2. PIĘĆ SPÓJNIKÓW ZDANIOWYCH

Cele

- Umiejętność rozróżnienia między zdaniami złożonymi i prostymi.
- Umiejętność tworzenia legendy symbolizacji.
- Znajomość funktorów negacji, koniunkcji, alternatywy, równoważności i implikacji (w tym ich matryc logicznych).
- Umiejętność symbolizowania nieskomplikowanych zdań języka naturalnego.

2.1. Logika zdań wśród innych logik

Jednym z celów logiki jako nauki jest uchwycenie tego, na czym polega prawidłowość wnioskowania. Okazuje się to zadaniem wcale nieprostym i logicy podchodzą do niego w kolejnych krokach proponując teorie logiczne, które coraz lepiej oddają intuicyjnie przez nas wyczuwaną prawidłowość wnioskowań.

Klasyczna logika zdań jest najprostszą – lecz również najuboższą – teorią logiczną, traktującą zdania języka naturalnego jako zdania złożone z innych zdań za pomocą tzw. spójników zdaniowych (wyrażeń takich, jak 'oraz', 'nie', 'lub', 'jeżeli, to', 'zawsze i tylko wtedy' itd.). Teoria ta pozwala na uchwycenie bardzo wielu wnioskowań prawidłowych – choć nie wszystkich.

Klasyczna logika kwantyfikatorów pozwala na uznanie za prawidłowe wszystkich prawidłowych wnioskowań uchwyconych przez logikę zdań oraz wielu wnioskowań przez logikę zdań nieuchwyconych. Dzieje się tak m.in. dlatego, że logika kwantyfikatorów dysponuje bardziej szczegółowymi narzędziami analizy zdań złożonych. Rozpoznaje nie tylko spójniki zdaniowe, lecz również tzw. kwantyfikatory, czyli wyrażenia takie, jak 'wszystkie', czy 'niektóre'. Logiki modalne wzbogacają logikę kwantyfikatorów o tzw. wyrażenia modalne, takie jak 'konieczne' i 'możliwe'. Logiki deontyczne analizują zdania ze względu na występowanie wyrażeń takich, jak 'ma prawo' oraz 'ma obowiązek'. I tak dalej.

2.2. Zdania proste i zdania złożone

Powiedzieliśmy już – i będziemy wielokrotnie powtarzać – że wnioskowania są logicznie prawidłowe ze względu na swój schemat logiczny. Z kolei schemat logiczny wnioskowań musi być odpowiednio złożony, aby wnioskowania mogły być logicznie prawidłowe. Fundamentalną kwestią staje się zatem pytanie o naturę logicznej złożoności zdań.

W logice zdań zdaniami złożonymi są wszelkie zdania, które zostały złożone z innych zdań za pomocą takich spójników zdaniowych, jak 'nie', 'i', 'lub', 'jeżeli, to' oraz 'zawsze i tylko wtedy, gdy'. Pozostałe zdania to tzw. zdania proste. Następujące zdania są zdaniami złożonymi w logice zdań (podkreślone zostały spójniki zdaniowe):

> Karolek <u>nie</u> zapytał, która jest godzina.
> Zuzia pożyczyła Tomkowi książkę <u>i</u> oddała mu zeszyt.
> Ala dostanie kotka <u>lub</u> pieska.
> <u>Jeżeli</u> Krzyś <u>nie</u> przeprosi Krysi, <u>to</u> ona <u>nie</u> umówi się z nim na randkę.

Przykłady zdań prostych w logice zdań to:

> Marszałek Sejmu zdementował pogłoski, jakoby prace nad ustawą nadal trwały.
> Marysia dostanie chomika.
> Mistrzem długich zdań był Hegel, który konstruował zdania długie nawet na parę stron, co niewątpliwie sprzyjało powstawaniu równie długich, co niezrozumiałych myśli.

Zwróćmy uwagę, że zdania proste logicznie wcale nie muszą być wyrażone prostymi zdaniami języka polskiego. Za logiczną prostotę zdania odpowiedzialny jest bowiem brak spójników zdaniowych, a precyzyjniej fakt, iż danego zdania nie można ująć jako zdania powstałego wskutek złożenia innych zdań za pomocą spójników zdaniowych.

Zdanie złożone (względem logiki zdań) jest to zdanie powstałe z innego zdania (lub z innych zdań) za pomocą jednego ze spójników zdaniowych.
Pozostałe zdania (tj. zdania nie powstałe z innych zdań za pomocą spójników zdaniowych) to **zdania proste** (względem logiki zdań).

Warto na razie nadmienić tylko, że istnieje subtelna różnica między zdaniem złożonym z innych zdań za pomocą spójników zdaniowych a zdaniem zawierającym spójniki zdaniowe. Są bowiem zdania zawierające spójniki zdaniowe, które znajdują się w zasięgu tzw. funktorów intensjonalnych. W takich wypadkach zdania złożone za pomocą funktorów intensjonalnych traktuje się w logice zdań jako zdania proste, nawet jeżeli w zasięgu tych funktorów występują spójniki zdaniowe. Szerzej o tej kwestii powiemy w §4.8.3, gdy już trochę lepiej opanujecie podstawy symbolizacji w logice zdań.

Ćwiczenie 2.A „parafaraza zdań złożonych”

Dokonaj parafrazy następujących zdań złożonych tak, aby uwypuklić zdania proste wiązane przez spójniki zdaniowe. Uwaga: nie martw się tym, że powstałe zdania są stylistycznie upośledzone. (*Rozwiązania*, s. 301).

(a) Janosik i Pyzdra odbierali dobra bogatym.

Janosik odbierał dobra bogatym i Pyzdra odbierał dobra bogatym.

(b) Giertych wprowadzi reformę mundurków szkolnych lub oświaty.

(c) Rząd Kaczyńskiego zajmie się reformą zdrowia, jeżeli upora się z lustracją.

(d) Lepper albo brał łapówki, albo jest o to podejrzewany.

(e) Ksiądz Rydzyk przeprosił za skandaliczne wypowiedzi i nie wypowiedział słowa ‘przepraszam’.

Ćwiczenie 2.B „zdania proste i złożone”

Zaznacz zdania proste i złożone. W zdaniach złożonych zaznacz wszystkie spójniki zdaniowe. (*Rozwiązania*, s. 301).

(a) Tomasz jest kulturalnym mężczyzną, mającym awersję do kobiet w dużych kapeluszach.

(b) Tomasz zaprosił Zuzannę do kina.

(c) Jeżeli Zuzanna nie przyjdzie o umówionej porze, to Tomasz będzie zrozpaczony.

(d) Zuzanna przyszła na czas.

(e) Tomasz nie wierzył własnym oczom.

(f) Zuzanna włożyła największy kapelusz, jaki Tomasz widział w całym swoim życiu bogatym w doświadczenia z kobietami w dużych kapeluszach.

(g) Tomasz prosił Zuzannę, by zdjęła tę okropność.

(h) Zuzanna zgodziła się nawet pozbyć się kapelusza wtedy i tylko wtedy, gdy Tomasz pozbędzie się butów kowbojskich lub przynajmniej nie będzie ich wkładał na ich wspólne spotkania.

2.3. Legenda symbolizacji i symbolizacja zdań prostych

Logika zdań jest językiem formalnym, za pomocą którego można przedstawiać zdania języka polskiego. Taki przekład nazywany jest też „symbolizacją". Zdania proste będziemy w symbolizacjach przedstawiać tzw. stałymi zdaniowymi, którym przyporządkowane są wielkie litery alfabetu (A, B, C itd.).

Jaką stałą zdaniową przyporządkujemy jakiemu zdaniu prostemu jest arbitralne, choć warto dobierać takie litery, które pomogą nam w zapamiętaniu tego zdania. W wypadku czwórki następujących zdań warto jest wybrać pierwsze litery cech przypisywanych Zuzannie i Tomaszowi:

P: Tomasz jest ***p***rzystojny.
B: Tomasz jest ***b***ogaty.
I: Zuzanna jest ***i***nteligentna.
U: Zuzanna jest ***u***boga.

Możliwe są jednak też inne sposoby przypisania stałych zdaniowych (np. w kolejności T, O, Z, U, a nawet A, B, C, D). Listę zdań prostych z przypisanymi do nich stałymi zdaniowymi nazywamy **legendą** bądź **kluczem** symbolizacji.

Tworząc legendę symbolizacji musimy przestrzegać trzech reguł:

- ***Jednemu zdaniu w sensie logicznym nie można przypisać więcej niż jednej stałej zdaniowej.***
  O regule tej nie wolno nam zapomnieć, gdyż jak pamiętamy jedno zdanie w sensie logicznym można wyrazić za pomocą wielu zdań języka polskiego. Rozważmy następujący przykład:

  
  ~~**S**: ***S**tolicą Polski jest Warszawa.*~~
  ~~**W**: ***W**arszawa jest stolicą Polski.*~~

  Choć występują tu różne zdania języka polskiego, wyrażają one *de facto* to samo zdanie w sensie logicznym. W legendzie wystąpić powinno tylko jedno z tych zdań, np.:

  W: Warszawa jest stolicą Polski.

- ***Jedną stałą zdaniową można przypisać nie więcej niż jednemu zdaniu.***
  Stosowaliśmy już tę regułę wyżej, przypisując różne stałe różnym zdaniom. Pogwałceniem tej reguły byłoby np.:

  
  ~~**Z**: **Z**uzanna jest inteligentna.~~
  ~~**Z**: **Z**uzanna jest uboga.~~

- ***Nie wolno przypisywać stałych zdaniowych zdaniom złożonym.***
  W legendzie nie wolno umieszczać zdań złożonych logicznie. W symbolizacji chodzi o to, by strukturę zdań złożonych właśnie uwypuklić. W legendzie znaleźć się powinny tylko zdania proste wchodzące w skład zdań złożonych. Nieprawidłowa jest więc legenda następująca:

  
  ~~P: Jeżeli Tomasz jest bogaty, to nie jest on przystojny.~~
  ~~N: Tomasz nie jest przystojny.~~

  Gdyż znajdujące się w niej zdania są utworzone z innych zdań za pomocą spójników zdaniowych 'jeżeli, to' oraz 'nie'. W legendzie powinny znaleźć się tylko zdania proste:

  B: Tomasz jest ***b***ogaty
  P: Tomasz jest ***p***rzystojny

Ćwiczenie 2.C „legenda symbolizacji”

Skonstruuj legendę symbolizacji dla następującego zbioru zdań. Zacznij od wypisania wszystkich zdań prostych. Pamiętaj, że czasami różne zdania języka polskiego wyrażają to samo zdanie w sensie logicznym. (*Rozwiązania*, s. 301-302).

