartość logiczna negacji jest ściśle określona przez wartość logiczną zdań wypełniających lukę, tj. będącym argumentem tego funktora. Rozważmy dowolne zdania o tej samej wartości logicznej (np. zdania fałszywe):

Warszawa jest stolicą Niemiec.	0
Berlin jest stolicą Polski.	0
Tiramisu jest słone.	0
Roman Giertych jest kobietą.	0

Jeżeli utworzymy negacje tych zdań:

Nieprawda, że Warszawa jest stolicą Niemiec.	1
Nieprawda, że Berlin jest stolicą Polski.	
Nieprawda, że Tiramisu jest słone.	
Nieprawda, że Roman Giertych jest kobietą.	

to otrzymane zdania będą – wszystkie – prawdziwe. Tak będzie, ponieważ negacja jest funktorem ekstensjonalnym – wartość logiczna zdania negowanego determinuje wartość logiczną negacji.

Jest oczywiście wiele funktorów ekstensjonalnych – są też takie, które nie zmieniają wartości logicznej zdania wyjściowego. Funktorami takimi są np. 'Jest prawdą, że ____' i 'Przecież ____'. Określ wartość logiczną następujących zdań:

Przecież Warszawa jest stolicą Niemiec.	
Przecież Berlin jest stolicą Polski.	
Przecież Tiramisu jest słone.	
Przecież Roman Giertych jest kobietą.	

Otrzymane w ten sposób zdania będą – znów wszystkie – fałszywe. Zdania utworzone za pomocą funktora zdaniotwórczego 'przecież' zachowują bowiem wartość logiczną zdania składowego. Istotne jest to, że:

> Wartość logiczna zdań utworzonych za pomocą ekstensjonalnych funktorów zdaniotwórczych jest jednoznacznie zdeterminowana przez wartość logiczną zdań będących argumentami tych funktorów.

Istnieje jednak cała klasa funktorów zdaniotwórczych, które nie są ekstensjonalne – są funktorami intensjonalnymi. Funktory intensjonalne są to takie funktory, dla których wartość logiczna zdania utworzonego za pomocą takiego funktora nie jest zdeterminowana przez wartość logiczną zdania będącego argumentem funktora. Rozważmy funktor:

Maciej uważa, że ____________.

Aby wykazać, że funktor ten jest intensjonalny, wystarczy znaleźć dwa zdania o tej samej wartości logicznej, które – poprzedzone tym funktorem – stworzą zdania różniące się wartością logiczną. Oto przykład dwóch zdań o tej samej wartości logicznej, a mianowicie dwóch zdań fałszywych:

Berlin jest stolicą Polski.	0
Na Wawelu naprawdę mieszkał smok.	0

Możemy sobie wyobrazić pewną osobę, Macieja, który uważa, co prawda, że Berlin nie jest stolicą Polski, lecz nie zgadza się z powszechnie panującą opinią o smokach. Zastanów się w związku z tym, jaką wartość logiczną będą miały następujące zdania:

Maciej uważa, że Berlin jest stolicą Polski.
Maciej uważa, że na Wawelu naprawdę mieszkał smok.

Zdanie pierwsze jest fałszywe, bowiem nie jest prawdą, że Maciej uważa, iż Berlin jest stolicą Polski – w tym punkcie zgadza się ze wszystkimi. Zdanie drugie jest natomiast prawdziwe: Maciej bowiem – w przeciwieństwie do nas – uważa, że na Wawelu naprawdę mieszkał smok. To, co jest istotne dla nas w tym momencie, to zachowanie tego funktora wobec zdań o tej samej wartości logicznej. Funktory ekstensjonalne zachowują się jednolicie względem zdań o tej samej wartości logicznej. Każde zdanie fałszywe jest potraktowane przez dany funktor ekstensjonalny tak samo. Funktor ‘nieprawda, że’ każde zdanie fałszywe «zamieni» w zdanie prawdziwe. Funktor ‘przecież’ każde zdanie fałszywe «pozostawi» zdaniem fałszywym. A funktory intensjonalne nie traktują zdań o tej samej wartości logicznej tak samo. Funktor ‘Maciej uważa, że’ niektóre zdania fałszywe «zamieni» w zdania prawdziwe, a niektóre zdania fałszywe «pozostawi» zdaniami fałszywymi. Innymi słowy, wartość logiczna zdań utworzonych za pomocą funktora zdaniotwórczego ‘Maciej uważa, że ________’ nie jest jednoznacznie zdeterminowana przez wartość logiczną zdań składowych.