Uwaga. W logice zdań zwykle abstrahujemy od czasu. Przyjmuje się, że zdania ‘Tomasz zaprasza Zuzannę’, ‘Tomasz zaprosił Zuzannę’ czy ‘Tomasz zaprosi Zuzannę’ wyrażają to samo zdanie w sensie logicznym. Jest to uprawnione o tyle, że takie zdania nie są kompletne z logicznego punktu widzenia – musiałyby być uzupełnione tak, aby odnosiły się jednoznacznie do konkretnego zdarzenia. W kontekście rozmowy o Tomaszu czy Zuzannie zwykle mamy na myśli to samo zdarzenie.

(a)

Tomasz zaprosił Zuzannę do kina.

Jeżeli Zuzanna przyjmie zaproszenie Tomasza, to włoży ona duży kapelusz.

Zuzanna włoży duży kapelusz wtedy i tylko wtedy, gdy zechce dać Tomaszowi nauczkę.

Jeżeli Zuzanna zechce dać Tomaszowi nauczkę, to on nie zaprosi jej do kina.

Legenda symbolizacji:

	:	
	:	
	:	
	:	

(b)

Jeżeli Anna umówi się z Jackiem, to Beata umówi się z Grzegorzem.

Jeżeli Beata umówi się z Grzegorzem, to Anna umówi się z Jackiem.

Albo Cecylia albo Danuta umówi się z Hilarym.

Jeżeli Cecylia umówi się z Hilarym, to Anna nie umówi się z Jackiem; jeżeli Danuta umówi się z Hilarym, to Beata nie umówi się z Grzegorzem.

Legenda symbolizacji:

	:	
	:	
	:	
	:	

2.4. Negacja

Rozważymy teraz bardziej szczegółowo pięć rodzajów zdań złożonych (negację, koniunkcję, alternatywę, równoważność i implikację), które powstają z innych zdań za pomocą spójników zdaniowych (odpowiednio: spójnika negacji, spójnika koniunkcji, spójnika alternatywy, spójnika równoważności oraz spójnika implikacji). Rozpoczynamy od negacji.

Spójnik negacji:	Nieprawda, że
Symbol negacji*:	~
Schemat logiczny negacji:	~ $\boxed{}$
	~*p*
Człon negacji:	*p* – zdanie negowane

(W ramce $\boxed{}$ może znaleźć się dowolne zdanie).

Przykładem negacji jest np. następujące zdanie:

(1) Nieprawda, że świeciło słońce.

Negacja jest zdaniem złożonym: składa się ze *spójnika negacji* (zwanego też *funktorem negacji*) oraz pewnego zdania, zwanego też *zdaniem negowanym*. Funktor negacji jest funktorem jednoargumentowym, ponieważ tworzy zdanie złożone z jednego tylko zdania negowanego. W powyższym przykładzie zdaniem negowanym jest zdanie ‘Świeciło słońce’.

Spójnik negacji jest spójnikiem (funktorem) jednoargumentowym, gdyż tworzy zdanie (tu: negację) z *jednego* tylko zdania. Pozostałe spójniki, które poznamy, to spójniki dwuargumentowe – tworzące zdania złożone z dwóch zdań.

2.4.1. Matryca logiczna dla negacji

Znaczenie spójnika negacji podane jest w tzw. podstawowej matrycy logicznej dla negacji. W języku logików: podstawowa matryca logiczna dla negacji wyznacza własności semantyczne spójnika negacji. W języku laików: podstawowa matryca logiczna dla negacji mówi nam, w jaki sposób wartość logiczna negacji zależy od wartości logicznej zdania negowanego.

W przypadku negacji podstawowa matryca logiczna jest niezwykle intuicyjna. Zdanie negowane może być albo prawdziwe, albo fałszywe. Jeżeli zdanie negowane (*p*) jest prawdziwe, to jego negacja (~*p*) jest fałszywa. Jeżeli zdanie negowane (*p*) jest fałszywe, to jego negacja (~*p*) jest prawdziwa.

> Negacja jest prawdziwa zawsze i tylko wtedy, gdy zdanie negowane jest fałszywe. Zatem: negacja jest fałszywa zawsze i tylko wtedy, gdy zdanie negowane jest prawdziwe.

(Jeżeli jest to jasne, to pomiń szczegółowe wyjaśnienia i przejdź do wypełnienia poniższej matrycy logicznej na stronie 15).

Rozważmy przykład następującej negacji:

(2) Nieprawda, że filiżanka jest wzorzysta.

* Innym często spotykanym symbolem negacji jest ‘¬’, wówczas schemat logiczny negacji ma postać: ¬*p*. T. Kotarbiński (*Kurs logiki dla prawników*, Warszawa: PWN, 1975) stosował symbol ‘′’ (prim) stawiany za zdaniem, wówczas schemat logiczny negacji ma postać: *p*′. W tzw. notacji polskiej negacja zdania *p* ma postać: N*p*.

Zdaniem negowanym jest zdanie ‘Filiżanka jest wzorzysta’. Zdanie to może być albo fałszywe (0), albo prawdziwe (1) w zależności od tego, jak się rzeczy w świecie mają.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy rzeczy w świecie mają się tak, że zdanie ‘Filiżanka jest wzorzysta’ jest prawdziwe:

[jak się rzeczy w świecie mają]

p	*~p*
Filiżanka jest wzorzysta.	Nieprawda, że filiżanka jest wzorzysta.
1	

Jeżeli istotnie jest tak, że filiżanka jest wzorzysta, to gdy ktoś powie, wskazując na nią, „Przecież ta filiżanka nie jest wzorzysta” (z czego logicy rozumieją „Nieprawda, że filiżanka jest wzorzysta”), to orzeka on fałsz. Wpiszcie ‘0’ w powyższą rubrykę.

Jeżeli natomiast zdanie ‘Filiżanka jest wzorzysta’ jest w rzeczywistości fałszywe, a więc:

[jak się rzeczy w świecie mają]

p	*~p*
Filiżanka jest wzorzysta.	Nieprawda, że filiżanka jest wzorzysta.
0	

wówczas gdy ktoś powie „Filiżanka nie jest wzorzysta”, to mówi prawdę (wpiszcie ‘1’ wyżej).

Ta z pozoru banalna matryca logiczna jest w istocie naprawdę niebagatelnym odkryciem logików, którzy uświadomili sobie, iż wartość logiczna pewnych zdań (m.in. negacji, ale też wszystkich zdań złożonych za pomocą spójników zdaniowych logiki zdań) jest ściśle zdeterminowana przez wartość logiczną innych zdań (w przypadku negacji przez wartość logiczną zdania negowanego). Odkrycie to jest tym bardziej podziwu godne, że ten związek między wartością logiczną negacji a wartością logiczną zdania negowanego zachodzi dla wszystkich możliwych zdań, a przynajmniej trudno nam sobie wyobrazić, by mogło być inaczej (por. ramka, niżej). Ten związek wyrażony jest w formie podstawowej matrycy logicznej (uzupełnijcie matrycę logiczną, sprawdźcie, czy zrobiliście to poprawnie, z matrycami na końcu rozdziału):

Wartość logiczna negacji:

p	*~p*
1	
0	

Czy wiesz, że…

Jedną z motywacji dla słynnej teorii deskrypcji Bertranda Russella był fakt, iż pewne pary zdań, z których jedno jest negacją drugiego, zdają się wyłamywać spod ogólnej zasady, że jeżeli jedno z tych zdań jest fałszywe, to drugie jest prawdziwe. Russell rozważał zdanie:

(1) Obecny król Francji jest łysy.

Zdanie (1) nie wydaje się prawdziwe, bo przecież Francja nie jest monarchią. W takim razie należałoby uznać je za zdanie fałszywe. Russell zauważył jednak, że analogiczna argumentacja skłoni nas do uznania za fałszywe zdanie:

(2) Obecny król Francji nie jest łysy.

Zdanie to ponownie nie jest prawdziwe, bo Francja nie ma króla. Ponieważ (2) wydaje się po prostu negacją (1), moglibyśmy przypuszczać, że para tych zdań stanowi kontrprzykład dla uznania powyższej matrycy dla negacji.

Russell sądził jednak, że nie należy odrzucać naszego rozumienia negacji, a raczej należy uznać, że mylimy się, sądząc, że zdanie (2) jest negacją zdania (1). Sugerował on, że głęboka struktura logiczna powyższych zdań zdecydowanie się różni od ich struktury powierzchniowej. Zaproponował, aby zrozumieć zdania (1) i (2) jako zdania złożone (które oddać można dopiero w logice kwantyfikatorów):

(1′) Istnieje dokładnie jedna osoba, która jest obecnym królem Francji i jest łysa.
(2′) Istnieje dokładnie jedna osoba, która jest obecnym królem Francji i nie jest łysa.

Choć teoria deskrypcji Russella zakłada znajomość logiki kwantyfikatorów, to nawet bez jej znajomości widać, że istotnie (2′) nie jest negacją (1′). Negacją (1′) jest bowiem zdanie:

(N1′) Nieprawda, że istnieje dokładnie jedna osoba, która jest obecnym królem Francji i jest łysa.

2.4.2. Spójnik negacji w języku polskim

W języku polskim funktorowi negacji odpowiada nie tylko wyrażenie ‘nieprawda, że’, lecz również inne wyrażenia. Następujące zdania są przykładami negacji, które są – z punktu widzenia logiki zdań – równoznaczne ze zdaniem (1):

(1) Nieprawda, że świeciło słońce.
(2) Słońce nie świeciło.
(3) Fałszem jest twierdzenie, że świeciło słońce.
(4) Kłamstwem byłoby powiedzieć, że świeciło słońce.
(5) Słońce omieszkało zaświecić.

Wszystkie te zdania można przełożyć na język logiki zdań jako zdanie:

[1] ~S

gdzie ‘S’ jest to tzw. stała zdaniowa, zastępująca zdanie ‘Świeciło słońce’. Zdanie [1] nazywamy *symbolizacją* zdań (1)-(5) względem legendy ‘S: Świeciło słońce’. W powyższych przykładach zdaniem negowanym jest zdanie proste ‘Świeciło słońce’.

Zdanie negowane może być jednak złożone: w schemacie logicznym negacji ‘~p’ wolno pod zmienną zdaniową p podstawić dowolnie złożone zdanie, w szczególności można oczywiście podstawić jedno z powyższych zdań, np. zdanie (2). Powstałe w ten sposób zdanie:

(6) Nieprawda, że słońce nie świeciło.

symbolizujemy (względem powyższej legendy) jako:

[6] ~~S

Zdaniem negowanym może być jeszcze bardziej złożone zdanie:

(7) Byłoby kłamstwem powiedzieć, że nie jest prawdą, że nie świeciło słońce.

którego symbolizacją jest formuła:

[7] ~~~S

I tak dalej.

Celne pytanie: Czy zdanie (7) można przedstawić prościej, tj. za pomocą formuły [1]?

Jest to tym lepsze pytanie, że w tym wypadku istotnie jest tak, jak intuicje nam podpowiadają, a mianowicie zdania (1) i (7) są logicznie równoważne. W symbolizowaniu stosuje się jednak zasadę, która głosi, że

Porada babuni

Formuła logiczna winna jak najwierniej oddawać logiczną strukturę zdania.

Jednym z uzasadnień stosowania tej reguły jest po prostu fakt, że nierzadko bywa, iż nasze przekonania co do tego, co jest z czym równoważne, są właśnie mylne. Logika ma nam pomóc w logicznym uporządkowaniu naszych przekonań, a jeżeli tak, to zdania, które przekonania te wyrażają, muszą być oddane jak najwierniej.

Ćwiczenie 2.D „negacje – 1”

Zapisz odpowiedniki formuł logicznych w języku polskim. (*Rozwiązania*, s. 302).

N: Alicja pójdzie do ***n***ieba.
P: Bogdan pójdzie do ***p***iekła.

(a) ~N

(b) ~~N

(c) ~~P

(d) ~~~P

Ćwiczenie 2.E „negacje – 2”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań na podstawie legendy. (*Rozwiązania*, s. 302).

A: ***A***licja zrobi obiad
B: ***B***ogdan zrobi obiad.

(a) Alicja nie zrobi obiadu.

(b) Byłoby fałszem powiedzieć, że Bogdan zrobi obiad.

(c) Byłoby kłamstwem powiedzieć, że Alicja nie zrobi obiadu.

(d) Absurdalne jest przekonanie, że Bogdan zrobi obiad.

(e) Kłamałabym, mówiąc, że fałszem jest to, iż Bogdan nie zrobi obiadu.

(f) Nie kłamałabym, mówiąc, że nieprawdą jest, iż Alicja nie zrobi obiadu.

2.5. Koniunkcja

Spójnik koniunkcji:	i
Symbol koniunkcji*:	•
Schemat logiczny koniunkcji:	$\boxed{} \bullet \boxed{}$ $p \bullet q$
Człony koniunkcji:	p – pierwszy człon koniunkcji q – drugi człon koniunkcji

Przykładem koniunkcji jest np. następujące zdanie:

(1) Ala ma jabłko i Ala ma banana.

Ze względów stylistycznych powiedzielibyśmy raczej „Ala ma jabłko i banana” – z punktu widzenia logiki zdań oba zdania są równoznaczne, choć zdanie w formie (1) w sposób bardziej wyraźny podkreśla naturę koniunkcji jako zdania powstałego z dwóch zdań wskutek zastosowania spójnika koniunkcji. W przeciwieństwie bowiem do spójnika negacji, który jest funktorem jednoargumentowym, spójnik koniunkcji (a także pozostałe spójniki, które omówimy) jest funktorem dwuargumentowym.

Pierwsze zdanie, z którego składa się koniunkcja, nazywamy po prostu *pierwszym członem koniunkcji*, a drugie – *drugim członem koniunkcji*. W powyższym przykładzie pierwszym członem koniunkcji jest zdanie ‘Ala ma jabłko’ a drugim członem zdanie ‘Ala ma banana’.

* Często stosowany jest znak ‘∧’, czasem ‘&’. Kotarbiński (*op. cit.*) stosował właśnie znak ‘•’. W notacji polskiej koniunkcja p i q ma postać: Kpq.

2.5.1. Matryca logiczna dla koniunkcji

Podstawowa matryca logiczna dla koniunkcji jest również bardzo intuicyjna. Ponieważ jednak koniunkcja jest funktorem dwuargumentowym, więc musimy rozważyć cztery możliwe kombinacje wartości logicznych jej członów:

p jest prawdziwe, *q* jest prawdziwe;
p jest prawdziwe, *q* jest fałszywe;
p jest fałszywe, *q* jest prawdziwe;
p jest fałszywe, *q* jest fałszywe.

Koniunkcja jest prawdziwa zawsze i tylko wtedy, gdy oba jej człony są prawdziwe. Zatem: koniunkcja jest fałszywa zawsze i tylko wtedy, gdy którykolwiek z jej członów jest fałszywy.

(Jeżeli jest to jasne, to pomiń szczegółowe wyjaśnienia i wypełnij poniższą matrycę logiczną).

Rozważmy konkretny przykład koniunkcji, a mianowicie zdania (1). Wartość logiczna koniunkcji jest wyznaczona przez wartość logiczną jej członów – w naszym wypadku zdań ‘Ala ma jabłko’ oraz ‘Ala ma banana’. Zaczynamy od sytuacji, w której oba człony koniunkcji są prawdziwe:

[Co ma Ala:]

p	*q*	*p* • *q*
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko i banana
1	1	

Czy w takiej sytuacji prawdziwa będzie ich koniunkcja ‘Ala ma jabłko i banana’? Oczywiście tak.

Zobaczmy, jaki będzie nasz werdykt w sytuacji, gdy pierwszy człon jest prawdziwy, ale drugi fałszywy:

[Co ma Ala:]

p	*q*	*p* • *q*
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko i banana
1	0	

W takiej sytuacji niewątpliwie ocenimy wypowiedź „Ala ma jabłko i banana” jako wypowiedź fałszywą – Ala ma bowiem jabłko, ale nie ma banana.

Podobnie będzie w sytuacji, gdy pierwszy człon koniunkcji będzie fałszywy, natomiast drugi prawdziwy:

[Co ma Ala:]

p	*q*	*p* • *q*
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko i banana
0	1	

W takiej sytuacji koniunkcja ‘Ala ma jabłko i banana’ również nie będzie prawdziwa, gdyż Ala ma banana, ale nie jabłko.

Rozważmy wreszcie ostatnią sytuację, gdy oba człony koniunkcji są fałszywe, tj. fałszywe jest zarówno zdanie ‘Ala ma jabłko’, jak i zdanie ‘Ala ma banana’. Czy w takiej sytuacji prawdziwa będzie ich koniunkcja ‘Ala ma jabłko i banana’? Nie (Ala nie ma bowiem ani jabłka, ani banana).

[Co ma Ala:]

p	*q*	*p* • *q*
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko i banana
0	0	

Uzupełnij:

Wartość logiczna koniunkcji:

p	*q*	*p* • *q*
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

2.5.2. Koniunkcja w języku polskim

W języku polskim funktorowi koniunkcji odpowiada bardzo wiele wyrażeń, m.in.:

… i …
zarówno …, jak i …
… oraz …
…, jak również …
…, a …
…, ale …
…, lecz …
… natomiast …
…; …
… pomimo tego, że …
… chociaż …
…, podczas gdy …

Subtelne różnice znaczeniowe między tymi wyrażeniami są w logice zdań pomijane, ponieważ wszystkie te wyrażenia mają ten sam sens z punktu widzenia warunków, w których zdania za ich pomocą utworzone są prawdziwe.

Rozważmy parę przykładów symbolizacji, przyjmując następującą legendę symbolizacji:

(2) Jan kocha Marię, <u>chociaż</u> ona ledwo go toleruje.

Przyjmując poniższą legendę symbolizacji, symbolizacją zdania (2) będzie formuła:

[2] K • T

K: Jan ***k***ocha Marię.
T: Maria ledwo ***t***oleruje Jana.

Z punktu widzenia logiki zdań, koniunkcja ta oddaje też sens (*sc*. warunki prawdziwości) następujących zdań:

(3) Jan kocha Marię, <u>mimo że</u> ona ledwo go toleruje.
(4) Jan kocha Marię, <u>a</u> ona ledwo go toleruje.
(5) Jan kocha Marię, <u>ale</u> ona ledwo go toleruje.
(6) Jan kocha Marię, <u>podczas gdy</u> ona ledwo go toleruje.
(7) Jan kocha Marię, <u>natomiast</u> ona ledwo go toleruje.
(8) Prawdą jest to, że Jan kocha Marię <u>oraz</u> to, że Maria ledwo toleruje Jana.

Niewątpliwie zdania (2)-(8) subtelnie się między sobą różnią, niemniej jednak każde z nich jest prawdziwe zawsze i tylko wtedy, gdy prawdziwe są oba jego człony. Dlatego właśnie wszystkie one traktowane są jako koniunkcje.

W powyższych przykładach człony koniunkcji są zdaniami prostymi. Koniunkcje mogą jednak być złożone nie tylko ze zdań prostych, lecz również ze zdań złożonych. Oto przykład koniunkcji, której człony są negacjami:

(9) Andrzej <u>nie</u> ma pracy, <u>a w dodatku</u> <u>nie</u> potrafi gotować.

Symbolizacją tego zdania jest formuła:

[9] ~P • ~G

P: Andrzej ma ***p***racę.
G: Andrzej potrafi ***g***otować.

Człony koniunkcji mogą być też złożone za pomocą innych spójników, również samej koniunkcji. W takim jednak wypadku, gdy jeden z członów koniunkcji jest koniunkcją musimy zastosować nawiasy ujmujące człon-koniunkcję.

K: Ala ma ***k***ota.
O: Ela ma k***o***ta.
P: Ela ma ***p***sa.

[10] K • (O • P)
(10) Ala ma kota, podczas gdy Ela ma zarówno kota, jak i psa.

Systematyczniej zdaniami złożonymi ze zdań złożonych zajmiemy się w następnym rozdziale.

Ćwiczenie 2.F „koniunkcje – 1”

Zapisz odpowiedniki formuł logicznych w języku polskim (zwróć uwagę na to, jak różne spójniki koniunkcyjne narzucają się w różnych kontekstach). (*Rozwiązania*, s. 302).

A: ***A***licja pójdzie do nieba.
B: ***B***olek pójdzie do nieba.
C: ***C***ezary pójdzie do piekła.

(a) A • B

(b) A • C

(c) B • C

(d) (A • B) • C

(e) A • ~B

(f) ~A • B

Ćwiczenie 2.G „koniunkcje – 2”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań. (W niektórych wypadkach przydatna będzie poniższa porada babuni). (*Rozwiązania*, s. 303).