> Wartość logiczna zdań utworzonych za pomocą intensjonalnych funktorów zdaniotwórczych nie jest jednoznacznie zdeterminowana przez wartość logiczną zdań będących argumentami tych funktorów.

Wartość logiczna zdań utworzonych za pomocą funktorów intensjonalnych nie zależy tylko od wartości logicznej zdań składowych.

Innymi funktorami intensjonalnymi są np.:

Jan sądzi, że ________	i ogólniej:	__ sądzi, że _________
Jan wie, że ________	i ogólniej:	__ wie, że _________
Jan ma nadzieję, że ________	i ogólniej:	__ ma nadzieję, że _________
Jan słyszał, że ________	i ogólniej:	__ słyszał, że _________
Jest możliwe, że ________		
Jest konieczne, że ________		
Jest dozwolone to, że _______		
Jest obowiązkowe to, że _______		
Jest zakazane to, że _______		
______, a potem ________		

4.8.4. Symbolizacje w logice zdań a funktory intensjonalne

Do tej pory w symbolizacjach przyjmowaliśmy zasadę, że nawet jeżeli nie jesteśmy w stanie wyłuszczyć całości znaczenia jakiegoś zdania, to powinniśmy starać się wyłuszczyć tyle, na ile język logiki zdań pozwala. Trzeba być jednak bardzo ostrożnym, gdy w pobliżu znajdują się funktory intensjonalne.

Wydawać by się mogło, że skonfrontowani np. ze zdaniem – załóżmy prawdziwym:

(4) Basia sądzi, że wieloryby nie są ssakami.

jedyne, co możemy zrobić, to oddać to zdanie jako negację:

[5] ~W

gdzie stała ‘W’ zastępuje zdanie ‘Wieloryby są ssakami’. W oczywisty jednak sposób zdanie [5], czyli zdanie:

(5) Nieprawda, że wieloryby są ssakami.

nie oddaje treści zdania (4).

Aby podeprzeć nasze intuicje dotyczące tego, że zdania (4) nie daje się sparafrazować za pomocą zdania (5), możemy się odwołać do ich wartości logicznej. Założyliśmy już, że Basia istotnie sądzi – a z pewnością nie jest w tym odosobniona – iż wieloryby nie są ssakami. Zdanie (4) jest zatem prawdziwe, podczas gdy zdanie (5) jest ewidentnie fałszywe. Ponieważ zdanie (5) różni się wartością logiczną od zdania (4), to (5) nie może być parafrazą zdania (4).

Jak zatem należy dokonać symbolizacji zdania (4)? Z punktu widzenia logiki zdań wszystko, co możemy zaoferować, to oddanie tego zdania jako zdania prostego:

(4) Basia sądzi, że wieloryby nie są ssakami.
[4] S

gdzie ‘S’ zastępuje zdanie ‘Basia sądzi, że wieloryby nie są ssakami’*.

Wszystkie zdania zawierające funktory intensjonalne musimy bardzo uważnie rozpatrywać. Jeżeli zdania złożone zawierające spójniki zdaniowe znajdują się w zasięgu funktora intensjonalnego, wówczas takie zdania złożone musimy po prostu traktować jako zdania proste. Natomiast jeżeli spójniki zdaniowe nie wchodzą w zasięg funktora intensjonalnego, wówczas możemy w logice zdań ująć strukturę złożoną takich zdań. Skontrastujmy:

(5) Kalinka przewiduje, że jeżeli Adam Małysz odpocznie, to wygra kolejne zawody, o ile szczęście mu dopisze.
(6) Jeżeli Adam Małysz odpocznie, to Kalinka przewiduje, że wygra on kolejne zawody, o ile szczęście mu dopisze.
(7) Jeżeli Adam Małysz odpocznie i szczęście mu dopisze, to Kalinka przewiduje, że wygra on kolejne zawody.