A: ***A***licja zrobi obiad
B: ***B***ogdan zrobi obiad.
C: ***C***ezary zrobi kolację.

(a) Alicja i Bogdan zrobią obiad.

(b) Alicja zrobi obiad, choć Cezary nie zrobi kolacji.

(c) Bogdan nie zrobi obiadu, mimo że Alicja też obiadu nie zrobi.

(d) Alicja zrobi obiad, a Cezary zrobi kolację.

(g) Chociaż Cezary nie zrobi kolacji, Bogdan zrobi obiad.

(h) Bogdan nie zrobi obiadu, a co więcej Cezary nie zrobi kolacji.

(i) Alicja i Bogdan zrobią obiad, ale Cezary nie zrobi kolacji.

(j) Zarówno Alicja, jak i Bogdan z ochotą zrobią obiad.

(k) Cezary nie kiwnie nawet palcem, by zrobić kolację, a Bogdan – by zrobić obiad.

(l) Próżno oczekiwać, by Alicja zrobiła obiad, ale przynajmniej Cezary zrobi kolację.

Porada babuni

Pamiętaj, że logika zdań pozwala na jedynie uproszczone odzwierciedlenie treści zdań i myśli! W symbolizacjach ujmuj tylko tyle, ile ująć pozwala struktura logiczna zdania i legenda.

2.6. Alternatywa

Spójnik alternatywy:	lub
Symbol alternatywy[*]:	$\vee$
Schemat logiczny alternatywy:	$\square \vee \square$ $p \vee q$
Człony alternatywy:	*p* – pierwszy człon alternatywy *q* – drugi człon alternatywy

Przykładem alternatywy jest np. następujące zdanie:

(1) Ala ma jabłko <u>lub</u> Ala ma banana.

które w języku polskim wyrazilibyśmy raczej zdaniem ‘Ala ma jabłko lub banana’. Podobnie jak funktor koniunkcji funktor alternatywy jest funktorem dwuargumentowym. Pierwsze ze zdań, z których składa się alternatywa, nazywamy *pierwszym członem alternatywy*, a drugie – *drugim członem alternatywy*. W powyższym przykładzie pierwszym członem alternatywy jest zdanie ‘Ala ma jabłko’ a drugim członem – zdanie ‘Ala ma banana’.

2.6.1. Matryca logiczna dla alternatywy

Matryca logiczna dla alternatywy jest intuicyjna – choć zmuszeni będziemy do pewnej regulacji naszych intuicji, gdyż w języku naturalnym zlewają się ze sobą różne rodzaje alternatyw.

> Alternatywa jest prawdziwa zawsze i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z jej członów jest prawdziwy. Zatem: alternatywa jest fałszywa zawsze i tylko wtedy, gdy oba jej człony są fałszywe.

(Jeżeli jest to jasne, to pomiń szczegółowe wyjaśnienia i przejdź do wypełnienia poniższej matrycy logicznej na stronie 22).

Weźmy za przykład zdanie (1). Rozważmy najpierw trzy bezsporne sytuacje. Rozważmy sytuację (rząd drugi matrycy), gdy pierwszy człon alternatywy jest prawdziwy, tj. prawdziwe jest zdanie ‘Ala ma jabłko’, lecz zdanie ‘Ala ma banana’ jest fałszywe.

[Co ma Ala:]

p	q	$p \vee q$
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko lub banana
1	0	

Czy w takiej sytuacji prawdziwe będzie zdanie ‘Ala ma jabłko lub banana’? – Tak (Ala ma bowiem przynajmniej jeden z rzeczonych owoców, a mianowicie jabłko).

Analogicznie będzie w sytuacji (rząd trzeci), gdy pierwszy człon koniunkcji będzie fałszywy, natomiast drugi prawdziwy:

[Co ma Ala:]

p	q	$p \vee q$
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko lub banana
0	1	

W takiej sytuacji zdanie ‘Ala ma jabłko lub banana’ będzie prawdziwe, gdyż Ala ma przynajmniej jeden z owoców, tym razem banana.

[*] Kotarbiński (*op. cit.*) stosował symbol ‘+’. W notacji polskiej alternatywa *p* i *q* ma postać: A*pq*.

Rozważmy przypadek (rząd czwarty), gdy oba człony alternatywy są fałszywe, tj. fałszywe jest zarówno zdanie ‘Ala ma jabłko’ jak i zdanie ‘Ala ma banana’.

[Co ma Ala:]

p	q	$p \vee q$
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko lub banana
0	0	

Czy wówczas prawdziwe będzie zdanie ‘Ala ma jabłko lub banana’? Nie, Ala nie ma bowiem ani jabłka, ani banana.

Pozostała do rozważenia sytuacja (rząd pierwszy), gdy oba człony są prawdziwe, tj. prawdziwe jest zarówno zdanie ‘Ala ma jabłko’, jak i zdanie ‘Ala ma banana’.

[Co ma Ala:]

p	q	$p \vee q$
Ala ma jabłko	Ala ma banana	Ala ma jabłko lub banana
1	1	

Czy w takiej sytuacji prawdziwe będzie zdanie ‘Ala ma jabłko lub banana’? Zastanówcie się przez chwilę.

Rokrocznie zadaję to pytanie studentom i rokrocznie uzyskuję ten sam rozkład odpowiedzi. Mniej więcej 49% osób odpowiada „tak”, 49% odpowiada „nie”, a 2% albo nie wie, albo śpi.

Jeżeli odpowiedzieliście „tak”, to mieliście na myśli tzw. alternatywę zwykłą (która odpowiada wyrażeniu ‘przynajmniej jedno z dwojga’). Jeżeli odpowiedzieliście „nie”, to mieliście na myśli tzw. alternatywę rozłączną (która odpowiada wyrażeniu ‘dokładnie jedno z dwojga’). Oba spójniki (alternatywy zwykłej i alternatywy rozłącznej) funkcjonują w języku potocznym. Niekiedy jasne jest, że mamy do czynienia z alternatywą rozłączną (jest tak np. w zdaniu ‘Asia wyjdzie za mąż za Witka lub za Cezarego’). Niekiedy jasne jest, że chodzi o alternatywę zwykłą (np. ‘Osoby, które przebywały w Wielkiej Brytanii lub we Francji w latach 1980-1990 nie mogą oddawać krwi’). Są wreszcie zdania, gdzie nie jest jasne, jaki spójnik jest zamierzony (np. ‘Na deser możesz dostać lody lub sernik’).

W klasycznym ujęciu logiki zdań przyjmuje się jako podstawową alternatywę zwykłą – nierozłączną, która jest prawdziwa, gdy oba człony są prawdziwe (alternatywa rozłączna jest fałszywa, gdy oba człony są prawdziwe). Jest to decyzja teoretyczna, którą podjęto, kierując się pewnymi przesłankami (por. wyjaśnienie w ramce). Alternatywę rozłączną można w bardzo łatwy sposób oddać, używając spójnika alternatywy zwykłej, koniunkcji i negacji, wzorując się na intuicyjnym uściśleniu, że w grę wchodzi alternatywa rozłączna:

Beata dostanie albo lody, albo tiramisu, ale nie zarazem jedno i drugie.
(L ∨ T) • ~(L • T)

L: Beata dostanie ***l***ody.
T: Beata dostanie ***t***iramisu.

Do symbolizacji alternatywy rozłącznej za pomocą alternatywy zwykłej wrócimy jeszcze w rozdziale 4. Odtąd przyjmować będziemy, po pierwsze, że funktor ∨ jest funktorem alternatywy zwykłej, a po drugie, że alternatywy w języku polskim będziemy rozumieć jako alternatywy zwykłe, chyba że będzie to *explicite* wyrażone przez dodanie takich fraz jak ‘ale nie jedno i drugie’.

Uzupełnij:

Wartość logiczna alternatywy zwykłej:

p	q	$p \vee q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Dlaczego większość alternatyw w języku naturalnym to alternatywy zwykłe

Jednym z podstawowych powodów, ze względu na które takie wyrażenia jak ‘lub’, ‘albo’, ‘czy’ itd. traktuje się jako alternatywy zwykłe, jest związane z tym, że przyjmując takie rozumienie alternatywy, daje się ująć szereg intuicyjnie przez nas rozpoznawanych związków logicznych między zdaniami. Wyobraźmy sobie rozmowę dwóch osób:

Leś: – Zdaje się, że Ala była w Anglii lub w Walii.
Grześ: – Nie, nieprawda! Ala nie była ani w Anglii, ani w Walii.

Grześ, uznając zdanie ‘Ala nie była ani w Anglii, ani w Walii’ za bezpośrednie zaprzeczenie wypowiedzi Lesia daje wyraz temu, że rozumie ‘lub’ jako alternatywę zwykłą. Okazuje się bowiem, że zdanie ‘Nie jest prawdą to, że Ala była w Anglii lub w Walii’ (gdzie ‘lub’ jest spójnikiem alternatywy zwykłej) jest równoważne zdaniu ‘Ala nie była ani w Anglii, ani w Walii’. Natomiast zdanie ‘Nie jest prawdą to, że Ala była w Anglii lub w Walii’ (gdzie ‘lub’ jest spójnikiem alternatywy rozłącznej) jest równoważne zdaniu ‘Ala była w Anglii wtedy i tylko wtedy, gdy była w Walii’. Gdyby więc Grześ rozumiał ‘lub’ w wypowiedzi Lesia jako alternatywę rozłączną, musiałby inaczej uzupełnić swoją wypowiedź. Okazuje się, że zazwyczaj, gdy alternatywie przeczymy, przywołujemy właśnie zdanie postaci ‘ani …, ani …’, a nie zdanie równoważnościowe postaci ‘… wtedy i tylko wtedy, gdy …’, wskazując tym samym, że mamy na myśli alternatywę zwykłą.

2.6.2. Alternatywa w języku polskim

W języku polskim funktorowi alternatywy odpowiadają następujące wyrażenia:

… lub …
… albo …
albo …, albo …
… bądź …
… czy …

Rozważmy parę przykładów symbolizacji:

(2) Asia wyjedzie do Grecji <u>lub</u> do Hiszpanii.

G: Asia wyjedzie do ***G***recji.
H: Asia wyjedzie do ***H***iszpanii.

Symbolizacją zdania (2) będzie:

[2] $G \vee H$

Umówiliśmy się też, że analogicznie traktować będziemy wszelkie wystąpienia ‘lub’ nawet w kontekstach, gdzie prawie na pewno mamy na myśli alternatywę rozłączną:

(3) Asia wyjdzie za Witka <u>lub</u> Cezarego.
[3] $C \vee W$

C: Asia wyjdzie za ***C***ezarego.
W: Asia wyjdzie za ***W***itka.

W szczególnych wypadkach możemy chcieć zasygnalizować rozłączność alternatywy, i wówczas dodać musimy ‘ale nie za nich obydwu’ (o symbolizacji takiej alternatywy będzie mowa szczegółowiej w rozdziale 3).

Oczywiście człony alternatywy mogą być złożone.

(4) <u>Albo</u> Basia, <u>albo</u> Czesia <u>nie</u> dostanie psa.
[Albo Basia nie dostanie psa, albo Czesia nie dostanie psa]
[4] $\sim B \vee \sim C$

B: ***B***asia dostanie psa.
C: ***C***zesia dostanie psa.

(5) <u>Albo</u> Basia – <u>ale</u> <u>nie</u> Czesia – dostanie psa, <u>albo</u> Czesia – <u>ale</u> <u>nie</u> Basia – dostanie psa.
[Albo Basia dostanie psa, a Czesia nie dostanie psa, albo Czesia dostanie psa, a Basia nie dostanie psa.]
[5] $(B \bullet \sim C) \vee (C \bullet \sim B)$

Czy wiesz, że…

Alternatywa rozłączna odegrała ważną rolę w rozwoju sztucznej inteligencji (SI), a w szczególności sieci neuronowych. W latach 50. ubiegłego wieku rozwijały się prężnie dwa paradygmaty badań. Pierwszy z nich to klasyczna SI, rozwijana m.in. przez Allena Newella i Herberta Simona, według której nasz umysł funkcjonuje niczym program komputerowy oparty na pewnych regułach logicznych. Aby skonstruować myślący komputer trzeba wprowadzić odpowiednio skomplikowane programy uwzględniające nasze reprezentacje rzeczywistości. Równolegle rozwijał się inny paradygmat, tzw. perceptronów, pierwowzorów współczesnych sieci neuronowych. Perceptrony składały się z dwóch warstw komórek – wejścia i wyjścia – między którymi mogła się tworzyć dowolna liczba połączeń. Perceptrony wykonywały pewne zadania znakomicie (np. kojarzenia, odtwarzania niepełnej informacji itd.), choć nie dorównywały klasycznej SI pod innymi względami. Wielką jednak zaletą perceptronów było to, że w przeciwieństwie do klasycznej SI, gdzie to programista musiał zdecydować, które elementy rzeczywistości będą przez komputer uznane za istotne, perceptrony w dużej mierze same „decydowały" o istotności danych (oczywiście mowa tu była o istotności na potrzeby wykonywania pewnych zadań).

Oba nurty rozwijały się równolegle aż do końca lat 60., kiedy Marvin Minsky i Seymour Papert opublikowali rzetelną, lecz druzgocącą dla zwolenników perceptronów, książkę omawiającą zalety, ale wskazującą też zasadnicze ograniczenia perceptronów. Jedną z poprzeczek poznawczych, której – jak dowiedli Minsky i Pappert – perceptrony nie będą mogły przeskoczyć, jest umiejętność opanowania matrycy logicznej dla alternatywy rozłącznej. Perceptrony bez trudu radziły sobie z alternatywą zwykłą, koniunkcją i negacją, ale nie mogły opanować alternatywy rozłącznej. Publikacja tej książki doprowadziła w zasadzie do zastoju w badaniach nad perceptronami na około dekadę.

Na początku lat 80. David Rumelhart i James McClelland rozpoczęli prace nad sieciami neuronowymi. W przeciwieństwie jednak do perceptronów sieci te składały się nie z dwóch tylko warstw, ale z przynajmniej trzech – gdzie trzecia warstwa to warstwa tzw. komórek ukrytych, a co jeszcze ważniejsze zaczęli stosować nieliniowe funkcje aktywacji komórek. Doprowadziło to do przełomu i prawdziwej rewolucji naukowej. Nowe sieci bez trudu poradziły sobie z alternatywą rozłączną, a współcześnie mają wiele zastosowań szczególnie tam, gdzie potrzebne są umiejętności, które nabywamy – jak mówimy – w sposób częściowo intuicyjny. Sieci bowiem uczą się same na zasadzie prób i błędów, same dostosowują połączenia między komórkami tak, by optymalnie wykonywać zadanie, którego się uczą.

Ćwiczenie 2.H „alternatywy – 1”

Zapisz odpowiedniki formuł logicznych w języku polskim. (*Rozwiązania*, s. 303).

A: ***A***la odkurzy dom.
B: ***B***oguś odkurzy dom.
C: ***C***zesia zrobi kolację.

D: ***D***amian umyje naczynia.
K: Boguś zrobi ***k***olację.
N: Boguś umyje ***n***aczynia.

(a) $D \vee N$

(b) $A \vee B$

(c) $B \vee C$

(d) $K \vee N$

(e) $D \vee {\sim}K$

(f) ${\sim}B \vee C$

(g) $(C \bullet D) \vee (K \bullet N)$

(h) $(C \bullet N) \vee (K \bullet D)$

(i) $(A \vee B) \vee (K \vee N)$

Ćwiczenie 2.I „alternatywy – 2”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań. (*Rozwiązania*, s. 304).

A: ***A***la zda logikę.
B: ***B***oguś zda logikę.
C: ***C***zesia zda prawo karne.

D: ***D***amian zda prawo karne.
K: Boguś zda prawo ***k***arne.
M: Ala zda ***m***atematykę.

(a) Ala bądź Boguś zdali logikę.

(b) Prawo karne zdali Czesia lub Damian.

(c) Boguś zdał logikę lub prawo karne.

(d) Ala zdała logikę bądź matematykę.

(e) Albo Ala zda logikę, albo Damian nie zda prawa karnego.

(f) Albo Boguś nie zda logiki, albo nie zda prawa karnego.

(g) Albo Czesia zda prawo karne, albo Damian lub Boguś zdadzą prawo karne.

(h) Albo Ala i Boguś zdadzą logikę, albo Czesia i Damian zdadzą prawo karne.

(i) Albo Ala zda logikę lub matematykę, albo Boguś zda logikę lub prawo karne.

(j) Albo Ala zda logikę, a Damian zda prawo karne, albo Boguś nie zda logiki.

2.7. Równoważność

Spójnik równoważności:	wtedy i tylko wtedy, gdy
Symbol równoważności*:	$\equiv$
Schemat logiczny równoważności:	$\square \equiv \square$ $p \equiv q$
Człony równoważności:	p – pierwszy człon równoważności q – drugi człon równoważności

Przykładem równoważności jest np. następujące zdanie:

(1) Krzysztof idzie do kina <u>wtedy i tylko wtedy, gdy</u> Anna idzie do kina.

Funktor równoważności jest również funktorem dwuargumentowym. Pierwsze ze zdań które ze sobą łączy spójnik równoważności, nazywamy *pierwszym członem równoważności*, a drugie – *drugim członem równoważności*. W powyższym przykładzie pierwszym członem równoważności jest zdanie ‘Krzysztof idzie do kina’, a drugim członem zdanie ‘Anna idzie do kina’.

2.7.1. Matryca logiczna dla równoważności

Matryca logiczna dla równoważności jest intuicyjna.

> Równoważność jest prawdziwa zawsze i tylko wtedy, gdy oba jej człony mają tę samą wartość logiczną, tj. gdy oba człony są prawdziwe lub gdy oba człony są fałszywe. Zatem: równoważność jest fałszywa zawsze i tylko wtedy, gdy wartość logiczna jej członów jest różna.

(Jeżeli jest to jasne, to pomiń szczegółowe wyjaśnienia i przejdź do wypełnienia poniższej matrycy logicznej na stronie 27).

Wyobraźmy sobie, że traktujemy zdanie ‘Krzysztof idzie do kina wtedy i tylko wtedy, gdy Anna idzie do kina’ jako pewne przewidywanie. Przewidujemy zatem, że Krzysztof pójdzie do kina wtedy, ale tylko wtedy, gdy do kina pójdzie Anna.

Ponownie rozważymy wszystkie cztery możliwe kombinacje wartości logicznych zdań składowych i pytać będziemy, czy nasze przewidywanie się sprawdziło. Zacznijmy od sytuacji, w której pierwszy człon równoważności jest prawdziwy, a drugi fałszywy, tj. Krzysztof idzie do kina, a Anna nie:

[Kto idzie do kina]

p	q	$p \equiv q$
Krzysztof idzie do kina	Anna idzie do kina	Krzysztof idzie do kina wtedy i tylko wtedy, gdy Anna idzie do kina
1	0	

Oczywiste wydaje się, że w takim wypadku nasze przewidywanie, że Krzysztof idzie do kina zawsze i tylko wtedy, gdy Anna do kina idzie, nie sprawdziło się. W tym bowiem wypadku Krzysztof poszedł do kina, a Anna nie. Okazało się zatem, że Krzysztof chodzi do kina, ale nie tylko wtedy, gdy chodzi Anna.

* Stosowany też bywa znak ‘$\leftrightarrow$’, a także ‘$\Leftrightarrow$’. Kotarbiński (*op. cit.*) używał znaku ‘$=$’. W notacji polskiej równoważność p i q ma postać: E*pq*.

Co powiemy o naszym przewidywaniu, jeśli miałoby się zdarzyć tak, że pierwszy człon równoważności jest fałszywy, a drugi prawdziwy, tj. Anna idzie do kina, a Krzysztof nie:

[Kto idzie do kina]

p	*q*	*p* ≡ *q*
Krzysztof idzie do kina	Anna idzie do kina	Krzysztof idzie do kina wtedy i tylko wtedy, gdy Anna idzie do kina
0	1	

Również w tym wypadku nasze przewidywanie, że Krzysztof idzie do kina zawsze i tylko wtedy, gdy Anna do kina idzie, nie sprawdziło się. W tym wypadku Krzysztof nie poszedł do kina, podczas gdy Anna do kina poszła, a zatem nieprawdą jest, że Krzysztof chodzi do kina zawsze, gdy do kina chodzi Anna.