Zacieniowany został zasięg funktora intensjonalnego oraz zaznaczone zostały spójniki zdaniowe dostępne symbolizacji w logice zdań. Zdania te możemy oddać odpowiednio jako:

[5] K
[6] $O \rightarrow P$
[7] $(O \bullet S) \rightarrow W$

gdzie ‘K’ zastępuje ‘Kalinka przewiduje, że jeżeli Adam Małysz odpocznie, to wygra kolejne zawody, o ile szczęście mu dopisze’, ‘O’ – ‘Adam Małysz odpocznie’, ‘P’ – ‘Kalinka przewiduje, że Adam Małysz wygra kolejne zawody, o ile szczęście mu dopisze’, ‘S’ – ‘Szczęście dopisze Adamowi Małyszowi’, ‘W’ – ‘Kalinka przewiduje, że wygra on kolejne zawody’.

Warto jeszcze zaznaczyć, że istnieją logiki, które zajmują się badaniem zachowania funktorów intensjonalnych. Są to np. logiki modalne (badające funktory ‘jest możliwe, że’ oraz ‘jest konieczne, że’), logiki deontyczne (badające funktory ‘jest dozwolone to, że’, ‘jest obowiązkowe to, że’) czy logiki epistemiczne (badające takie funktory, jak ‘*x* wie, że’ czy ‘*x* sądzi, że’).

* Można by się w tym momencie zastanowić, czy zdania ‘Basia sądzi, że wieloryby nie są ssakami’ nie można byłoby oddać jednak jako negacji, a mianowicie ‘Nieprawda, że Basia sądzi, iż wieloryby są ssakami’. Takie rozwiązanie jest jednak błędne. Zdania te jednak stwierdzają co innego – pierwsze stwierdza posiadanie przez Basię pewnego sądu (mianowicie sądu negatywnego, że wieloryby nie są ssakami). Zdanie drugie natomiast stwierdza nieposiadanie przez Basię innego sądu (sądu pozytywnego, że wieloryby są ssakami).

Podsumowanie

Poznaliśmy przyjęte eksplikacje dodatkowych spójników zdaniowych (por. tabela 2). Mówiliśmy o warunkach dostatecznych i koniecznych oraz o związanych z nimi spójnikach (por. tabela 3). Poznaliśmy też prawa de Morgana (tabela 1). Omówiliśmy sposoby symbolizacji zdań zawierających wyrażenia kwantyfikujące ‘wszyscy’, ‘niektórzy’, ‘nikt’, ‘nie wszyscy’ odnoszące się do skończonego zbioru przedmiotów. Zaznaczyliśmy różnicę między spójnikami ekstensjonalnymi oraz intensjonalnymi.

Tabela 1. Prawa de Morgana

$\sim(p \bullet r)$	jest logicznie równoważne	$\sim p \vee \sim r$
$\sim p \bullet \sim r$	jest logicznie równoważne	$\sim(p \vee r)$

Tabela 2

nie zarówno *p*, jak i *r*	$\sim(p \bullet r)$	$\sim p \vee \sim r$
zarówno nie *p*, jak i nie *r*	$\sim p \bullet \sim r$	$\sim(p \vee r)$
ani nie *p*, ani nie *r*	$\sim p \bullet \sim r$	$\sim(p \vee r)$
albo *p* albo *r*, ale nie jedno i drugie	$(p \vee r) \bullet \sim(p \bullet r)$	
r, chyba że *p*	$p \vee r$	$\sim p \rightarrow r$
p, tylko jeżeli *r*	$p \rightarrow r$	$\sim r \rightarrow \sim p$

Tabela 3

to, że *r* jest warunkiem dostatecznym dla tego, że *p*	*p* wtedy, gdy *r*	$r \rightarrow p$
to, że *r* jest warunkiem koniecznym dla tego, że *p*	*p* tylko wtedy, gdy *r* nie *p* wtedy, gdy nie *r*	$p \rightarrow r$ $\sim r \rightarrow \sim p$
to, że *r* jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla tego, że *p*	*p* wtedy i tylko wtedy, gdy *r*	$r \equiv p$