Przejdźmy teraz do sytuacji, gdy zarówno pierwszy, jak i drugi człon równoważności jest prawdziwy, tj. zarówno Krzysztof, jak i Anna idą do kina:

[Kto idzie do kina]

p	*q*	*p* ≡ *q*
Krzysztof idzie do kina	Anna idzie do kina	Krzysztof idzie do kina wtedy i tylko wtedy, gdy Anna idzie do kina
1	1	

W tym wypadku nasze przewidywanie, że Krzysztof idzie do kina zawsze i tylko wtedy, gdy Anna do kina idzie, sprawdziło się.

Pozostaje ostatni przypadek, gdy zarówno pierwszy, jak i drugi człon równoważności jest fałszywy, tj. ani Krzysztof, ani Anna nie idą do kina:

[Kto idzie do kina]

p	*q*	*p* ≡ *q*
Krzysztof idzie do kina	Anna idzie do kina	Krzysztof idzie do kina wtedy i tylko wtedy, gdy Anna idzie do kina
0	0	

Również tym razem nasze przewidywanie, że Krzysztof idzie do kina zawsze i tylko wtedy, gdy Anna do kina idzie, się potwierdziło – skoro Anna nie poszła, to Krzysztof też nie poszedł, bo zgodnie z naszym przewidywaniem miał pójść tylko wtedy, Anna idzie do kina.

Uzupełnij następującą matrycę logiczną:

Wartość logiczna równoważności:

p	*q*	*p* ≡ *q*
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

2.7.2. Równoważność w języku polskim

W języku polskim funktorowi równoważności odpowiadają takie wyrażenia, jak:

… zawsze i tylko wtedy, gdy …
… wtedy i tylko wtedy, gdy …
… dokładnie wtedy, gdy …

Rozważmy parę przykładów symbolizacji:

(2) Gabrysia wychodzi na zakupy dokładnie wtedy, gdy Tomek idzie do baru.

Symbolizacją zdania (2) będzie:

[2] G ≡ T

G: ***G***abrysia wychodzi na zakupy.
T: ***T***omek idzie do baru.

Symbolizacją zdania:

(3) Kamil ładnie się ubiera wtedy, ale tylko wtedy, gdy albo chce na siebie zwrócić uwagę, albo nie jest leniwy.

jest formuła:

[3] K ≡ (U ∨ ~L)

K: ***K***amil ładnie się ubiera.
U: Kamil chce na siebie zwrócić ***u***wagę.
L: Kamil jest ***l***eniwy.

Związki przyczynowo-skutkowe

Częstym błędem początkujących adeptów logiki jest przypuszczenie, że równoważność i implikacja oddają związki przyczynowo-skutkowe. Są to jednak spójniki zbyt słabe. Według tzw. kontrfaktycznych teorii przyczynowości, związki przyczynowo-skutkowe można wyrazić za pomocą pewnych zdań kontrfaktycznych. Upraszczając trochę, zdanie ‘Pocierając zapałkę o brzeg pudełka, Jan spowodował jej zapalenie się’ należałoby rozumieć jako zdanie ‘Gdyby Jan nie potarł zapałki o brzeg pudełka, zapałka nie zapaliłaby się’. Okazuje się jednak, że zrozumienie struktury logicznej zdań postaci ‘Gdyby było tak, że …, to byłoby tak, że …’ jest bardzo złożone i wymaga odwołania do logiki modalnej.

Ćwiczenie 2.J „równoważności – 1”

Zapisz odpowiedniki formuł logicznych w języku polskim. (*Rozwiązania*, s. 304).

A: ***A**la odkurzy dom.*
B: ***B**oguś odkurzy dom.*
C: ***C**zesia zrobi kolację.*
D: ***D**amian umyje naczynia.*
K: Boguś zrobi ***k**olację.*
N: Boguś umyje ***n**aczynia.*

(a)	$D \equiv K$	
(b)	$A \equiv D$	
(c)	$B \equiv C$	
(d)	$K \equiv N$	
(e)	$D \equiv \sim K$	
(f)	$B \equiv \sim C$	
(g)	$C \equiv (B \bullet N)$	
(h)	$(A \vee B) \equiv (C \vee K)$	

Ćwiczenie 2.K „równoważności – 2”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań. (*Rozwiązania*, s. 304).

A: ***A**la zda logikę.*
B: ***B**oguś zda logikę.*
C: ***C**zesia zda prawo karne.*
D: ***D**amian zda prawo karne.*
K: Boguś zda prawo ***k**arne.*
M: Ala zda ***m**atematykę.*

(a)	Ala zda logikę wtedy i tylko wtedy, gdy Boguś zda logikę.	
(b)	Czesia zda prawo karne wtedy, ale tylko wtedy, gdy Ala zda logikę.	
(c)	Damian zda prawo karne wtedy i tylko wtedy, gdy Boguś nie zda logiki.	
(d)	Boguś zda logikę dokładnie wtedy, gdy Ala nie zda logiki.	
(e)	Czesia zda prawo karne dokładnie wtedy, gdy Damian i Boguś je zdadzą.	
(f)	Ala zda logikę bądź matematykę wtedy i tylko wtedy, gdy Boguś zda logikę.	

2.8. Implikacja

Spójnik implikacji:	jeżeli …, to …
Symbol implikacji[*]:	$\rightarrow$
Schemat logiczny implikacji:	$\boxed{} \rightarrow \boxed{}$ $p \rightarrow q$
Człony implikacji:	p – poprzednik q – następnik

Przykładem implikacji jest np. następujące zdanie:

(1) Jeżeli Czesia włoży nową sukienkę, to Lech zaprosi ją na kolację.

Funktor implikacji jest funktorem dwuargumentowym. W implikacji ujmuje się pewną zależność: coś (zaproszenie Czesi przez Lecha) wystąpi pod pewnym *warunkiem* (włożenia przez Czesię nowej sukienki). Jeden z członów implikacji, występujący po wyrażeniu 'jeżeli', a ujmujący warunek – nazywamy *poprzednikiem implikacji,* a drugie zdanie – występujące po wyrażeniu 'to' – nazywamy *następnikiem implikacji*. W powyższym przykładzie poprzednikiem jest zdanie 'Czesia włoży nową sukienkę', a następnikiem – zdanie 'Lech zaprosi Czesię na kolację'.

2.8.1. Spójnik implikacji w języku polskim

W przeciwieństwie do pozostałych matryc, matryca logiczna dla implikacji jest nieintuicyjna i dlatego pozostawimy jej omówienie na zakończenie, a w zasadzie znajomość jej nie będzie potrzebna aż do rozdziału 4. Na razie wystarczy w zupełności intuicyjne rozumienie implikacji, które jest tak bogate, że w logice zdań właśnie nie daje się go adekwatnie ująć (stąd też wynikają kłopoty początkujących studentów logiki ze zrozumieniem matrycy logicznej dla implikacji).

W języku polskim funktorowi implikacji odpowiadają takie wyrażenia, jak:

Przyjmując, że …, …
Przy założeniu, że …, …
…, jeżeli …
… wtedy, gdy …
…, o ile …
… pod warunkiem, że …

Należy zwrócić uwagę, że nie we wszystkich tych wyrażeniach poprzednik implikacji występuje przed następnikiem. Będzie tak w wypadku wyrażenia 'Jeżeli …, to …' lub 'Przyjmując, że …, …', lecz już nie w wypadku wyrażenia '…, o ile …' lub '…, jeśli …'. Prześledźmy to, próbując sparafrazować zdanie (1), używając tych wyrażeń. (W każdym wypadku poprzednik implikacji jest podkreślony).

(2) Przyjmując, że *Czesia włoży nową sukienkę*, Lech zaprosi ją na kolację.
(3) Przy założeniu, że *Czesia włoży nową sukienkę*, Lech zaprosi ją na kolację.
(4) Lech zaprosi Czesię na kolację, jeżeli *Czesia włoży nową sukienkę*.
(5) Lech zaprosi Czesię na kolację wtedy, gdy *Czesia włoży nową sukienkę*.
(6) Lech zaprosi Czesię na kolację, o ile *Czesia włoży nową sukienkę*.
(7) Lech zaprosi Czesię na kolację pod warunkiem, że *Czesia włoży nową sukienkę*.

Podstawową kwestią w symbolizacji każdej implikacji jest rozstrzygnięcie, które zdanie jest poprzednikiem, a które następnikiem. Jak powiedzieliśmy, poprzednik ujmuje warunek, od którego zależy to, co głosi następnik. Prześledźmy to na paru przykładach.

[*] W literaturze anglojęzycznej najczęściej stosowany jest znak '$\supset$' (tzw. „horseshoe", czyli podkowa). Używany jest on też przez Ziembińskiego (*Logika praktyczna*, Warszawa: PWN, 2002, wydanie pierwsze: 1959). Czasem występuje '$\Rightarrow$'. Kotarbiński (*op. cit.*) stosował symbol '$<$'. W notacji polskiej implikacja ma postać: C*pq*.

(8) Przyjmując, że Zenek kupi garnitur, Zenek ożeni się z Renatą.

Mamy dwa sposoby podejścia do symbolizacji zdania (8): przez analizę lub przez parafrazę.

Możemy przeanalizować, co jest warunkiem czego. Warunkiem jest tu kupienie garnituru, a zatem zdanie ‘Zenek kupi garnitur’ jest poprzednikiem. Czego warunkiem jest kupienie garnituru? Oczywiście: ożenku z Renatą. Zatem zdanie ‘Zenek ożeni się z Renatą’ jest następnikiem.

Innym sposobem podejścia do symbolizacji zdania (8) jest parafraza tego zdania do kanonicznej formy implikacji używającej wyrażenia ‘jeżeli …, to …’. Musimy więc wyrazić to, co wyraża zdanie (8) za pomocą zdania o kształcie:

(8′) Jeżeli to

Innymi słowy, jeżeli Zenek kupi garnitur, to Zenek ożeni się z Renatą. W symbolach:

[8] G → Ż

G: Zenek kupi ***g***arnitur.
Ż: Zenek o***ż***eni się z Renatą.

Oto inny przykład:

(9) Fred przeprowadzi się nawet na Syberię pod warunkiem, że Irina z nim pojedzie.

Warunkiem (czego?) przeprowadzenia na Syberię (następnik) jest (co?) to, żeby Irina pojechała z Fredem (poprzednik). Parafrazując do kanonicznej formy implikacji:

(9′) Jeżeli to

W symbolach:

[9] I → S

I: ***I***rina pojedzie z Fredem.
S: Fred przeprowadzi się na ***S***yberię.

Oczywiście w następniku i w poprzedniku mogą występować zdania złożone, jak ma to miejsce w następujących dwóch przykładach.

(10) Kot nie będzie drapał mebli, jeśli zostanie tego oduczony.

Warunkiem (czego?) niedrapania mebli przez kota (następnik), jest (co?) oduczenie go tego (poprzednik). Parafrazując do kanonicznej formy implikacji:

(10′) Jeżeli to

Zwróćmy uwagę, że w następniku występuje negacja. W symbolach:

[10] O → ~K

O: Kot zostanie ***o***duczony drapania mebli.
K: ***K***ot będzie drapał meble.

(11) Grażyna wystąpi o rozwód, o ile Władek się nie zmieni.

Warunkiem (czego?) wystąpienia Grażyny o rozwód (następnik), jest (co?) brak zmiany Władka (poprzednik). Parafrazując do kanonicznej formy implikacji:

(11′) Jeżeli to

Zwróćmy uwagę, że tym razem negacja występuje w poprzedniku. W symbolach:

[11] ~Z → R

R: Grażyna wystąpi o ***r***ozwód.
Z: Władek się ***z***mieni.

Ćwiczenie 2.L „implikacje – 1”

Zapisz odpowiedniki formuł logicznych w języku polskim. (*Rozwiązania*, s. 305).

A: ***A***la odkurzy dom.
B: ***B***oguś odkurzy dom.
C: ***C***zesia zrobi kolację.

D: ***D***amian umyje naczynia.
K: Boguś zrobi ***k***olację.
N: Boguś umyje ***n***aczynia.

(a)	$D \rightarrow K$	
(b)	$K \rightarrow D$	
(c)	$B \rightarrow C$	
(d)	$K \rightarrow N$	
(e)	$A \rightarrow \sim B$	
(f)	$\sim D \rightarrow N$	
(g)	$\sim B \rightarrow \sim C$	
(h)	$C \rightarrow (A \vee B)$	
(i)	$(A \vee B) \rightarrow (D \vee N)$	
(j)	$(C \vee K) \rightarrow D$	
(k)	$A \rightarrow (K \bullet N)$	
(l)	$(A \bullet C) \rightarrow N$	
(m)	$(C \bullet D) \rightarrow (A \vee B)$	
(n)	$A \rightarrow (C \rightarrow N)$	
(o)	$(C \rightarrow N) \rightarrow A$	

Ćwiczenie 2.M „implikacje – 2”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań, parafrazując je najpierw do formy kanonicznej ‘jeżeli …, to …’. (*Rozwiązania*, s. 306).

A: ***A***la zrobi kolację.
B: ***B***oguś zrobi kolację.
C: ***C***ezary zrobi obiad.
D: ***D***anusia zrobi obiad.

(a) Jeżeli Danusia zrobi obiad, to Boguś zrobi kolację.

(b) Jeżeli Danusia zrobi obiad, to Cezary nie zrobi obiadu.

(c) Cezary zrobi obiad, jeśli Boguś zrobi kolację.
Jeżeli to

(d) Cezary zrobi obiad, jeśli Danusia nie zrobi obiadu.
Jeżeli to

(e) Przyjmując, że Boguś zrobi kolację, to Danusia zrobi obiad.
Jeżeli to

(f) Danusia zrobi obiad pod warunkiem, że Ala zrobi kolację.
Jeżeli to

(g) O ile Ala zrobi kolację, to Cezary zrobi obiad.
Jeżeli to

(h) Cezary nie zrobi obiadu, jeżeli Boguś nie zrobi kolacji.
Jeżeli to

(i) Ala zrobi kolację wtedy, gdy Cezary lub Danusia zrobią obiad.
Jeżeli to

(j) Przy założeniu, że Danusia lub Cezary zrobią obiad, Ala lub Boguś zrobią kolację.
Jeżeli to

Ćwiczenie 2.N „implikacje – 3”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań, parafrazując je najpierw w formie kanonicznej ‘jeżeli …, to …’. (*Rozwiązania*, s. 306).

Ć: Ala ***ć***wiczy regularnie.
D: Ala jest na ***d***iecie.
L: Ala czuje się ***l***epiej.
T: Ala ***t***yje.

B: Boguś ***b***iega regularnie.
H: Boguś c***h***udnie.
Ś: Boguś czuje się ***ś***wietnie.
U: Boguś uważa, co je.

(a) Ala poczuje się lepiej, jeśli będzie regularnie ćwiczyć.

Jeżeli to

(b) Ala przejdzie na dietę pod warunkiem, że Boguś zacznie uważać, co je.

Jeżeli to

(c) Boguś będzie uważał, co je, wtedy, gdy Ala będzie na diecie.

Jeżeli to

(d) O ile Boguś biega regularnie, to czuje się świetnie i chudnie

Jeżeli to

(e) Przy założeniu, że Boguś uważa, co je i biega regularnie, to czuje się świetnie.

Jeżeli to

(f) Ala nie tyje, przyjąwszy, że ćwiczy regularnie.

Jeżeli to

(g) O ile Ala nie tyje, to czuje się ona lepiej, a Boguś świetnie.

Jeżeli to

(h) Przyjmując, że Ala nie tyje, to jeśli Boguś biega regularnie, czuje się on świetnie.

Jeżeli to

(i) Ala nie tyje pod warunkiem, że trzyma dietę i ćwiczy regularnie.

Jeżeli to

2.8.2. Matryca logiczna dla implikacji

Podczas gdy matryce logiczne pozostałych spójników nie nastręczają specjalnych trudności, to matryca logiczna dla implikacji jest źródłem sporych nieporozumień i rozterek starających się ją pojąć studentów. Zdradzę, że jednym z moich kryteriów oceny dobroci podręczników logiki jest to, w jakim stopniu starają się oszukać studentów, próbując im wmówić, że matryca implikacji jest intuicyjna. Otóż matryca dla implikacji jest istotnie w połowie intuicyjna, ale w drugiej połowie intuicyjna nie jest. Jej kształt jest w dużym stopniu podyktowany ograniczeniami klasycznego rachunku zdań. Nie przysparza specjalnych kłopotów zrozumienie, kiedy implikacja jest fałszywa, i od tego rozpocznijmy.

Kiedy implikacja jest fałszywa?

Wszyscy dobrze znamy bajkę o Królewnie Śnieżce, wiemy więc, że w pewnym momencie bajki uzasadnione jest następujące przewidywanie:

(1) Jeżeli Królewna Śnieżka zje jabłko, to umrze.

Zastanówmy się, kiedy przewidywanie to okazałoby się fałszywe. Wydaje się dość jasne, że okaże się, iż myliliśmy się wówczas, gdy Królewna Śnieżka zje jabłko, ale nie umrze, czyli:

p	q	$p \rightarrow q$
Królewna Śnieżka zje jabłko	Królewna Śnieżka umrze	Jeżeli Królewna Śnieżka zje jabłko, to umrze.
1	0	0

Rozważmy jeszcze inny przykład implikacji:

(2) Jeżeli do wody dosypać mączki ziemniaczanej, to się rozpuści.

Zdanie (2) jest fałszywe, ponieważ dosypaniu mączki ziemniaczanej do wody (prawdziwość poprzednika) towarzyszy jej nierozpuszczenie się (fałszywość następnika).

Możemy zatem wypełnić częściowo matrycę logiczną implikacji:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	
1	0	0
0	1	
0	0	

Kiedy implikacja jest prawdziwa?

Krótko: w pozostałych przypadkach, tj. kiedy nie jest fałszywa.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ale dlaczego?

Jasne powinno się Wam wydawać, dlaczego implikacja jest prawdziwa w pierwszym rzędzie. Przecież – wracając do zdania (1) – jeżeli będzie tak, że Królewna Śnieżka zje jabłko i umrze (sytuacja z rzędu pierwszego: zarówno poprzednik implikacji, jak i jej następnik, są prawdziwe), to uznamy, że hipoteza (1) była prawdziwa.

p	q	$p \rightarrow q$
Królewna Śnieżka zje jabłko	Królewna Śnieżka umrze	Jeżeli Królewna Śnieżka zje jabłko, to umrze.
1	1	1

Dlaczego jednak mielibyśmy powiedzieć, że hipoteza (1) jest prawdziwa, jeżeli Królewna Śnieżka w ogóle nie zje jabłka (sytuacje z rzędu trzeciego i czwartego)? *Musi* się to Wam wydawać absurdalne, a przynajmniej dziwne, bo – co tu dużo ukrywać – tak po prostu jest.

W tym punkcie docieramy do pewnego ograniczenia klasycznej logiki zdań. Decyzja, aby uznać implikację za zdanie prawdziwe zawsze, gdy poprzednik jest fałszywy, jest *decyzją teoretyczną*. Dla zainteresowanych niżej podaję dwa takie metateoretyczne powody. Niezainteresowani mogą te wyjaśnienia pominąć.

Jeden z powodów jest analogiczny do uzasadnienia decyzji o wyborze alternatywy zwykłej jako domyślnego rozumienia alternatywy. Okazuje się bowiem, że przyjąwszy taką matrycę logiczną dla implikacji, można zrozumieć zachodzenie pewnych związków logicznych między zdaniami, które intuicyjnie rozpoznajemy. Na przykład wyczuwamy intuicyjnie, że następujące pary wypowiedzi wyrażają tę samą treść:

(3a) Albo dasz mi 200 zł, albo dostaniesz mandat na 500 zł.
(3b) Jeżeli nie dasz mi 200 zł, to dostaniesz mandat na 500 zł.
(4a) Szadź występuje zawsze i tylko wtedy, gdy następuje gwałtowny spadek temperatury przy dużej wilgotności powietrza.
(4b) Jeżeli wystąpiła szadź, to znaczy, że nastąpił gwałtowny spadek temperatury przy dużej wilgotności powietrza, a zarazem zawsze, gdy następuje gwałtowny spadek temperatury przy dużej wilgotności powietrza, to występuje szadź.

Zależności te daje się zrozumieć, jeśli przyjmiemy taką właśnie, po części nieintuicyjną, matrycę logiczną dla implikacji. Drugi z powodów takiego rozstrzygnięcia podany jest w ramce na stronie 37.

Uzupełnij:

Wartość logiczna implikacji:

p	q	$p \to q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Implikacja jest fałszywa zawsze i tylko wtedy, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Zatem: implikacja jest prawdziwa zawsze i tylko wtedy, gdy albo jej następnik jest prawdziwy, albo jej poprzednik jest fałszywy.

Porada babuni

Matrycę logiczną dla implikacji należy wykuć!

Dlaczego implikacja jest prawdziwa, gdy poprzednik jest fałszywy?

Matryca logiczna dla implikacji jest intuicyjna „w połowie”:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	
0	0	

Powstaje nieuchronnie pytanie, co zrobić z drugą „połową”. W klasycznej logice zdań są dokładnie cztery możliwości:

p	q	p ❶ q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	p ❷ q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

p	q	p ❸ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	p ❹ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Okazuje się jednak, że po bliższym przyjrzeniu się tym czterem możliwym matrycom, tylko matryca ❶ nie jest już „wykorzystana”. Zacznijmy od końca.

Matryca ❹ jest przecież niczym innym niż matrycą koniunkcji. Gdyby implikacja miała mieć matrycę koniunkcji, wówczas zdanie ‘Jeżeli Stefan weźmie pożyczkę na 1000 zł, to będzie musiał spłacić 2000 zł’ miałoby te same warunki prawdziwości, co zdanie ‘Stefan *weźmie* pożyczkę na 1000 zł i *będzie musiał spłacić* 2000 zł’, a tak nie jest. Zdanie ‘Jeżeli Stefan weźmie pożyczkę na 1000 zł, to będzie musiał spłacić 2000 zł’ może być prawdziwe, nawet jeżeli Stefan nie weźmie tej pożyczki. Innymi słowy, przy tym rozstrzygnięciu zaniknęłoby zupełnie uwarunkowanie charakterystyczne dla implikacji.

Matryca ❸ jest matrycą równoważności. Gdyby implikacja miała mieć matrycę równoważności, wówczas zdanie ‘Jeżeli pada deszcz, to niebo jest zachmurzone’ miałoby te same warunki prawdziwości, co zdanie ‘Pada deszcz zawsze i tylko wtedy, gdy niebo jest zachmurzone’. Tak przecież jednak nie jest. Pierwsze zdanie jest prawdziwe – istotnie deszcz pada tylko wtedy, gdy niebo jest zachmurzone. Drugie zdanie natomiast jest fałszywe: nie zawsze, gdy niebo jest zachmurzone, to pada deszcz – czasami pada śnieg, czasami pada grad, a czasami w ogóle nie ma opadów. Innymi słowy, przy takim rozstrzygnięciu zaniknąłby «kierunek» uwarunkowania implikacji.

Matryca ❷ jest natomiast po prostu matrycą dla następnika q – gdyby implikacja miała mieć te same warunki prawdziwości i fałszywości co następnik, to poprzednik w ogóle nie byłby dla jej prawdziwości istotny, a to przecież absurd. Zdanie ‘Jeżeli jesteście mi winni 1 milion złotych, to powinniście mi przekazać 1 milion złotych’ jawnie – i dla Waszego dobra! – nie ma tych samych warunków prawdziwości, co jego następnik ‘Powinniście mi przekazać 1 milion złotych’. Implikacja może być prawdziwa, nawet jeżeli następnik jest fałszywy.

W ten sposób matryca ❶ okazuje się jedyną dostępną matrycą dla implikacji na gruncie logiki zdań.

Źródło: V. Klenk, *Understanding Symbolic Logic* (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002).

2.9. Symbolizacja prostych zdań języka naturalnego

Ćwiczenie 2.O

Dokonaj symbolizacji następujących zdań (rozwiązania omówione zostaną na stronie 39).

R: ***R**enia kocha się w Macieju.*
M: ***M**aciej odwzajemnia uczucie Reni.*
T: ***T**ato Reni pozwala na jej ślub z Maciejem.*
Ż: Renia zamierza wyjść za mą***ż*** za Macieja.

(a) Renia kocha się w Macieju, ale Maciej nie odwzajemnia jej uczuć.

(b) Nieprawdą jest pogłoska, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni.

(c) Jeśli tato Reni pozwoli na jej ślub z Maciejem, to Renia zamierza wyjść za mąż za Macieja.

(d) Jeśli tato Reni nie pozwoli na jej ślub z Maciejem, to Renia nie zamierza wyjść za mąż za Macieja.

(e) Jeśli fałszem jest, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni, to tato Reni pozwoli na ich ślub.

(f) Maciej odwzajemni uczucie Reni pod warunkiem, że tato Reni pozwoli na jej ślub z Maciejem.

(g) Tato Reni pozwoli na jej ślub z Maciejem wtedy i tylko wtedy, gdy Maciej odwzajemnia uczucie Reni.

Czy wiesz, że…

Liczba możliwych spójników zdaniowych w klasycznej logice zdań jest ściśle określona. Możliwe (co nie znaczy, że występujące w języku naturalnym) są dokładnie cztery jednoargumentowe spójniki zdaniowe, a dokładnie szesnaście spójników dwuargumentowych. Następująca matryca oddaje wszystkie szesnaście możliwości:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Czy umiesz odnaleźć wprowadzone przez nas pięć spójników zdaniowych w tej matrycy? Nadmieńmy też, że w kolumnie 10 zdefiniowany jest spójnik tzw. dysjunkcji, a w kolumnie 15 – spójnik tzw. binegacji. Oba te spójniki mają tę ciekawą własność, że każdy z nich samodzielnie może służyć do zdefiniowania pozostałych spójników. Dopiero jednak w rozdziale 6 poznacie metodę matrycową sprawdzania równoważności logicznej schematów logicznych, która pozwoli Wam na podanie takich definicji i ich uzasadnienie.

(a) Renia kocha się w Macieju, ale Maciej nie odwzajemnia jej uczuć.

Parafrazując:

> Jest zarazem prawdą, że Renia kocha się w Macieju, oraz że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni.

Jest to koniunkcja, której drugi człon jest negacją:

> R • ~M

(b) Nieprawdą jest pogłoska, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni.

Parafrazując:

> Nieprawda, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni.

Jest to podwójna negacja:

> ~~M

Pamiętajmy, że dokonując symbolizacji, należy starać się jak najściślej oddać logiczną (syntaktyczną) strukturę zdania. Nie należy zatem rozumować, że ponieważ dwie negacje się znoszą (tj. ~~*p* jest logicznie równoważne *p*) więc symbolizacją zdania ‘Nieprawda, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni’ jest zdanie M. Jest istotnie tak, że zdanie ~~M jest logicznie równoważne zdaniu M, ale po pierwsze, w symbolizowaniu chodzi o jak najdokładniejsze oddanie zastanej struktury syntaktycznej zdania, a po drugie, na tym etapie rozważań nie wykazaliśmy jeszcze, że ~~M jest logicznie równoważne M. Poznamy narzędzia, za pomocą których będziemy mogli to wykazać dopiero w późniejszych rozdziałach.

(c) Jeśli tato Reni pozwoli na jej ślub z Maciejem, to Renia zamierza wyjść za mąż za Macieja.

Warunkiem (czego?) zamiaru Reni (następnik), jest (co?) pozwolenie ojca (poprzednik).

> T → Ż

(d) Jeśli tato Reni nie pozwoli na jej ślub z Maciejem, to Renia nie zamierza wyjść za mąż za Macieja.

Warunkiem (czego?) tego, że Renia nie zamierza wyjść za mąż (następnik), jest (co?) brak pozwolenia ojca (poprzednik):

> ~T → ~Ż

(e) Jeśli fałszem jest, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni, to tato Reni pozwoli na ich ślub.

Warunkiem (czego?) pozwolenia na ślub (następnik), jest (co?) to, że fałszem jest, że Maciej nie odwzajemnia uczuć Reni (poprzednik):

> ~~M → T

(f) Maciej odwzajemni uczucie Reni pod warunkiem, że tato Reni pozwoli na jej ślub z Maciejem.

Warunkiem (czego?) odwzajemnienia uczucia Reni przez Macieja (następnik), jest (co?) pozwolenie na ślub (poprzednik):

> T → M

(g) Tato Reni pozwoli na jej ślub z Maciejem wtedy i tylko wtedy, gdy Maciej odwzajemnia uczucie Reni.

> T ≡ M

Ćwiczenie 2.P „symbolizacje”

Dokonaj symbolizacji następujących zdań. (*Rozwiązania*, s. 307).

A: ***A***la robi kolację.	**G**: Lech jest ***g***łodny.
P: Ala pracuje do ***p***óźna.	**L**: ***L***ech robi kolację.
W: Szef Ali ***w***ymaga, aby pracowała do późna.	**Ś**: Jest ***ś***więto.
	Ź: Lech pracuje do pó***ź***na.

(a) Lech nie zrobi kolacji.

(b) Nieprawdą jest, że Ala nie zrobi kolacji.

(c) Lech pracuje do późna w nocy wtedy i tylko wtedy, gdy Ala pracuje do późna.

(d) Jeżeli Ali szef wymaga od niej, aby pracowała do późna, to do późna pracuje.

(e) Ala pracuje do późna, o ile jej szef tego wymaga.

(f) Jeżeli Ali szef nie wymaga od niej, aby pracowała do późna, to do późna nie pracuje.

(g) Kolację zrobi albo Lech, albo Ala.

(h) Jeżeli Ala nie pracuje do późna, to ona robi kolację.

(i) Ala robi kolację wtedy, gdy Lech pracuje do późna.

(j) Lech nie zrobi kolacji, o ile nie jest głodny.

(k) Ala robi kolację zawsze i tylko wtedy, gdy Lech nie jest głodny.

(l) Szef Ali wymaga od niej, by pracowała do późna zawsze i tylko wtedy, gdy nie ma świąt.

(m) Lech zrobił kolację, a pomimo to jest głodny.

(n) Szef Ali nie wymaga od niej, by pracowała do późna, chociaż nie ma święta.

(o) Lech chodzi głodny, gdy Ala pracuje do późna.

Podsumowanie

Rozróżniliśmy zdania złożone od zdań prostych. Zdania proste będziemy zastępować tzw. stałymi zdaniowymi, które przedstawiamy za pomocą wielkich liter A, B, C itd. Zdania złożone będziemy przedstawiać jako złożenia zdań prostych za pomocą spójników zdaniowych. Wprowadziliśmy pięć spójników zdaniowych: spójnik negacji, spójnik koniunkcji, spójnik alternatywy (zwykłej), spójnik równoważności oraz spójnik implikacji. Poznaliśmy też ich matryce logiczne.

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \bullet q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Porada babuni

Matryce logiczne należy najpierw zrozumieć, a następnie wykuć. Aby skutecznie wykuć, zamknij *Samouczek* i samodzielnie narysuj matryce logiczne dla negacji, koniunkcji, alternatywy, równoważności, implikacji. Ponawiaj próby, aż nie będziesz się mylić.